

К. ШАРЛЬЕ

# НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА



**К. ШАРЛЬЕ**

# **НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА**

**Перевод с немецкого**

**В. Г. ДЁМИНА**

**Под редакцией**

**проф. Б. М. ЩИГОЛЕВА**

# **DIE MECHANIK DES HIMMELS**

**VORLESUNGEN**

**VON**

**CARL LUDWIG CHARLIER**

**Mit zahlreichen Figuren  
zweite, durchgesehene Auflage**

**BERLIN UND LEIPZIG**

**WALTER DE GRUYTER & Co.**

**Vormals G. J. Göschen'sche verlagshandlung —  
J. Guttentag, verlagsbuchhandlung — Georg  
Reimer — Karl J. Trübner — veit & Comp.**

**1927**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	6
Из предисловия автора . . . . .	8
<b>Глава I. Вспомогательные теоремы из математики и механики . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Теоремы из теории определителей . . . . .	9
§ 2. Функциональные определители . . . . .	11
§ 3. Кратные решения системы уравнений . . . . .	16
§ 4. Линейные преобразования . . . . .	19
§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами . . . . .	23
§ 6. Примеры к предыдущим параграфам . . . . .	33
§ 7. Уравнения движения Лагранжа . . . . .	38
§ 8. Канонические уравнения движения . . . . .	51
§ 9. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби . . . . .	57
§ 10. Вариация постоянных в задачах механики . . . . .	64
<b>Глава II. О дифференциальных уравнениях механики. Условно-периодические движения . . . . .</b>	<b>69</b>
§ 1. Интегрирование дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби разделением переменных. Теорема Штеккеля . . . . .	69
§ 2. Движения с одной степенью свободы. Либрация и предельное движение . . . . .	76
§ 3. Условно-периодические движения . . . . .	85
<b>Глава III. Задача двух неподвижных центров . . . . .</b>	<b>100</b>
§ 1. Общие соображения . . . . .	100
§ 2. Постоянная интеграла живых сил $h$ отрицательна. Случай либрации . . . . .	104
§ 3. Постоянная $h$ положительна . . . . .	110
§ 4. Постоянная $h$ равна нулю . . . . .	112
§ 5. Кратные корни уравнения $R(\lambda) = 0$ или $S(\mu) = 0$ . Предельные движения . . . . .	113
§ 6. Периодические движения . . . . .	122
§ 7. Сопоставление различных типов орбит, встречающихся в задаче двух неподвижных центров . . . . .	127
§ 8. Примеры . . . . .	131
<b>Глава IV. Задача двух тел . . . . .</b>	<b>136</b>
§ 1. Общие соображения . . . . .	136
§ 2. Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби для задачи двух тел . . . . .	138
§ 3. Прямолинейное движение . . . . .	140

§	4. Эллиптическое движение . . . . .	144
§	5. Параболическое движение . . . . .	150
§	6. Гиперболическое движение . . . . .	153
§	7. Отталкивательная сила. Кометные хвосты . . . . .	157
§	8. Задача двух тел как пример условно-периодических движений . . . . .	166
§	9. Представление координат как функций времени . . . . .	170
<b>Глава V. Задача трех тел . . . . .</b>		<b>176</b>
§	1. Первые интегралы задачи трех тел . . . . .	176
§	2. Уравнения движения в относительных координатах . . . . .	184
§	3. Канонические относительные координаты . . . . .	189
§	4. Якобиевы канонические координаты . . . . .	191
§	5. Вариация постоянных. Канонические элементы . . . . .	195
§	6. Вариация постоянных для относительных координат . . . . .	207
§	7. Интеграл живых сил и интегралы площадей в различных координатах . . . . .	211
§	8. Оскулирующие элементы . . . . .	215
§	9. Исключение узла. Теорема Лапласа об устойчивости . . . . .	217
§	10. Приведение системы дифференциальных уравнений задачи трех тел к четырем степеням свободы . . . . .	224
<b>Глава VI. Теория возмущений . . . . .</b>		<b>231</b>
§	1. Введение новых канонических элементов . . . . .	231
§	2. Форма разложения возмущающей функции . . . . .	236
§	3. Разложение возмущающей функции . . . . .	240
§	4. Основы теории возмущений . . . . .	252
§	5. Коэффициенты Лапласа . . . . .	258
<b>Глава VII. Теория вековых возмущений . . . . .</b>		<b>266</b>
§	1. Общие соображения . . . . .	266
§	2. Вековая часть возмущающей функции . . . . .	270
§	3. Вековые возмущения в случае двух планет . . . . .	273
§	4. Тригонометрические выражения для вековых возмущений эксцентриситета и долготы перигелия . . . . .	277
§	5. Вековые возмущения наклоности и узла . . . . .	281
§	6. Вековые возмущения эллиптических орбит при произвольном числе планет . . . . .	284
§	7. Вековые возмущения плоскостей орбит для произвольного числа планет . . . . .	293
§	8. Метод Якоби вычисления корней фундаментального уравнения . . . . .	297
§	9. Результаты Стокуелла о вековых возмущениях больших планет . . . . .	302
§	10. Случай кратных корней фундаментального уравнения . . . . .	313
§	11. Вековые возмущения малых планет . . . . .	322
§	12. Вековые возмущения малых планет (продолжение) . . . . .	333
<b>Глава VIII. Периодические решения . . . . .</b>		<b>343</b>
§	1. Точные решения задачи трех тел . . . . .	343
§	2. Периодические решения в окрестности точек либрации . . . . .	353
§	3. Граничная кривая Хилла . . . . .	359
§	4. Периодические решения в окрестности точек либрации (продолжение) . . . . .	364
§	5. Периодические решения в окрестности масс . . . . .	378

§	6. Теорема существования Коши. Теорема Пуанкаре . . . . .	404
§	7. Метод Пуанкаре построения периодических решений . . . . .	415
§	8. Метод Пуанкаре построения периодических решений (продолжение) . . . . .	423
§	9. Форма разложения возмущающей функции . . . . .	426
§	10. Периодические решения первого сорта . . . . .	429
§	11. Периодические решения второго сорта . . . . .	435
§	12. Периодические решения третьего сорта . . . . .	446
§	13. Периодические решения других сортов . . . . .	453
Г л а в а IX. Сходимость рядов в небесной механике . . . . .		464
§	1. Сходимость рядов в задаче двух тел . . . . .	464
§	2. Сходимость рядов в задаче двух тел (продолжение) . . . . .	477
§	3. Граничная кривая Хилла . . . . .	489
§	4. Сходимость разложений по степеням возмущающих масс . . . . .	494
§	5. Сходимость рядов в теории возмущений . . . . .	499
§	6. Сходимость рядов в теории возмущений (продолжение). . . . .	510
Г л а в а X. О форме интеграла в задаче трех тел . . . . .		517
§	1. Канонические преобразования . . . . .	517
§	2. Механическая задача с одной степенью свободы . . . . .	536
§	3. Разложение возмущающей функции в ограниченной круговой задаче трех тел . . . . .	544
§	4. Проблема Делоне . . . . .	551
§	5. О соизмеримостях низших порядков . . . . .	560
§	6. О соизмеримостях высших порядков . . . . .	582
§	7. О представлении интеграла задачи трех тел в чисто тригонометрической форме . . . . .	594
§	8. О представлении интеграла задачи трех тел в тригонометрической форме (продолжение) . . . . .	603
§	9. О представлении интеграла задачи трех тел в тригонометрической форме (второе продолжение) . . . . .	617
Литература . . . . .		625

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Первый том «Небесной механики» К. Шарлье издан в 1902 г., второй — в 1907 г. Более полувека это издание являлось настольной книгой специалистов по небесной механике и смежным дисциплинам. Русский перевод публикуется впервые. В нем произведены некоторые сокращения и два тома объединены в один. Книга К. Шарлье содержит все основные сведения по небесной механике, изложенные сжато и ясно, а также включает ряд задач и проблем, которые мало или совсем не освещаются в других изданиях такого рода. Это и послужило основанием для издания перевода.

Общие особенности книги: систематическое использование канонических уравнений, выбор неизменяемой плоскости в качестве основной плоскости координат, что наилучшим образом соответствует задачам о движениях в солнечной системе. Автор начинает изложение небесной механики с задачи двух неподвижных центров, в отличие от других курсов, содержащих в первых главах задачу двух тел. Шарлье впервые дал систематическое подробное изложение задачи двух центров. Это весьма существенно сейчас, когда из работ Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова и В. Г. Дёмина выяснилось, что задача двух неподвижных центров связана с решением проблемы движения искусственных спутников Земли. Изложение задачи двух тел (глава IV) дополнено исследованием прямолинейного движения, использованным в теоретических вопросах. Исследовано движение под влиянием отталкивательной силы. После обычных сведений о задаче трех тел (в главах VI и VII) дается теория возмущений. Главу VIII редакция исключила, поскольку очень короткое изложение задач численного интегрирования можно найти

в русских пособиях (М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2-й, И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений). В главе VIII (по новому счету) содержится теория периодических решений Пуанкаре.

Большой интерес представляет содержащийся в главе X метод Делоне для построения теории движения астероидов, и, особенно для случаев соизмеримости средних движений. Хорошо изложен в той же главе вопрос о построении решений в чисто тригонометрическом виде.

Из русского перевода исключен список астероидов, как устаревший и совершенно неполный; исключены также некоторые таблицы и отдельные абзацы текста. В ряде случаев заменены устаревшие обозначения, используемые автором. Кое-где уточнены библиографические ссылки, в отдельных случаях заменены на русские издания.

При подготовке перевода к печати существенную помощь оказали А. Л. Куницын и И. В. Серебрякова.

*Б. М. Щиголев*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Цель моей работы — дать возможно более единообразное представление о современных взглядах на исследования по небесной механике, связанные с движением точечных масс. При этом я стремился отметить астрономически важные результаты, одновременно заботясь о математической строгости и красоте решений.

Я вполне сознаю несовершенство моей работы. Единственное извинение я могу искать только в том, что в переходный период, который переживает астрономия, особенно трудно отличать главное от второстепенного. Вероятно, в некоторых местах весьма сильно акцентировалась математическая сторона проблемы в ущерб астрономической, в других, по-видимому, наоборот, хотя я постоянно стремился выдержать разумное равновесие между этими двумя основными подходами.

Чтобы при математических исследованиях соблюдать постоянный контакт с астрономической практикой, я сопровождал изложение важнейших проблем числовыми примерами, в основном относящимися к планетной системе, которые могли быть подходящими для выяснения астрономического значения исследований...

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ

§ 1. Теоремы из теории определителей

Определитель  $\Delta$  из  $n^2$  элементов будет записываться в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или, сокращенно,

$$\Delta = |a_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Теорема умножения определителей гласит:

$$|a_{ij}| \times |b_{ij}| = |c_{ij}|,$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{in}b_{jn}. \quad (1)$$

Так как любой определитель является линейной функцией каждого из своих элементов, то  $\partial\Delta/\partial a_{ij}$  всегда равняется коэффициенту при  $a_{ij}$  в соответствующем разложении определителя. Имеем также всегда

$$\begin{aligned} a_{i1} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{j1}} + a_{i2} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{j2}} + \dots + a_{in} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{jn}} &= \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \Delta & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (2) \\ a_{1i} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{1j}} + a_{2i} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{2j}} + \dots + a_{ni} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{nj}} &= \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \Delta & \text{при } i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким же способом получаем, что  $\partial^2\Delta/\partial a_{ij}\partial a_{kl}$  является коэффициентом при  $a_{ij}a_{kl}$  в разложении определителя. Выражения для этих производных с точностью до знака получаются вычеркиванием из определителя тех строк и столбцов, на пересечении которых находятся элементы, стоящие в знаменателе производной.

Различные производные от определителя можно выразить целыми функциями от его производных первого порядка.



Если  $\Delta = 0$ , но не все производные первого порядка от определителя равны нулю, то решение системы (8) будет:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ss}} x_j = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{sj}} x_s + \sum_{r=1}^n k_r \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ss} \partial a_{rj}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

где  $s$  может принимать произвольные значения  $1, 2, \dots, n$ .

Если правые части уравнений (8) все равны нулю, то из (10) получим известные формулы:

$$\frac{x_j}{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{sj}}} = \frac{x_s}{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ss}}} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Если  $\Delta = 0$ , то, следовательно, уравнения (8) не будут независимыми, и с помощью (10) или (11) можно выразить  $n - 1$  из величин  $x_j$  через  $x_1$  линейно.

Пусть не только  $\Delta$ , но также и все миноры первого порядка равны нулю, и, пусть, например,

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11} \partial a_{22}} \neq 0;$$

тогда имеем следующие выражения для  $x_j$ :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11} \partial a_{22}} x_j = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{1j} \partial a_{22}} x_1 + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11} \partial a_{2j}} x_2 + \sum_{r=1}^n k_r \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11} \partial a_{22} \partial a_{rj}}. \quad (12)$$

## § 2. Функциональные определители

Если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  обозначают  $n$  функций от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то функциональным определителем или якобианом называют следующее выражение:

$$J = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right|. \quad (1)$$

Якобиан часто обозначают также следующим образом:

$$J = \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (2)$$

Если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  являются частными производными от некоторой функции  $f$ , т. е.

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$



Первая часть этой теоремы была доказана Якоби следующим образом.

Нужно доказать, что якобиан взаимно зависимых функций обращается в нуль. Пусть  $f_0, f_1, \dots, f_n$  не являются независимыми; тогда они связаны между собой уравнением

$$\Pi(f_0, f_1, \dots, f_n) = 0, \quad (7)$$

которое обращается в тождество, если вместо  $f_0, f_1, \dots, f_n$  подставить их выражения через переменные  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Продифференцировав предыдущее уравнение по отдельным переменным, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} &= 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} &= 0. \end{aligned}$$

Эти  $n + 1$  уравнений можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_0}, \frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}.$$

Для такой системы согласно (9) § 1 определитель обращается в нуль в том случае, если не все неизвестные одновременно равны нулю. Но все величины  $\partial \Pi / \partial f_0$  и т. д. не могут одновременно равняться нулю, потому что это означало бы, что  $\Pi$  не зависит от всех  $f_0, f_1, \dots, f_n$ . Всякий раз, как функции  $f_0, f_1, \dots, f_n$  оказываются взаимно зависимыми, должно быть

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, n),$$

что и следовало доказать.

Несколько длинное доказательство Якоби второй части теоремы: функции, якобиан которых равен нулю, взаимно зависимы. Вместе с тем оно просто и наглядно, и мы приведем его дословно.

Обозначим через  $A_0, A_1, \dots, A_n$  выражения, которые в определителе

$$J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

являются алгебраическими дополнениями элементов

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}, \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}.$$

Тогда согласно (2) § 1 имеют место тождества

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} A_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_1} A_1 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} A_n &= J, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} A_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} A_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} A_n &= 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} A_0 + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} A_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Предположим, что функции взаимно независимы. Тогда  $n$  из переменных  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , например,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , можно выразить через  $x_0$  и  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Подставим эти выражения для  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в функцию  $f_0$ ; тогда  $f_0$  будет функцией переменных  $x_0, f_1, \dots, f_n$ . Заключение в скобки частные производные по этим переменным. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \dots + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_n}\right) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right),$$

и далее, если  $i$  будет обозначать какой-либо из индексов  $1, 2, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_n}\right) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Если подставить эти выражения в (8), то обнаружим, что выражения, которые умножаются на

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right), \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_2}\right), \dots, \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_n}\right),$$

в силу (9) тождественно равны нулю. Следовательно, получаем замечательную формулу:

$$J = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right) \cdot A. \quad (10)$$

Если определитель в левой части равенства уничтожается, то либо  $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)$ , либо определитель

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

обратится в нуль.

Пусть утверждение справедливо для  $n$  функций, т. е. что  $n$  функций взаимно зависимы, если их якобиан обращается

в нуль. Таким образом, если бы предыдущий якобиан  $A$  обратился в нуль, то функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  от  $x_1, x_2, \dots, x_n$  не были бы взаимно независимы, а это противоречит предположению, которое мы сделали. Следовательно, должен обращаться в нуль другой сомножитель  $(\partial f_0 / \partial x_0)$ , а отсюда следует, что  $f_0$  можно будет выразить только через  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Поэтому функции  $f_0, f_1, \dots, f_n$  взаимно зависимы, что и требовалось доказать.

После этого мы должны доказать это утверждение для  $n + 1$  функции. Коль скоро оно доказано для двух функций, то оно справедливо и для  $n$  функций, а значит, оно справедливо и вообще. Это делается следующим образом.

Пусть  $f_0$  и  $f_1$  — функции от  $x_0$  и  $x_1$ , якобиан которых равен нулю, т. е. тождественно выполняется

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 0.$$

Далее,  $f_1$  либо постоянная, либо содержит по крайней мере одну из переменных, например,  $x_1$ , и тогда можно выразить  $x_1$  через  $x_0$  и  $f_1$ . Если подставить это выражение в  $f_0$ , то будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} &= \left( \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) + \left( \frac{\partial f_0}{\partial f_1} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} &= \left( \frac{\partial f_0}{\partial f_1} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0} = \left( \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0.$$

Второй множитель  $\partial f_1 / \partial x_0$  не обращается в нуль, так как мы предположили, что  $f_1$  должно содержать именно  $x_1$ , стало быть,  $(\partial f_0 / \partial x_0) = 0$ , или функция  $f_0$ , выраженная через  $x_0$  и  $f_1$ , не будет содержать  $x_0$ , а является только функцией от  $f_1$ . Этим доказано: как только выполняется тождество

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 0,$$

то либо  $f_1$  постоянно, либо  $f_0$  является функцией  $f_1$  и, следовательно, функции  $f_0$  и  $f_1$  не являются независимыми, что и нужно было доказать. Таково доказательство Якоби этой важной теоремы. Указанная выше теорема может быть выражена следующим образом:

1. Функции, якобиан которых не обращается в нуль, взаимно независимы.
2. Якобиан от взаимно независимых функций не равен нулю.

Если  $n$  уравнений, которые связывают друг с другом величины  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , имеют неявную форму, т. е.

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то можно составлять функциональный определитель

$$\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Имеем

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_j} = 0,$$

следовательно,

$$-\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_j},$$

и, таким образом,

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \times \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| = (-1)^n \left| \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right|$$

или

$$\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| = (-1)^n \left| \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right| : \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|. \quad (12)$$

### § 3. Кратные решения системы уравнений

Из исследования кратных решений следующей системы уравнений вытекает одно из важнейших приложений теории функциональных определителей.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x) &= 0, \\ \Phi_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x) &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

— система  $n$  совместных уравнений, в которых, кроме величин  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , содержится также параметр  $x$ .

Предположим теперь, что значению  $x = x_0$  соответствует система значений  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  и мы хотим теперь определить те значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , которые соответствуют значению  $x$  в окрестности  $x = x_0$ .

Для этой цели положим

$$x = x_0 + \xi, \quad y_i = y_i^0 + \eta_i,$$

и уравнения (1) запишутся следующим образом:

$$\varphi_i(y_1^0 + \eta_1, y_2^0 + \eta_2, \dots, y_n^0 + \eta_n, x_0 + \xi) = 0,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Разложим теперь левые части этих уравнений по формуле Тейлора и примем во внимание, что, по предположению,

$$\varphi_i(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0, x_0) = 0;$$

тогда для определения  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \eta_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \eta_n + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \xi + R_1 &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \eta_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \eta_n + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \xi + R_2 &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} \eta_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \eta_n + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \xi + R_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где через  $R_1, R_2, \dots, R_n$  обозначены члены второго и высших порядков в разложениях.

Обозначим, далее, якобиан от  $\varphi$  через  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \right| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

и положим

$$a_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}, \quad (4)$$

так что

$$\Delta = |a_{ij}|;$$

тогда решение (2) будет зависеть от значения функционального определителя.

Пусть, во-первых,

$$\Delta \neq 0;$$

тогда согласно (9) § 1 получаем

$$\begin{aligned} -\Delta \eta_i = \xi & \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1i}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{2i}} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ni}} \right] + \\ & + R_1 \frac{\partial \Delta}{\partial a_{1i}} + R_2 \frac{\partial \Delta}{\partial a_{2i}} + \dots + R_n \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ni}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Члены, которые умножаются на  $R^i$ , будут по крайней мере второго порядка относительно  $\xi$  и  $\eta_i$ , и так как  $\Delta \neq 0$ , то можно  $\xi$  выбрать столь малым, что члены в последней строке станут сколь угодно малыми по сравнению с первыми членами. Отсюда следует, что в этом случае достаточно малым значениям  $\xi$  будет соответствовать единственная система значений величин  $\eta_i$ .

Если  $\Delta \neq 0$ , то решение будет единственным. Если же  $\Delta = 0$ , но миноры первого порядка определителя  $\Delta$  не все равны нулю, то уравнение (5) запишется в виде

$$A\xi + R_1 \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + R_2 \frac{\partial \Delta}{\partial a_{21}} + \dots + R_n \frac{\partial \Delta}{\partial a_{n1}} = 0, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{21}} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_{n1}}.$$

С другой стороны, согласно (10) § 1 имеем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ss}} \eta_j = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{sj}} \eta_s - \sum_{r=1}^n \left( \xi \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + R_r \right) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ss} \partial a_{rj}}, \quad (7)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$ , а  $s$  может принимать произвольные значения  $(1, 2, \dots, n)$ .

С помощью этой формулы все  $\eta_j$  можно выразить через одну величину, например,  $\eta_1$ . Далее, в (6) удержим только члены наименьшего порядка; тогда это уравнение примет вид

$$C\eta_1^2 + B\eta_1\xi + A\xi = 0, \quad (8)$$

где вторым членом можно пренебречь, если  $A \neq 0$ . Таким образом, в этом случае имеем

$$\eta_1 = \pm \sqrt{-\frac{A}{C}} \xi,$$

и каждому значению  $\xi$  соответствуют два различных значения  $\eta_1$ . Следовательно, здесь имеется двойной корень. Если бы обращались в нуль также и все миноры первого порядка определителя  $\Delta$ , то решение (2) можно было бы получить следующим образом. Из (7) находим

$$\sum_{r=1}^n \left( \xi \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + R_r \right) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ss} \partial a_{rj}} = 0, \quad (9)$$

где  $s$  может принимать любые значения  $(1, 2, \dots, n)$ .

Так как в этом случае согласно § 1 ( $n - 2$ ) из величин  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  можно выразить через две произвольные из них,

например,  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , то из (9) для  $s = 1$  и  $s = 2$  получаем два уравнения в форме

$$E_1\eta_1^2 + E_2\eta_1\eta_2 + E_3\eta_2^2 + (E_4\eta_1 + E_5\eta_2)\xi + E_6\xi^2 + E_7\xi = 0,$$
$$F_1\eta_1^2 + F_2\eta_1\eta_2 + F_3\eta_2^2 + (F_4\eta_1 + F_5\eta_2)\xi + F_6\xi^2 + F_7\xi = 0,$$

и если коэффициенты  $E$  и  $F$  не обращаются в нуль, то получаем, следовательно, четырехкратный корень уравнения (2).

Итак, находим, что если якобиан при определенных значениях  $x$  и  $y_i$  обращается в нуль, то этим значениям всегда соответствуют кратные решения рассматриваемой системы уравнений.

### § 4. Линейные преобразования

Если величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$  заменить новыми величинами  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , которые связаны с первыми линейными соотношениями, то имеет место линейное преобразование. Для таких преобразований в общем случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \dots + \gamma_{1n}y_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2 + \dots + \gamma_{2n}y_n, \\ &\dots \dots \\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \gamma_{n2}y_2 + \dots + \gamma_{nn}y_n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Преобразование называется ортогональным, если

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (2)$$

Подставим уравнения (1) в (2); тогда для ортогонального преобразования получим следующие соотношения между коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{i\mu}\gamma_{iv} = \begin{cases} 0 & \text{для } \mu \neq v, \\ 1 & \text{для } \mu = v, \end{cases} \quad (3)$$

которые могут быть записаны также в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{\mu i}\gamma_{vi} = \begin{cases} 0 & \text{для } \mu \neq v, \\ 1 & \text{для } \mu = v. \end{cases}$$

Число этих соотношений между коэффициентами ортогонального преобразования будет равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ , а так как общее количество коэффициентов равно  $n^2$ , то, следовательно, число независимых

коэффициентов будет

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом, для  $n = 3$  имеем три независимых коэффициента (эйлеровы углы). Можно показать, что в общем случае  $n^2$  коэффициентов можно выразить рационально через  $\frac{n(n-1)}{2}$  неопределенных величин.

При помощи соотношения (3) согласно теореме об умножении определителей получаем

$$\Delta^2 = 1.$$

Наиболее известным ортогональным преобразованием является такое преобразование, в котором изменение координат получается при вращении прямоугольной системы координат.

Особый интерес представляют преобразования многочленов второго и более высоких порядков при помощи ортогональных подстановок.

Целые однородные функции называются формами. Эти формы будут квадратичными, кубическими и т. д., в зависимости от показателя степени. Они будут называться бинарными, тернарными и т. д. формами, смотря по тому, будет ли число входящих переменных равно двум, трем или больше.

Квадратичная форма

$$f = \sum a_{ij}x_i x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ , всегда может быть преобразована посредством ортогональной подстановки к сумме только одних квадратов.

Сделаем ту же подстановку (1) в (4) и определим коэффициенты  $\gamma_{ij}$ , так, чтобы

$$\sum a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0 \quad \text{для} \quad \mu \neq \nu; \quad (5)$$

тогда для определения  $\gamma_{ij}$  получим  $\frac{n(n-1)}{2}$  соотношений. Так как

подстановка должна быть ортогональной, то получим еще  $\frac{n(n+1)}{2}$

соотношений, и вместе с ними для определения коэффициентов  $\gamma_{ij}$  будем иметь достаточное число уравнений. Это определение происходит следующим образом. Выражение (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{1\mu} [a_{11}\gamma_{1\nu} + a_{12}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{1n}\gamma_{n\nu}] + \\ + \gamma_{2\mu} [a_{21}\gamma_{1\nu} + a_{22}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{2n}\gamma_{n\nu}] + \dots + \\ + \gamma_{n\mu} [a_{n1}\gamma_{1\nu} + a_{n2}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{nn}\gamma_{n\nu}] = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (3)

$$\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu} + \dots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu} = 0.$$

Полагая в обоих этих уравнениях  $\mu = 1, 2, \dots, n$ , за исключением  $\mu = \nu$ , и сравнивая полученные системы уравнений, найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{a_{11}\gamma_{1\nu} + a_{12}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{1n}\gamma_{n\nu}}{\gamma_{1\nu}} &= \frac{a_{21}\gamma_{1\nu} + a_{22}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{2n}\gamma_{n\nu}}{\gamma_{2\nu}} = \\ &= \dots = \frac{a_{n1}\gamma_{1\nu} + a_{n2}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{nn}\gamma_{n\nu}}{\gamma_{n\nu}}. \end{aligned}$$

Обозначим общее значение этих отношений через  $s_\nu$ , тогда придем к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - s_\nu)\gamma_{1\nu} + a_{12}\gamma_{2\nu} + \dots + a_{1n}\gamma_{n\nu} &= 0, \\ a_{21}\gamma_{1\nu} + (a_{22} - s_\nu)\gamma_{2\nu} + \dots + a_{2n}\gamma_{n\nu} &= 0, \\ \dots & \\ a_{n1}\gamma_{1\nu} + a_{n2}\gamma_{2\nu} + \dots + (a_{nn} - s_\nu)\gamma_{n\nu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если еще добавить уравнение

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{i\nu}^2 = 1, \quad (6^*)$$

то коэффициенты  $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}$  будут определены.

Далее, очевидно, что

$$f = s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \dots + s_n y_n^2 \quad (7)$$

и, следовательно, соответствующее приведение получено.

Для определения  $s_\nu$  согласно (6) имеет уравнение  $n$ -й степени:

$$F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет (при действительных  $a_{ij}$ ) только вещественные корни. Утверждение доказывается следующим образом.

Пусть  $s_\mu$  и  $s_\nu$  — два комплексных сопряженных корня. Соответствующие коэффициенты  $\gamma_{i\mu}$  и  $\gamma_{i\nu}$  также должны быть

сопряженными, так что можно положить

$$\gamma_{i\mu} = \alpha_i + i\beta_i,$$

$$\gamma_{iv} = \alpha_i - i\beta_i.$$

Отсюда следует

$$\gamma_{i\mu}\gamma_{iv} = \alpha_i^2 + \beta_i^2.$$

Но так как подстановка ортогональна, то по (3) имеем

$$\sum \gamma_{i\mu}\gamma_{iv} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

и

$$\sum \gamma_{i\mu}^2 = 1;$$

однако при сделанных предположениях эти равенства, очевидно, невозможны. Поэтому корни не могут быть комплексными.

Зато могут встретиться кратные корни (8). Пусть  $F(s) = 0$  имеет двойной корень; тогда должно также быть

$$F'(s) = 0$$

и, следовательно, будет

$$F'(s) = -\frac{\partial F}{\partial a_{11}} - \frac{\partial F}{\partial a_{22}} - \dots - \frac{\partial F}{\partial a_{nn}} = 0.$$

Умножая это уравнение на  $\partial F/\partial a_{ii}$ , получим

$$F'(s) \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = -\frac{\partial F}{\partial a_{11}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} - \frac{\partial F}{\partial a_{22}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} - \dots - \frac{\partial F}{\partial a_{nn}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = 0.$$

Но так как  $F = 0$ , то согласно формуле (7) § 1 имеем

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{kl}} = \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{kj}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ii}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}},$$

так как определитель  $F$  симметричен. Вследствие этого имеем

$$F'(s) \cdot \frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial a_{1i}}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial a_{2i}}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial F}{\partial a_{ni}}\right)^2 = 0,$$

а из этого уравнения следует, что все миноры первого порядка определителя  $F$  равны нулю.

Но в этом случае по формуле (12) § 1 решение (6) будет следующим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_{11} \partial a_{22}} \gamma_{iv} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_{11} \partial a_{22}} \gamma_{1v} + \frac{\partial^2 F}{\partial a_{11} \partial a_{2i}} \gamma_{2v},$$

так что коэффициенты  $\gamma_{iv}$  выражаются через какие-либо два из них. Добавим еще одно условие при помощи уравнения

$$\sum \gamma_{iv}^2 = 1.$$

Можно также одному из коэффициентов, например,  $\gamma_{1v}$ , дать произвольное значение.

Следовательно, при наличии двойного корня  $s$ , один из соответствующих коэффициентов  $\gamma_{iv}$  можно выбрать произвольно.

При кратном корне можно нескольким коэффициентам придать произвольные значения. При этом форма не нарушается. Кратному корню соответствует несколько членов с одним и тем же коэффициентом  $s$ .

### § 5. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами

Такие дифференциальные уравнения встречаются в небесной механике часто. Их теория, начатая Эрмитом, в первое время систематически публиковалась Флоке в «Annales de l'École Normale» (1883—1884).

Мы будем заниматься главным образом системами линейных дифференциальных уравнений, но сначала кратко воспроизведем основы исследований Флоке.

Возьмем линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка:

$$P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) y = 0, \quad (1)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  являются периодическими функциями от  $x$  с одним и тем же периодом. В астрономических приложениях этого уравнения достаточно предположить, что эти коэффициенты — однозначные, непрерывные и аналитические функции  $x$ , которые в каждой точке  $a$  могут быть разложены по положительным степеням  $x - a$ . Из исследований Фукса [1], которые теперь вошли в учебники, известно, что для каждой точки можно найти систему  $n$  степенных рядов, удовлетворяющих уравнению (1), через которые можно линейно выразить любое другое решение. Эти степенные ряды в совокупности образуют фундаментальную систему решений.



уравнения

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - s)u_1 + A_{21}u_2 + \dots + A_{n1}u_n &= 0, \\ A_{12}u_1 + (A_{22} - s)u_2 + \dots + A_{n2}u_n &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{1n}u_1 + A_{2n}u_2 + \dots + (A_{nn} - s)u_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где по крайней мере один из коэффициентов при  $u$  остается неопределенным. Отсюда получаем для  $s$  следующее уравнение:

$$G(s) = \begin{vmatrix} A_{11} - s & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} - s & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} - s \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

которое называется фундаментальным уравнением.

Если  $G(s) = 0$  имеет  $n$  различных корней, то имеется  $n$  решений, которые будут периодическими функциями второго рода. Эти  $n$  решений в совокупности образуют фундаментальную систему решений, ибо, если бы между ними существовала линейная зависимость

$$C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x) + \dots + C_n F_n(x) = 0,$$

то, в то время как  $x$  заменялось бы на  $x + \omega$ , и эта операция повторялась бы  $n - 1$  раз, получились бы  $n$  уравнений, из которых следовало бы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{vmatrix} = (s_2 - s_1)(s_3 - s_1)\dots (s_n - s_{n-1}) = 0,$$

но это возможно только в том случае, если два из корней будут равны друг другу.

Если имеются кратные корни, то все решения этим способом получить нельзя. Флоке указывал, что корню кратности  $\mu$  соответствует система  $\mu$  решений  $F_1, F_2, \dots, F_\mu$ , которую можно выразить через периодические функции  $\varphi_{ij}$  второго рода следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \varphi_{11}(x), \\ F_2(x) &= \varphi_{21}(x) + x\varphi_{22}(x), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_\mu(x) &= \varphi_{\mu 1}(x) + x\varphi_{\mu 2}(x) + \dots + x^{\mu-1}\varphi_{\mu\mu}(x). \end{aligned}$$

Мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как он должен быть рассмотрен при исследовании систем дифференциальных уравнений. Такая система будет исследована методом, который подобен методу Флоке. Так как уравнение (1) всегда можно свести к этому случаю, то перейдем к рассмотрению этого общего случая. Определение формы интеграла для этого случая дал Пуанкаре в своих «*Méthodes nouvelles*» [2].

Предположим, что имеется система уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \Phi_{11}x_1 + \Phi_{12}x_2 + \dots + \Phi_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \Phi_{21}x_1 + \Phi_{22}x_2 + \dots + \Phi_{2n}x_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \Phi_{n1}x_1 + \Phi_{n2}x_2 + \dots + \Phi_{nn}x_n, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots$  и т. д. — однозначные, аналитические и периодические функции  $t$  периода  $2\pi$ .

Согласно общей теории линейных уравнений можно получить систему  $n$  решений уравнений (8):

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{11}(t), \quad x_2 = \psi_{12}(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_{1n}(t), \\ x_1 &= \psi_{21}(t), \quad x_2 = \psi_{22}(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_{2n}(t), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_1 &= \psi_{n1}(t), \quad x_2 = \psi_{n2}(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_{nn}(t). \end{aligned}$$

Если эти решения составляют фундаментальную систему, то общий интеграл (8) должен иметь следующую форму:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1\psi_{11}(t) + C_2\psi_{21}(t) + \dots + C_n\psi_{n1}(t), \\ x_2 &= C_1\psi_{12}(t) + C_2\psi_{22}(t) + \dots + C_n\psi_{n2}(t), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= C_1\psi_{1n}(t) + C_2\psi_{2n}(t) + \dots + C_n\psi_{nn}(t), \end{aligned}$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  обозначают постоянные интегрирования.

Так как функции  $\Phi_{ij}(t)$  обладают периодом  $2\pi$ , то  $\psi_{ij}(t)$  также остаются решениями, если  $t$  заменить на  $t + 2\pi$ . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11}(t + 2\pi) &= A_{11}\psi_{11}(t) + A_{12}\psi_{21}(t) + \dots + A_{1n}\psi_{n1}(t), \\ \psi_{12}(t + 2\pi) &= A_{11}\psi_{12}(t) + A_{12}\psi_{22}(t) + \dots + A_{1n}\psi_{n2}(t), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \psi_{1n}(t + 2\pi) &= A_{11}\psi_{1n}(t) + A_{12}\psi_{2n}(t) + \dots + A_{1n}\psi_{nn}(t), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и также

$$\left. \begin{aligned} \psi_{21}(t + 2\pi) &= A_{21}\psi_{11}(t) + A_{22}\psi_{21}(t) + \dots + A_{2n}\psi_{n1}(t), \\ \psi_{22}(t + 2\pi) &= A_{21}\psi_{12}(t) + A_{22}\psi_{22}(t) + \dots + A_{2n}\psi_{n2}(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_{2n}(t + 2\pi) &= A_{21}\psi_{1n}(t) + A_{22}\psi_{2n}(t) + \dots + A_{2n}\psi_{nn}(t) \end{aligned} \right\} (9^*)$$

и т. д.

Пусть  $\Theta_{v_1}(t), \Theta_{v_2}(t), \dots, \Theta_{v_n}(t)$  — периодические функции второго рода, так что

$$\Theta_{v_i}(t + 2\pi) = s_v \Theta_{v_i}(t),$$

где через  $s_v$  обозначены постоянные. Если эти функции также являются решениями, то имеем

$$\Theta_{v_i}(t) = B_1\psi_{1i}(t) + B_2\psi_{2i}(t) + \dots + B_n\psi_{ni}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и тогда

$$\begin{aligned} \Theta_{v_i}(t + 2\pi) &= B_1 [A_{11}\psi_{1i}(t) + A_{12}\psi_{2i}(t) + \dots + A_{1n}\psi_{ni}(t)] + \\ &+ B_2 [A_{21}\psi_{1i}(t) + A_{22}\psi_{2i}(t) + \dots + A_{2n}\psi_{ni}(t)] + \\ &+ \dots + \\ &+ B_n [A_{n1}\psi_{1i}(t) + A_{n2}\psi_{2i}(t) + \dots + A_{nn}\psi_{ni}(t)] = \\ &= s_v [B_1\psi_{1i}(t) + B_2\psi_{2i}(t) + \dots + B_n\psi_{ni}(t)] \end{aligned}$$

Величины  $B_i$  будут находиться из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - s_v) B_1 + A_{21} B_2 + \dots + A_{n1} B_n &= 0, \\ A_{12} B_1 + (A_{22} - s_v) B_2 + \dots + A_{n2} B_n &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ A_{1n} B_1 + A_{2n} B_2 + \dots + (A_{nn} - s_v) B_n &= 0, \end{aligned} \right\} (10)$$

а  $s_v$  определится из уравнения (7):

$$G(s_v) = 0.$$

Если положить

$$s_v = e^{2\alpha_v \pi},$$

то найдем, что  $e^{-\alpha_v t} \Theta_{v_i}(t)$  будет периодической функцией (первого рода). Запишем тогда

$$\Theta_{v_i} = e^{\alpha_v t} \lambda_{vi}(t),$$

где  $\lambda_{vi}(t)$  обозначает периодическую функцию времени.

Пусть все корни  $s$ , фундаментального уравнения различны; тогда имеем следующую форму общего интеграла:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{11}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \lambda_{21}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \lambda_{n1}(t), \\ x_2 &= C_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{12}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \lambda_{22}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \lambda_{n2}(t), \\ &\dots \\ x_n &= C_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{1n}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \lambda_{2n}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \lambda_{nn}(t). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Величины  $\alpha_i$  названы Пуанкаре характеристическими показателями. Они играют важную роль при исследовании устойчивости в механике.

Если фундаментальное уравнение  $G(s) = 0$  обладает кратными корнями, то при известных условиях форма решения будет другой.

Из уравнений (10) можно определить отношения коэффициентов. Следовательно, один из них всегда будет произвольным и будет играть роль постоянной интегрирования. Если бы уравнение  $G(s) = 0$  обладало двойным корнем, а все миноры первого порядка обращались бы в нуль, то можно было бы, как доказано в § 1, два из соответствующих коэффициентов  $B$  взять произвольными. Тогда для этого корня имеются два решения, которые являются периодическими функциями второго рода с одними и теми же множителями.

Если не все миноры первого порядка обращаются в нуль, то природа решения может быть выяснена следующим путем.

Пусть  $s_1$  — двойной корень. Пусть этому корню соответствует система значений  $B_1, B_2, \dots, B_n$  (среди которых имеются произвольные) и система  $\Theta$  — функций  $\Theta_{11}, \Theta_{12}, \dots, \Theta_{1n}$  с множителем  $s_1$ . Далее,

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= B_1 \psi_{11} + B_2 \psi_{21} + \dots + B_n \psi_{n1}, \\ \Theta_{12} &= B_1 \psi_{12} + B_2 \psi_{22} + \dots + B_n \psi_{n2}, \\ &\dots \\ \Theta_{1n} &= B_1 \psi_{1n} + B_2 \psi_{2n} + \dots + B_n \psi_{nn}, \end{aligned}$$

где по крайней мере один из коэффициентов  $B_i$ , например  $B_1$ , отличен от нуля. Поэтому фундаментальную систему можно заметить следующей:

$$\begin{aligned} \Theta_{11}, \psi_{21}, \dots, \psi_{n1}, \\ \Theta_{12}, \psi_{22}, \dots, \psi_{n2}, \\ \dots \\ \Theta_{1n}, \psi_{2n}, \dots, \psi_{nn}. \end{aligned}$$

При помощи этой фундаментальной системы построим уравнение для  $s$ . Вместо уравнений (9) теперь имеем следующие:

$$\Theta_{1i}(t + 2\pi) = s_1 \Theta_{1i}(t),$$

$$\Psi_{2i}(t + 2\pi) = B_{21} \Theta_{1i}(t) + B_{22} \Psi_{2i}(t) + \dots + B_{2n} \Psi_{ni}(t),$$

$$\Psi_{ni}(t + 2\pi) = B_{n1} \Theta_{1i}(t) + B_{n2} \Psi_{2i}(t) + \dots + B_{nn} \Psi_{ni}(t),$$

из которых получается новое уравнение для  $s$ :

$$G_1(s) = \begin{vmatrix} s_1 - s & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} - s & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} - s \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Корни этого уравнения должны совпадать с корнями (8) (Флоке) и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} B_{22} - s & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n2} & B_{n3} & \dots & B_{nn} - s \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Это уравнение также должно иметь корень, равный  $s_1$ .

Из (13) вытекает, что имеется система величин  $\kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n$ , которые не равны одновременно нулю и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (B_{22} - s_1) \kappa_2 + B_{23} \kappa_3 + \dots + B_{2n} \kappa_n &= 0, \\ \dots & \dots \\ B_{2n} \kappa_2 + B_{3n} \kappa_3 + \dots + (B_{nn} - s_1) \kappa_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из нашей фундаментальной системы можно теперь построить следующие интегралы:

$$\Theta_{21}(t) = \kappa_1 \Theta_{11}(t) + \kappa_2 \Psi_{21}(t) + \dots + \kappa_n \Psi_{n1}(t),$$

$$\Theta_{22}(t) = \kappa_1 \Theta_{12}(t) + \kappa_2 \Psi_{22}(t) + \dots + \kappa_n \Psi_{n2}(t),$$

$$\dots$$

$$\Theta_{2n}(t) = \kappa_1 \Theta_{1n}(t) + \kappa_2 \Psi_{2n}(t) + \dots + \kappa_n \Psi_{nn}(t),$$

где через  $\kappa_1$  обозначена неопределенная постоянная.

Отсюда получаем уравнение

$$\begin{aligned} \Theta_{2i}(t + 2\pi) &= \kappa_1 s_1 \Theta_{1i}(t) + \kappa_2 [B_{21} \Theta_{1i}(t) + B_{22} \Psi_{2i}(t) + \dots + \\ &+ B_{2n} \Psi_{ni}(t)] + \dots + \kappa_n [B_{n1} \Theta_{1i}(t) + B_{n2} \Psi_{2i}(t) + \dots + B_{nn} \Psi_{ni}(t)] = \\ &= [\kappa_1 s_1 + \kappa_2 B_{21} + \dots + \kappa_n B_{n1}] \Theta_{1i}(t) + \\ &+ [\kappa_2 B_{22} + \dots + \kappa_n B_{n2}] \Psi_{2i} + \dots + [\kappa_2 B_{2n} + \dots + \kappa_n B_{nn}] \Psi_{ni}(t), \end{aligned}$$

которое с учетом (14) примет следующую форму:

$$\begin{aligned}\Theta_{2i}(t + 2\pi) &= [\kappa_1 s_1 + \kappa_2 B_{21} + \dots + \kappa_n B_{n1}] \Theta_{1i}(t) + \\ &\quad + s_1 \kappa_2 \psi_{2i} + \dots + s_1 \kappa_n \psi_{ni}(t) = \\ &= [\kappa_1 s_1 + \kappa_2 B_{21} + \dots + \kappa_n B_{n1}] \Theta_{1i}(t) + s_1 [\Theta_{2i}(t) - \kappa_1 \Theta_{1i}(t)].\end{aligned}$$

Положим

$$A = \kappa_2 B_{21} + \dots + \kappa_n B_{n1},$$

тогда  $\Theta_{2i}(t)$  будет удовлетворять следующему функциональному уравнению:

$$\Theta_{2i}(t + 2\pi) = A \Theta_{1i}(t) + s_1 \Theta_{2i}(t). \quad (15)$$

Поделим его на

$$\Theta_{1i}(t + 2\pi) = s_1 \Theta_{1i}(t);$$

тогда получим уравнение

$$\frac{\Theta_{2i}(t + 2\pi)}{\Theta_{1i}(t + 2\pi)} = \frac{\Theta_{2i}(t)}{\Theta_{1i}(t)} + \frac{A}{s_1},$$

которое удовлетворяется, если положить

$$\frac{\Theta_{2i}(t)}{\Theta_{1i}(t)} = \zeta_i(t) + \frac{A}{2\pi s_1} t,$$

где через  $\zeta_i(t)$  обозначена периодическая функция от  $t$  с периодом  $2\pi$ .

Отсюда следует, что то решение, которое соответствует двойному корню  $s_1$ , имеет следующую форму:

$$\Theta_{2i}(t) = \Theta'_{2i}(t) + \frac{At}{2\pi s_1} \Theta_{1i}(t), \quad (16)$$

где  $\Theta'_{2i}(t)$  и  $\Theta_{1i}(t)$  обозначают периодические функции второго рода и с одним и тем же множителем  $s_1$ .

Коэффициент  $A$  не обязательно отличен от нуля. Если  $A = 0$ , то как  $\Theta_{2i}(t)$ , так и  $\Theta_{1i}(t)$  суть периодические функции второго рода.

Если  $s_1$  — тройной корень, то появляются члены, умноженные на  $t^2$  и т. д. Этот вопрос рассмотрен в трактате Флоке [для уравнения (1)].

При практическом применении этой теории важную роль играет построение уравнения для  $s$ :  $G(s) = 0$ . Поэтому мы остановимся более подробно на этом вопросе. Задача распадается на две: 1) нахождение фундаментальной системы решений, 2) определение коэффициентов  $A_{ij}$  для этой фундаментальной системы.



так что

$$|A_{ij}| = \frac{1}{\Delta} |\psi_{ij}(2\pi)|. \quad (18)$$

При помощи (17) коэффициенты  $A_{ij}$  будут определены, если только заданы величины  $\psi_{ij}(0)$  и  $\psi_{ij}(2\pi)$ . Остается еще найти эти величины.

Функции  $\psi_{ij}$  образуют фундаментальную систему решений уравнений (8). Но такую фундаментальную систему всегда можно найти в форме степенных рядов по  $t$ . Этот метод даже на практике не всегда наиболее удобен, но он всегда приводит к цели. На одном частном примере мы укажем другой путь, который в астрономии обычно более быстро приводит к цели.

Итак, можно положить

$$\psi_{ij}(t) = a_{ij} + b_{ij}t + c_{ij}t^2 + \dots$$

и определить коэффициенты при помощи подстановки в уравнения (8). Из этих коэффициентов  $n(n-1)$  могут быть выбраны произвольно. Если теперь в соответствии с этим положить

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j, \\ 1 & \text{для } i = j, \end{cases} \quad (19)$$

то будем иметь

$$\Delta = 1$$

и

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j, \\ 1 & \text{для } i = j \end{cases}$$

и, таким образом, для  $A_{ij}$  из (17) получим простые формулы

$$A_{ij} = \psi_{ij}(2\pi). \quad (20)$$

Итак, для составления фундаментального уравнения нужно вычислить функции  $\psi_{ij}(2\pi)$  и тогда для  $s$  находим уравнение:

$$G(s) = \begin{vmatrix} \psi_{11}(2\pi) - s \psi_{12}(2\pi) & \dots & \psi_{1n}(2\pi) \\ \psi_{21}(2\pi) & \psi_{22}(2\pi) - s & \dots & \psi_{2n}(2\pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n1}(2\pi) & \psi_{n2}(2\pi) & \dots & \psi_{nn}(2\pi) - s \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Вычисление значений функций  $\psi_{ij}(t)$  при  $t = 2\pi$  можно выполнить различным образом, нужно только придерживаться предположения, которое было сделано относительно этих функций:

$$\psi_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j, \\ 1 & \text{для } i = j. \end{cases} \quad (19^*)$$

## § 6. Примеры к предыдущим параграфам

Предположим, что имеются только две функции, так что предыдущие уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varphi_{11}(t)x_1 + \varphi_{12}(t)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_{21}(t)x_1 + \varphi_{22}(t)x_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Относительно функций  $\varphi$ , которые являются периодическими по  $t$  с периодом  $2\pi$ , будем, кроме того, предполагать, что  $\varphi_{11}$  и  $\varphi_{22}$  являются нечетными, а  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  — четными функциями  $t$ . Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11}(-t) &= -\varphi_{11}(t), & \varphi_{12}(-t) &= \varphi_{12}(t), \\ \varphi_{21}(-t) &= \varphi_{21}(t), & \varphi_{22}(-t) &= -\varphi_{22}(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Это позволяет потом найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{11}(t), & x_2 &= \psi_{12}(t), \\ x_1 &= \psi_{21}(t), & x_2 &= \psi_{22}(t), \end{aligned}$$

при помощи свойства, согласно которому

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11}(-t) &= \psi_{11}(t), & \psi_{12}(-t) &= -\psi_{12}(t), \\ \psi_{21}(-t) &= -\psi_{21}(t), & \psi_{22}(-t) &= \psi_{22}(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эти решения можно выбрать так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11}(0) &= 1, & \psi_{12}(0) &= 0, \\ \psi_{21}(0) &= 0, & \psi_{22}(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом, коэффициенты  $A_{ij}$  будут равны  $\psi_{ij}(2\pi)$ . Соотношения (9) § 5 примут вид

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t + 2\pi) &= A_{11}\psi_{11}(t) + A_{12}\psi_{21}(t), \\ \psi_{12}(t + 2\pi) &= A_{11}\psi_{12}(t) + A_{12}\psi_{22}(t), \\ \psi_{21}(t + 2\pi) &= A_{21}\psi_{11}(t) + A_{22}\psi_{21}(t), \\ \psi_{22}(t + 2\pi) &= A_{21}\psi_{12}(t) + A_{22}\psi_{22}(t). \end{aligned}$$

Положим в этих уравнениях  $t = -2\pi$ ; тогда из рассмотрения уравнений (3) и (4) получим

$$\begin{aligned} A_{11}\psi_{11}(2\pi) - A_{12}\psi_{21}(2\pi) &= 1, \\ -A_{11}\psi_{12}(2\pi) + A_{12}\psi_{22}(2\pi) &= 0, \end{aligned}$$

и отсюда, так как  $A_{ij} = \psi_{ij}(2\pi)$ ,

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11}(2\pi)\psi_{11}(2\pi) - \psi_{12}(2\pi)\psi_{21}(2\pi) &= 1, \\ \psi_{11}(2\pi) &= \psi_{22}(2\pi). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из (5) для этого случая можно вывести важное свойство характеристических показателей. Уравнение для  $s$  будет

$$\begin{vmatrix} \psi_{11}(2\pi) - s & \psi_{12}(2\pi) \\ \psi_{21}(2\pi) & \psi_{22}(2\pi) - s \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$s^2 - (\psi_{11} + \psi_{22})s + \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21} = 0, \quad (6)$$

или, из рассмотрения уравнения (5),

$$s^2 - 2\psi_{11}(2\pi)s + 1 = 0. \quad (6^*)$$

Положим теперь

$$s = e^{2\alpha\pi i}; \quad (7)$$

тогда  $\alpha$  будет определяться следующим уравнением:

$$\cos 2\alpha\pi = \psi_{11}(2\pi). \quad (8)$$

Эта изящная форма вычисления  $\alpha$  впервые была предложена Калландро для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots)x = 0,$$

которое играет большую роль в астрономических исследованиях и, очевидно, является специальным случаем уравнения (1).

Всякий раз, как  $\psi_{11}(2\pi)$  по абсолютной величине меньше единицы, для  $\alpha$  из (8) получаем действительное значение. Тогда движение, определенное уравнением (1), не будет устойчивым.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (-1 + b \cos t)x \quad (9)$$

представляет собой специальный случай уравнения (1). Положим

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt};$$

тогда вместо (9) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (-1 + b \cos t)x_1, \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

поэтому в данном случае

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= 0, & \varphi_{12} &= 1 \\ \varphi_{21} &= -1 + b \cos t, & \varphi_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, условие (2) для функций  $\varphi$  выполняется, и для определения  $\alpha$  можно использовать формулу (8). Теперь нужно вычислить функцию  $\psi_{11}$  (2л). При помощи функций

$$x_1 = \psi_{11}(t), \quad x_2 = \psi_{12}(t)$$

можно получить интеграл системы (9\*); при этом предполагается, что  $\psi_{11}$  представляет собой четную, а  $\psi_{12}$  — нечетную функцию от  $t$  и, кроме того,

$$\psi_{11}(0) = 1, \quad \psi_{12}(0) = 0.$$

Так как в этом случае

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt},$$

то эти условия выполняются автоматически, если только  $\psi_{11}(t)$  является четной функцией и  $\psi_{11}(0) = 1$ .

Стало быть, достаточно отыскать интеграл уравнения (9), который удовлетворяет этим условиям. Решим задачу при помощи степенных рядов по  $t$ . Для этой цели подставим в (9)

$$x = 1 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^4 + \alpha_3 t^6 + \dots$$

Для коэффициентов будут справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$2(n+2)(2n+1)\alpha_{n+1} = -\alpha_n + b\left[\alpha_n - \frac{\alpha_{n-1}}{2!} + \frac{\alpha_{n-2}}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n!}\alpha_0\right].$$

С точностью до четвертой степени будем иметь

$$x = \psi_{11}(t) = 1 + \frac{1}{2}(-1+b)t^2 + \frac{1}{24}(1-3b+b^2)t^4 + \dots \quad (10)$$

Так как этот ряд непременно сходится, то, конечно, при помощи него всегда можно вычислить  $\psi_{11}$  (2л). Но вычисления будут очень трудоемкими, поэтому эти методы следует рекомендовать только при достаточно больших значениях  $b$ . Этот путь не позволяет также установить, не задавая для  $b$  определенного численного значения, будет ли вычисленное из (8) значение для  $\alpha$  действительным или комплексным? Поэтому на практике необходимо предусмотреть другие методы.

В астрономических приложениях этого уравнения  $b$  является вообще малым числом, и этим обстоятельством можно восполь-

зоваться для вычисления значения  $\alpha$ . Этот путь также представляет интерес, так как он показывает, как можно использовать «разложения по степеням масс» для получения общих интегралов.

Итак, предположим, что интеграл (9) можно разложить по степеням  $b$ , и положим

$$x = X_0 + bX_1 + b^2X_2 + \dots$$

При подстановке этого выражения в (9) исследуемое уравнение распадается на следующие:

$$\frac{d^2X_0}{dt^2} = -X_0,$$

$$\frac{d^2X_1}{dt^2} = -X_1 + X_0 \cos t,$$

$$\frac{d^2X_2}{dt^2} = -X_2 + X_1 \cos t$$

и т. д., и мы должны отыскать решение этого уравнения, которое является четным и при  $t = 0$  равно единице.

Теперь, если предварительно повсюду отбросим произвольный множитель, последовательно получаем

$$X_0 = \cos t,$$

$$X_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2t,$$

$$X_2 = \frac{5}{24} t \sin t + \frac{1}{96} \cos 3t,$$

$$X_3 = -\frac{5}{144} t \sin 2t - \frac{83}{1728} \cos 2t - \frac{1}{2880} \cos 4t,$$

$$X_4 = \frac{5}{1152} t^2 \cos t - \frac{113}{6912} t \sin t + \frac{5}{2304} t \sin 3t + \frac{643}{138240} \cos 3t + \\ + \frac{1}{138240} \cos 5t.$$

Таким образом,

$$x = \psi_{11}(t) = A \left\{ \cos t + b \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2t \right) + \right. \\ \left. + b^2 \left( \frac{5}{24} t \sin t + \frac{1}{96} \cos 3t \right) + \dots \right\}.$$

Далее отсюда следует:

$$\psi_{11}(0) = A \left\{ 1 + \frac{1}{3} b + \frac{1}{96} b^2 - \frac{418}{8640} b^3 + \frac{644}{138240} b^4 + \dots \right\} = 1,$$

$$\psi_{11}(2\pi) = A \left\{ 1 + \frac{1}{3} b + \frac{1}{96} b^2 - \frac{418}{8640} b^3 + \left[ \frac{5}{1152} (2\pi)^2 + \frac{644}{138240} \right] b^4 + \dots \right\}.$$

Принимая во внимание первое уравнение, получим

$$\psi_{11}(2\pi) = 1 + \frac{5}{1152} A (2\pi)^2 b^4 + \dots$$

Так как

$$A = 1 - \frac{1}{3} b + \dots,$$

то имеем

$$\cos 2\alpha\pi = 1 + \frac{5}{1152} (2\pi)^2 b^4 + \dots \quad (14)$$

Итак, в этом случае  $\cos 2\alpha\pi$  будет больше единицы, и следовательно,  $\alpha$  — комплексное.

В астрономических приложениях этого уравнения  $b$  умножается на массу возмущающей планеты, и примечательно, что в этом случае нужно идти до четвертой степени массы, чтобы найти приращение функции  $\psi_{11}(2\pi)$  на единицу.

Если вместо (9) рассматривать уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(n^2 - b \cos t) x, \quad (12)$$

где  $n$  не является каким-либо целым числом, то столь далеко проводить разложения не нужно. Решение, которое соответствует интегралу  $\psi_{11}(t)$ , разложенное по степеням  $b$ , будет

$$x = X_0 + bX_1 + b^2X_2 + \dots,$$

где

$$X_0 = \cos nt,$$

$$X_1 = \frac{\cos(1-n)t}{2[n^2 - (1-n)^2]} + \frac{\cos(1+n)t}{2[n^2 - (1+n)^2]},$$

$$X_2 = \frac{t}{2n} \left[ \frac{1}{4[n^2 - (1-n)^2]} + \frac{1}{4[n^2 - (1+n)^2]} \right] \sin nt + \\ + \frac{\cos(2-n)t}{4[n^2 - (2-n)^2][n^2 - (1-n)^2]} + \frac{\cos(2+n)t}{4[n^2 - (2+n)^2][n^2 - (1+n)^2]}.$$

Учитывая теперь уравнение

$$\psi_{11}(0) = 1,$$

получим, что величина

$$\cos 2\pi\alpha = \psi_{11}(2\pi) = \cos 2\pi\pi + \frac{\pi b^2}{2n(4n^2 - 1)} \sin 2\pi\pi + \dots$$

меньше единицы. Положим далее,

$$\alpha = n(1 - \sigma);$$

тогда будет

$$\sigma = \frac{b^2}{4n^2(4n^2 - 1)}, \quad (13)$$

что соответствует результату Линдштедта, полученному в его известных исследованиях этого дифференциального уравнения [3].

Общий интеграл (12) примет теперь вид [см. (11), § 5]

$$x = C_1 e^{in(1-\sigma)t} \lambda_1(t) + C_2 e^{-in(1-\sigma)t} \lambda_2(t), \quad (14)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  обозначают периодические функции времени. По Линдштедту, этот интеграл можно написать в следующей форме:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mu_i \cos(w + it), \quad (14^*)$$

где

$$w = n(1 - \sigma)t + \pi,$$

а  $\pi$  обозначает постоянную интегрирования.

### § 7. Уравнения движения Лагранжа

Движение системы  $n$  свободных материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , отнесенное к абсолютной системе координат, будет определяться  $3n$  уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Непосредственно эти уравнения для исследований употребляются очень редко. В общем случае необходимо заменить абсолютные координаты  $x_i, y_i, z_i$  другими переменными, например,  $q_1, q_2, \dots, q_{3n}$ , при помощи соотношений, в которые может входить и время. Прямой вывод дифференциальных уравнений для новых переменных  $q_i$  сложен, но эта вычислительная работа значительно упрощается благодаря найденной Лагранжем общей форме уравнений движения.

Итак, предположим, что

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Теперь три уравнения (1) умножим па  $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \frac{\partial y_i}{\partial q_j}$  и  $\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$ , и все

уравнения сложим; тогда будет

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \cdot \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \cdot \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \end{aligned}$$

где  $j$  последовательно принимает значения 1, 2, ...,  $3n$ .

Эти уравнения можно записать в форме

$$\frac{dP_j}{dt} - Q_j = R_j, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} P_j &= \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dz_i}{dt} \right), \\ Q_j &= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \right) + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right], \\ R_j &= \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned}$$

Введем теперь живую силу  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

тогда можно показать, что

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \\ Q_j &= \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

где

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}.$$

Имеем

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n}} \dot{q}_{3n} + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (5)$$

откуда

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (6)$$

Подставим теперь в  $T$  выражения (2) и (5); тогда  $T$  будет функцией  $q_1, q_2, \dots, q_{3n}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3n}$  и  $t$ , и согласно (6) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = P_j. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j} \right).$$

Но из (5)

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_{3n} \partial q_j} \dot{q}_{3n} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \dot{t},$$

а, с другой стороны, по (2)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_{3n}} \dot{q}_{3n} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \dot{t} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Таким образом, согласно (3) имеем уравнения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3n), \quad (7)$$

которые соответствуют найденной Лагранжем форме дифференциальных уравнений движения  $n$  свободных материальных точек.

Если существует «силовая функция»  $U$ , так что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, 3n). \quad (8)$$

Формальное преимущество уравнений движения Лагранжа состоит в том, что необходимо выразить только живую силу  $T$  через новые координаты, которые вводятся вместо абсолютных, чтобы затем простым (частным) дифференцированием получить дифференциальные уравнения в новых переменных.

Дифференциальные уравнения (7) [или (8)] можно разрешить относительно  $\dot{q}_j$  всякий раз, когда  $3n$  уравнений преобразования (2) независимы друг от друга, т. е. когда якобиан от старых координат относительно новых отличен от нуля. Для доказательства положим

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где три члена с правой стороны суть однородные функции от  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3n}$  соответственно второй, первой и нулевой степени.

Если

$$T_2 = \sum \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где  $\alpha_{ij}$  зависят только от  $q_1, q_2, \dots, q_{3n}$  и  $t$ , то

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{i=1}^{3n} \alpha_{ij} \dot{q}_i,$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = 2 \sum \alpha_{ij} \ddot{q}_i + A_j,$$

где через  $A_j$  обозначен член, который не зависит от вторых производных  $\ddot{q}_i$ .

Отсюда видно, что уравнения (7) можно разрешить относительно  $\dot{q}_i$ , если

$$|\alpha_{ij}| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 3n). \quad (9)$$

Но величину этого определителя можно легко найти. Для упрощения записи положим

$$y_1 = x_{n+1}, \quad y_2 = x_{n+2}, \quad \dots, \quad y_n = x_{2n},$$

$$z_1 = x_{2n+1}, \quad z_2 = x_{2n+2}, \quad \dots, \quad z_n = x_{3n},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$  обозначают абсолютные координаты; тогда будем иметь

$$2T_2 = \sum_{k=1}^{3n} m_k \dot{x}_k^2,$$

где

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_{3n}} \dot{q}_{3n}.$$

Отсюда получаем

$$\dot{x}_k^2 = \sum_{i, j=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Стало быть,

$$2\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{3n} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (10)$$

где для симметрии введены обозначения

$$m_{n+1} = m_{2n+1} = m_1; \quad m_{n+2} = m_{2n+2} = m_2$$

и т. д.

Составим теперь определитель

$$|\alpha_{ij}|$$

и подставим вместо  $\alpha_{ij}$  их выражения из (10); тогда при помощи теоремы об умножении определителей найдем, что

$$2^{3n} |\alpha_{ij}| = m_1 m_2 \dots m_{3n} \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|^2 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 3n). \quad (11)$$

Если соотношения между абсолютными координатами  $x_i$  и новыми переменными  $q_i$  независимы, то

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right| \neq 0,$$

а отсюда следует, что выполняется уравнение (9). Что и требовалось доказать.

Применение лагранжевых уравнений рассмотрим на нескольких примерах, которые позже встретятся в приложениях.

Пример 1. Переходим от прямоугольных координат к сферическим.

Полагая

$$x = r \cos \varphi \cos \theta,$$

$$y = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \sin \varphi,$$

так что

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \cos \theta \cdot \dot{\varphi} - r \cos \varphi \sin \theta \cdot \dot{\theta},$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cos \varphi \sin \theta - r \sin \varphi \sin \theta \cdot \dot{\varphi} + r \cos \varphi \cos \theta \cdot \dot{\theta},$$

$$\dot{z} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

получим

$$2T = m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2), \quad (12)$$

и в соответствии с формулами Лагранжа уравнения движения

в сферических координатах будут

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi) &= R_1, \\ m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta} \cos^2 \varphi) &= R_2, \\ m \left[ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\theta}^2 \right] &= R_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

**Пример 2.** Поворот системы координат на постоянный угол. Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sum \alpha^2 &= \sum \beta^2 = \sum \gamma^2 = 1, \\ \sum \beta\gamma &= \sum \gamma\alpha = \sum \alpha\beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Так как  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  суть величины, не зависящие от времени, то

$$\dot{x} = \alpha_1 \dot{\xi} + \alpha_2 \dot{\eta} + \alpha_3 \dot{\zeta}$$

и т. д., и поэтому

$$\sum (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \sum (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2).$$

Форма дифференциальных уравнений в этих переменных остается неизменной.

**Пример 3.** «Идеальные» координаты Ганзена.

Если коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в (14) зависят от времени, то имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_1 \dot{\xi} + \alpha_2 \dot{\eta} + \alpha_3 \dot{\zeta} + \dot{\xi} \alpha_1 + \dot{\eta} \alpha_2 + \dot{\zeta} \alpha_3, \\ \dot{y} &= \beta_1 \dot{\xi} + \beta_2 \dot{\eta} + \beta_3 \dot{\zeta} + \dot{\xi} \beta_1 + \dot{\eta} \beta_2 + \dot{\zeta} \beta_3, \\ \dot{z} &= \gamma_1 \dot{\xi} + \gamma_2 \dot{\eta} + \gamma_3 \dot{\zeta} + \dot{\xi} \gamma_1 + \dot{\eta} \gamma_2 + \dot{\zeta} \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  связаны шестью соотношениями (15); посредством дифференцирования найдем еще шесть соотношений между производными от коэффициентов, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sum \alpha \dot{\alpha} &= \sum \beta \dot{\beta} = \sum \gamma \dot{\gamma} = 0, \\ \sum \beta \dot{\gamma} + \sum \beta \dot{\gamma} &= \sum \dot{\gamma} \alpha + \sum \gamma \dot{\alpha} = \sum \dot{\alpha} \beta + \sum \alpha \dot{\beta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ганзен подчиняет угол поворота условиям

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} \alpha_1 + \dot{\eta} \alpha_2 + \dot{\zeta} \alpha_3 &= 0, \\ \dot{\xi} \beta_1 + \dot{\eta} \beta_2 + \dot{\zeta} \beta_3 &= 0, \\ \dot{\xi} \gamma_1 + \dot{\eta} \gamma_2 + \dot{\zeta} \gamma_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Определенные таким образом координаты он называет идеальными. Теперь будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_1 \dot{\xi} + \alpha_2 \dot{\eta} + \alpha_3 \dot{\zeta}, \\ \dot{y} &= \beta_1 \dot{\xi} + \beta_2 \dot{\eta} + \beta_3 \dot{\zeta}, \\ \dot{z} &= \gamma_1 \dot{\xi} + \gamma_2 \dot{\eta} + \gamma_3 \dot{\zeta}.\end{aligned}$$

Следовательно, выражения для скоростей в идеальных координатах такие же, как и в координатах, отнесенных к неподвижной координатной системе.

Будем иметь

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения в идеальных координатах имеют ту же самую форму, что и в абсолютных координатах.

Для каждого момента времени производные  $\dot{\alpha}$  и т. д. имеют определенные значения. Уравнения (18) в каждый момент определяют прямую линию, которая сохраняет неизменное положение при бесконечно малом повороте. Эта прямая линия совпадает с радиусом-вектором. Фактически она должна проходить через движущееся тело, так как его координаты удовлетворяют уравнениям (18). Эта линия проходит также через начало координат. Следовательно, для идеальных ганзеновских координат движение координатной системы характеризуется вращением последней вокруг радиуса-вектора.

Уравнения (18) могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned}C\eta - B\xi &= 0, \\ A\xi - C\xi &= 0, \\ B\xi - A\eta &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A &= \alpha_2 \dot{\alpha}_3 + \beta_2 \dot{\beta}_3 + \gamma_2 \dot{\gamma}_3, \\ B &= \alpha_3 \dot{\alpha}_1 + \beta_3 \dot{\beta}_1 + \gamma_3 \dot{\gamma}_1, \\ C &= \alpha_1 \dot{\alpha}_2 + \beta_1 \dot{\beta}_2 + \gamma_1 \dot{\gamma}_2.\end{aligned}$$

**Пример 4.** Поворот координатной системы в плоскости на угол, зависящий от времени.

Если поворот происходит в плоскости  $xy$  и угол поворота, зависящий от времени, обозначить через  $v$ , то будем иметь

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos v - \eta \sin v, \\ y &= \xi \sin v + \eta \cos v\end{aligned}$$

и

$$2T = m [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\dot{v}(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta) + \dot{v}^2(\xi^2 + \eta^2)]. \quad (19)$$

Дифференциальные уравнения в новых координатах будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{dv}{dt}\dot{\eta} - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\xi - \frac{d^2v}{dt^2}\eta &= \frac{1}{m}R_1, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt}\dot{\xi} - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\eta + \frac{d^2v}{dt^2}\xi &= \frac{1}{m}R_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Чаще используется координатная система, которая вращается в пространстве с постоянной угловой скоростью. Для такой системы

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= n = \text{const}, \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

и приведенные выше дифференциальные уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} - n^2\xi &= \frac{1}{m}R_1, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} - n^2\eta &= \frac{1}{m}R_2. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если в этой подвижной системе координат введем полярные координаты, так что

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \theta, \\ \eta &= \rho \sin \theta, \end{aligned}$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2, \\ \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta &= \rho^2\dot{\theta}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + 2n\rho^2\dot{\theta} + n^2\rho^2,$$

и далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \rho} &= \dot{\rho}, \\ \frac{\partial T}{\partial \rho} &= \rho\dot{\theta}^2 + 2n\rho\dot{\theta} + n^2\rho = \rho(\dot{\theta} + n)^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \rho^2\dot{\theta} + n\rho^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned}$$

а следовательно, по формулам Лагранжа

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho(\dot{\theta} + n)^2 &= \frac{1}{m} R_1, \\ \frac{d}{dt} [\rho^2(\dot{\theta} + n)] &= \frac{1}{m} R_2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

**Теорема Лиувилля.** Как показал Лиувилль, имеется общий случай, в котором дифференциальные уравнения Лагранжа можно проинтегрировать (точнее говоря, можно привести к квадратурам).

Пусть имеется  $k$  координат  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , и живая сила  $T$  имеет следующую форму:

$$2T = \varphi [A_1(q_1)\dot{q}_1^2 + \dots + A_k(q_k)\dot{q}_k^2], \quad (23)$$

где

$$\varphi = \varphi_1(q_1) + \dots + \varphi_k(q_k). \quad (24)$$

Тогда задачу можно свести к квадратурам, если силовая функция  $U$  такова, что

$$U = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi_1(q_1) + \dots + \psi_k(q_k)}{\varphi_1(q_1) + \dots + \varphi_k(q_k)}. \quad (25)$$

Интегралы будут иметь вид

$$\int \sqrt{\frac{A_1}{F_1}} dq_1 + \beta_1 = \dots = \int \sqrt{\frac{A_k}{F_k}} dq_k + \beta_k, \quad (26)$$

$$\int \sqrt{\frac{A_1}{F_1}} \varphi_1 dq_1 + \dots + \int \sqrt{\frac{A_k}{F_k}} \varphi_k dq_k = \sqrt{2t} + C, \quad (27)$$

где

$$F_i = \psi_i(q_i) + h\varphi_i(q_i) + \alpha_i. \quad (28)$$

Здесь между величинами  $\alpha_i$  имеется соотношение

$$\sum \alpha_i = 0, \quad (29)$$

и, таким образом,  $2k$  постоянных интегрирования суть

$$\begin{aligned} \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, h, \\ \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, C. \end{aligned}$$

Чтобы доказать это, положим

$$\sqrt{A_i(q_i)} dq_i = du_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (30)$$

Если эти уравнения проинтегрированы, а  $q$  выражены через  $u$

и их значения подставлены в  $\varphi$  и  $\psi$ , то можно положить

$$\begin{aligned}\varphi_i(q) &= f_i(u), \\ \psi_i(q) &= g_i(u),\end{aligned}$$

и тогда будем иметь

$$\begin{aligned}2T &= f(\dot{u}_1^2 + \dots + \dot{u}_k^2), \\ U &= \frac{g}{f} = \frac{g_1(u_1) + \dots + g_k(u_k)}{f_1(u_1) + \dots + f_k(u_k)}.\end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа для величин  $u_i$  будут

$$\frac{d}{dt}(f\dot{u}_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u_i} \sum \dot{u}_i^2 = \frac{\partial U}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (31)$$

Если эти уравнения умножить на  $\dot{u}_i$  и сложить, то получим интеграл живых сил

$$T = \frac{1}{2} f(\dot{u}_1^2 + \dots + \dot{u}_k^2) = U + h. \quad (32)$$

Если, далее, (31) умножить на  $2f\dot{u}_i$  и принять во внимание (32), то будем иметь

$$\frac{d(f^2\dot{u}_i^2)}{dt} - 2\dot{u}_i \frac{\partial f}{\partial u_i} (U + h) = 2\dot{u}_i f \frac{\partial U}{\partial u_i}$$

или

$$\frac{d(f^2\dot{u}_i^2)}{dt} = 2\dot{u}_i \frac{\partial f(U + h)}{\partial u_i}$$

или, так как

$$\begin{aligned}fU &= g, \\ \frac{d(f^2\dot{u}_i^2)}{dt} &= 2\dot{u}_i \frac{\partial (g + hf)}{\partial u_i} = 2\dot{u}_i \frac{d(g_i + hf_i)}{du_i}\end{aligned}$$

или

$$\frac{d(f^2\dot{u}_i^2)}{dt} = 2 \frac{d(g_i + hf_i)}{dt}.$$

Следовательно, получаем

$$f^2\dot{u}_i^2 = 2(g_i + hf_i + \alpha_i). \quad (33)$$

Отсюда в результате суммирования имеем

$$\begin{aligned}\sum f^2\dot{u}_i^2 &= 2fT = 2 \sum (g_i + hf_i + \alpha_i) = 2g + 2hf + 2 \sum \alpha_i = \\ &= 2fU + 2hf + 2 \sum \alpha_i = 2f(U + h) + 2 \sum \alpha_i,\end{aligned}$$

т. е. согласно (32)

$$\sum \alpha_i = 0.$$

Теперь, в соответствии с (33),

$$\frac{du_i}{\sqrt{g_i + hf_i + \alpha_i}} = \frac{\sqrt{2} dt}{f}.$$

Наконец, если эти уравнения умножить на  $f_i$  и сложить полученные уравнения, полагая  $i = 1, 2, \dots, k$ , то будем иметь

$$\sum \frac{f_i du_i}{\sqrt{g_i + hf_i + \alpha_i}} = \sqrt{2} dt.$$

Возвратимся в этих уравнениях от  $u_i$  к  $q_i$ , и тогда теорема Лиувилля будет доказана.

Известным примером применения этой теоремы является классическая задача о движении точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами. Так как в одной из следующих глав этой проблеме будет уделено особое внимание, то здесь мы сделаем о ней лишь некоторые вводные замечания. Мы ограничимся при этом рассмотрением движения в плоскости.

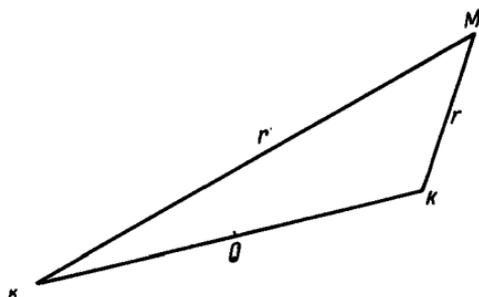


Рис. 1.

Итак, речь идет о движении тела  $M$ , которое притягивается по закону Ньютона двумя неподвижными массами  $K$  к  $K'$ . Эта задача существует с давних пор и

впервые была проинтегрирована Эйлером [4]. Наиболее полно она была рассмотрена Лежандром [5].

Начало координат поместим в середине отрезка  $KK' = 2c$ , а ось  $X$  направим к точке  $K$ . Силовая функция запишется в виде

$$U = \frac{K}{r} + \frac{K'}{r'}, \quad (34)$$

и уравнения движения будут

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (35)$$

Отсюда получаем интеграл живых сил

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = U + h = \frac{K}{r} + \frac{K'}{r'} + \frac{D}{c}, \quad (36)$$

где  $D$  обозначает постоянную интегрирования.

Чтобы свести задачу к квадратурам, Эйлер ввел две переменные  $p$  и  $q$ , таким образом, что

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = pq,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{q}{p},$$

где  $\varphi$  и  $\omega$  обозначают углы, которые  $r$  и  $r'$  образуют с положительным направлением оси  $X$ .

Оказывается более выгодным ввести другие переменные, которые, насколько нам известно, впервые были использованы Якоби. Это — так называемые эллиптические координаты\*). Обозначим эти координаты через  $\lambda$  и  $\mu$ , так что

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(r + r'), \\ \mu &= \frac{1}{2}(r - r'). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

При постоянном значении  $\lambda$  первому уравнению соответствует эллипс, большая полуось которого равна  $\lambda$ , а последнему уравнению при постоянном  $\mu$  соответствует гипербола с действительной полуосью, равной  $\mu$ . Фокусы этих кривых лежат в  $K$  и  $K'$ . Каждому значению  $\lambda$  соответствует определенный эллипс, каждому значению  $\mu$  соответствует определенная гипербола.

Наименьшее значение  $r + r'$  равно  $2c$ . Поэтому всегда  $\lambda \geq c$ . Наибольшее значение  $r - r'$  равно  $2c$ , так что

$$|\mu| \leq c \leq \lambda. \quad (38)$$

Известно, что касательная к гиперболе делит угол между радиусами-векторами  $r$ ,  $r'$  на две равные части; то же самое имеет место для нормали к эллипсу. Отсюда следует, что определенные при помощи (37) эллипсы и гиперболы пересекаются под прямыми углами. Поэтому эллиптические координаты  $\lambda$  и  $\mu$  называют ортогональными.

Так как  $\lambda$  является большой полуосью эллипса, то для малой полуоси имеем выражение  $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$ , а для мнимой полуоси гиперболы будет  $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ , так что уравнения кривых будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

\*) Эйлеровы переменные  $p$  и  $q$  также представляют собой эллиптические координаты. (Прим. перев.)

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} c^2 x^2 &= \lambda^2 \mu^2, \\ c^2 y^2 &= (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

и путем логарифмического дифференцирования находим

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 - c^2} - \frac{\mu d\mu}{c^2 - \mu^2}$$

или

$$cdx = \mu d\lambda + \lambda d\mu,$$

$$c dy = \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}} \lambda d\lambda - \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}} \mu d\mu.$$

Следовательно,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} d\lambda^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} d\mu^2,$$

и, значит,

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \left[ \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2} \right]. \quad (41)$$

Силовая функция выражается через эллиптические координаты в виде

$$U = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [(K + K')\lambda - (K - K')\mu]. \quad (42)$$

Из (41) и (42) непосредственно видно, что  $T$  и  $U$  имеют форму, которая необходима для применения теоремы Лиувилля. Следовательно, интегралы могут быть записаны непосредственно.

В формулах (23) теперь нужно написать

$$\varphi = \lambda^2 - \mu^2, \quad A_1 = \frac{1}{\lambda^2 - c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{c^2 - \mu^2},$$

$$\varphi_1 = \lambda^2, \quad \varphi_2 = -\mu^2,$$

$$\psi_1 = (K + K')\lambda, \quad \psi_2 = -(K - K')\mu.$$

Тогда будет

$$F_1 = (K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha,$$

$$F_2 = -(K - K')\mu - h\mu^2 - \alpha,$$

и, наконец, получаем искомые уравнения

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)[h\lambda^2 + (K + K')\lambda + \alpha]}} - \\ & \quad - \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)[h\mu^2 + (K - K')\mu + \alpha]}} = 0, \\ & \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)[h\lambda^2 + (K + K')\lambda + \alpha]}} - \\ & \quad - \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)[h\mu^2 + (K - K')\mu + \alpha]}} = \sqrt{2} dt. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

В следующей главе мы выполним интегрирование этих уравнений. При этом покажем, что  $\lambda$  и  $\mu$  могут быть представлены как четырехпериодические функции двух аргументов.

Другой пример теоремы Лиувилля доставляет задача двух тел на плоскости. В этом случае [формула (12)]:

$$T = \frac{1}{2} r^2 \left( \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 \right), \quad U = \frac{K}{r} = \frac{1}{r^2} \cdot Kr.$$

В формуле (23) и т. д. нужно положить

$$\begin{aligned} \varphi &= r^2, & \varphi_1 &= r^2, & \varphi_2 &= 0, \\ \psi &= Kr, & \psi_1 &= Kr, & \psi_2 &= 0, \\ & & A_1 &= \frac{1}{r^2}, & A_2 &= 1. \end{aligned}$$

Формулы (26) и (27) дают в этом случае

$$\frac{dr}{r \sqrt{hr^2 + Kr + \alpha}} = \frac{d\theta}{\sqrt{-\alpha}}, \quad \frac{r dr}{\sqrt{hr^2 + Kr + \alpha}} = \sqrt{2} dt.$$

## § 8. Канонические уравнения движения

В лагранжевых уравнениях

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

вместо  $\dot{q}_i$  введем новые переменные  $p_i$ , такие, что

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (2)$$

Новые зависимые переменные  $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$  называются каноническими переменными. Они в формальном отношении определяются очень простой системой дифференциальных уравнений, которую можно найти следующим образом.

Вместо (1) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial q_i} + R_i, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \dot{q}_i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если из (2)  $q$  найдены как функции  $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$ , а также, возможно, и  $t$ , что всегда выполнимо, ибо определитель коэффициентов при  $\dot{q}_i$  в правых частях (2) отличен от нуля, то правые части (3) переходят в функции от  $p$  и  $q$  и, возможно,  $t$ .

Это исключение, кажущееся сложным, упрощается введением функции

$$K = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots + p_k \dot{q}_k - T. \quad (4)$$

При этом мы предполагаем, что в правой части этого выражения  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$  исключены при помощи уравнений (2) и выражены через  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , так что  $K$  будет функцией  $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$  (и  $t$ ).

Из выражения для  $K$  теперь следует:

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_i + p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} + \dots + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} - \dots - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i}$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + \dots + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} - \dots - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i};$$

таким образом, согласно (2)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial K}{\partial q_i},$$

и, следовательно, вместо (3) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial K}{\partial q_i} + R_i, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_i} \\ (i = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для функции  $K$  можно вывести простое выражение. Именно, если мы, как и в предыдущем параграфе, отделим друг от друга члены в  $T$  соответственно второго, первого и нулевого порядков и положим

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

то будет

$$K = T_2 - T_0. \quad (6)$$

Действительно, в соответствии с (4) имеем

$$K = \sum p_i \dot{q}_i - T = \sum \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - T_2 - T_1 - T_0,$$

где  $T_2$  и  $T_1$  — однородные функции  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$  второго и первого порядка соответственно. Тогда по теореме Эйлера имеем

$$2T_2 = \sum \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

$$T_1 = \sum \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

что и доказывает справедливость уравнения (6).

Если существует силовая функция, то канонические дифференциальные уравнения принимают особенно простой вид. Положим

$$H = T_2 - T_0 - U, \quad (7)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

При этом нужно помнить, что в  $T_2$  нужно  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$  заменить при помощи уравнений (2) через  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .

Выбор канонических координат можно выполнять бесконечно многими способами. Действительно, можно заменять абсолютные координаты совершенно произвольными независимыми системами координат  $q_i$ . Всегда можно при помощи уравнений (2) найти соответствующие  $p_i$ .

**Пример 1.** Определение прямоугольных абсолютных координат каноническими дифференциальными уравнениями.

Теперь в формулы (1) § 7 нужно подставить

$$q_1 = x_1, \dots, q_n = x_n,$$

$$q_{n+1} = y_1, \dots, q_{2n} = y_n,$$

$$q_{2n+1} = z_1, \dots, q_{3n} = z_n,$$

и, следовательно,

$$2T = 2T_2 = \sum m_i \dot{q}_i^2,$$

если положить  $m_{n+1} = m_1$  и т. д.,  $m_{2n+1} = m_1$  и т. д. Стало быть, согласно (2)

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i,$$

и поэтому

$$2T = \sum \frac{p_i^2}{m_i},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$H = T - U,$$

и где, по нашему предположению, существует силовая функция.

**Пример 2.** Движение тела отнесено к осям, которые вращаются с постоянной скоростью вокруг начала координат.

Согласно (19) § 7 живая сила имеет следующий вид:

$$2T = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + n^2(\xi^2 + \eta^2),$$

где масса положена равной единице.

Таким образом,

$$2T_2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2, \quad 2T_0 = n^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Теперь положим

$$q_1 = \xi, \quad q_2 = \eta,$$

тогда согласно (2) получаем уравнения

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{\xi} - n\eta = \dot{q}_1 - nq_2,$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \dot{\eta} + n\xi = \dot{q}_2 + nq_1,$$

которые, будучи разрешенными относительно  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$ , дают

$$\dot{q}_1 = p_1 + nq_2,$$

$$\dot{q}_2 = p_2 - nq_1.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 2T_2 &= (p_1 + nq_2)^2 + (p_2 - nq_1)^2, \\ 2T_1 &= 2n(q_1p_2 - q_2p_1) - 2n^2(q_1^2 + q_2^2), \\ 2T_0 &= n^2(q_1^2 + q_2^2), \end{aligned}$$

и, следовательно, если существует силовая функция  $U$ ,

$$H = T_2 - T_0 - U$$

или

$$H = \frac{1}{2} [(p_1 + nq_2)^2 + (p_2 - nq_1)^2 - n^2(q_1^2 + q_2^2)] - U, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ (i &= 1, 2). \end{aligned} \right\}$$

Если умножить уравнения (8) соответственно на  $-\dot{q}_i$  и  $\dot{p}_i$  и все уравнения для  $i = 1, 2, \dots, k$  сложить, то получим уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k = 0,$$

которое можно записать проще:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

если под  $\frac{\partial H}{\partial t}$  понимать производную от  $H$  по  $t$ , явно входящему в  $H$ . Если  $H$  не зависит явно от времени  $t$ , то

$$H = C, \quad (12)$$

где  $C$  обозначает постоянную. Этот интеграл не обязательно совпадает с интегралом живых сил. Последний записывается так:

$$T = U + C_1,$$

т. е.

$$T_2 + T_1 + T_0 = U + C_1, \quad (13)$$

в то время как из (12)

$$T_2 - T_0 = U + C.$$

Если существуют оба эти интеграла, то из этих уравнений следует, что

$$T_1 + 2T_0 = C_1 - C. \quad (14)$$

Во втором из рассмотренных примеров при определенных условиях существует интеграл живых сил, а также интеграл  $H = C$ . Следовательно, согласно (14)

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = \text{const}$$

также должен быть интегралом дифференциальных уравнений. Этот интеграл совпадает с интегралом площадей.

Если  $T$  содержит только члены второй степени относительно  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$ , то имеем

$$H = T - U.$$

В этом случае можно легко найти выражения для коэффициентов при  $p_i p_j$  в  $T$ .

Пусть

$$2T = \sum \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j;$$

тогда согласно (2) получим уравнения

$$p_1 = \alpha_{11} \dot{q}_1 + \dots + \alpha_{1k} \dot{q}_k,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_k = \alpha_{k1} \dot{q}_1 + \dots + \alpha_{kk} \dot{q}_k,$$

которые, будучи разрешенными относительно  $\dot{q}$ , дают

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{q}_1 &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{j1}} p_j, \\ \dots \dots \dots \\ \Delta \dot{q}_k &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{jk}} p_j, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\Delta = |\alpha_{ij}|.$$

Но теперь, так как  $T$  является однородной функцией второй степени относительно  $\dot{q}_i$ ,

$$2T = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum p_i \dot{q}_i$$

и, значит, по (15)

$$2T = \sum_{i, j=1}^k \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ij}} p_i p_j.$$

### § 9. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби \*)

Каноническая форма дифференциальных уравнений движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ (i &= 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$H = T_2 - T_0 - U, \quad (2)$$

непосредственно не приближает нас к решению проблемы. Рассмотрение этих уравнений привело к важному шагу вперед благодаря теореме, установленной Раулем Гамильтоном и Якоби.

Пусть  $H$  является в общем случае функцией от  $t, q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$ . Заменяем в этой функции все величины  $p_i$  частными производными некоторой функции  $V$ , так что

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (3)$$

и рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка второй степени:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left( t, q_1, q_2, \dots, q_k; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (4)$$

Предположим, что найден интеграл  $V(t, q_1, \dots, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , который содержит  $k$  независимых постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Тогда общий интеграл системы (1) задается следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} &= \beta_1, & p_1 &= \frac{\partial V}{\partial q_1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} &= \beta_k, & p_k &= \frac{\partial V}{\partial q_k}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  обозначают новые произвольные постоянные. Уравнения для  $p_i$  иногда называют промежуточными интегралами.

**З а м е ч а н и е.** Постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  в  $V$  будут называться независимыми постоянными, если гессиан от  $V$  относительно

\*) Это уравнение называют также уравнением Гамильтона — Остроградского. (Прим. перев.)

$q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  отличен от нуля:

$$E = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_k} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Если выполняется (6), то интеграл  $V$  обладает таким свойством, что координаты  $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$  могут принимать произвольные начальные значения. Действительно, если  $p_1^0, p_2^0, \dots, p_k^0, q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0$  — значения координат для  $t=t_0$ , то по (5)

$$p_1^0 = \frac{\partial}{\partial q_1^0} [V(t_0, q_1^0, \dots, q_k^0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)],$$

$$\dots$$

$$p_k^0 = \frac{\partial}{\partial q_k^0} [V(t_0, q_1^0, \dots, q_k^0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)].$$

Якобианом этих уравнений относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  именно и является определитель  $E$ , и так как мы предположили, что он отличен от нуля, то указанные выше уравнения можно разрешить относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Затем из уравнений (5) определяются соответствующие значения для  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ . При некоторых значениях  $p_1^0, p_2^0, \dots, p_k^0, q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0$  определитель  $E$  может обращаться в нуль, причем уравнения (5) представляют общий интеграл. Эти специальные значения являются особыми точками соответствующих дифференциальных уравнений.

Если определенные при помощи (5) значения  $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$  формально удовлетворяют уравнениям (1), то мы знаем, что они образуют общий интеграл. Из (5) посредством дифференцирования получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_1} \frac{dq_k}{dt}, \\ \dots & \\ \frac{dp_k}{dt} &= \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_k^2} \frac{dq_k}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Вместо того, чтобы решать эти уравнения относительно  $\frac{dq_i}{dt}$  и  $\frac{dp_i}{dt}$

и проверять решение по (1), проще подставить уравнения (1) в (7) и (8) и показать, что эти равенства выполняются тождественно.

Подставим теперь выражения (1) для  $\frac{dq_i}{dt}$  в (7), тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Но эти равенства являются тождествами. Так как именно  $V(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  тождественно удовлетворяет уравнению в частных производных (4), то результат, который получится, если продифференцировать (4) только по одной из величин  $q_2, \dots, q_k$  или  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , также должен быть тождественно равным нулю. Но если продифференцировать (4) по  $\alpha_i$ , то получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_k}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_1} = 0,$$

которое будет, очевидно, тождественно с (9), если принять во внимание (5).

Если одновременно с этим продифференцировать (4) по  $q_i$ , получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \dots + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_k}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_1} = 0$$

и т. д., в то время как из (8) и (1)

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

и т. д., и эти уравнения эквивалентны, так как

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Таким образом, мы доказали, что (1), (7) и (8) совместимы друг с другом, поэтому они должны быть также тождественными, так как уравнения (7) можно разрешить относительно  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$ , ибо  $E \neq 0$  и, следовательно, (7) и (8) дают вполне определенные значения для  $\dot{p}_i$  и  $\dot{q}_i$ , а так как никакие другие функции не могут удовлетворять этим уравнениям, то они должны совпадать с (1), что и следовало доказать.

Если  $H$  не зависит явно от времени, то уравнение в частных производных (4) можно упростить. Подставим в уравнение (4)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

функцию

$$V = -ht + W(q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_2, \dots, \alpha_k); \quad (10)$$

тогда будет

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h,$$

и вместо (4) получим уравнение Гамильтона — Якоби в форме

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h, \quad (11)$$

в которой оно обычно записывается.

Так как

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h} = \beta,$$

то согласно (5) решение (11) записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t + \beta, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} &= \beta_k, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, \\ \frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial W}{\partial q_k} &= p_k. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

**Пример 1.** Притяжение тела двумя неподвижными центрами.

Возьмем в качестве лагранжевых координат абсолютные координаты  $x, y, z$  так, что

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z;$$

тогда будет

$$2T = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2$$

и поэтому

$$p_1 = \dot{q}_1, \quad p_2 = \dot{q}_2, \quad p_3 = \dot{q}_3.$$

Силовая функция имеет вид

$$U = \frac{K}{\sqrt{(c - q_1)^2 + q_2^2}} + \frac{K'}{\sqrt{(c + q_1)^2 + q_2^2}}$$

и, следовательно,

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U.$$

Так как время явно в  $H$  не входит, то уравнение Гамильтона—Якоби будет

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_3} \right)^2 \right] = \frac{K}{\sqrt{(c - q_1)^2 + q_2^2}} + \frac{K'}{\sqrt{(c + q_1)^2 + q_2^2}} + h.$$

Нужно отыскать интеграл  $W$  этого уравнения, который, кроме  $h$ , содержит две независимые произвольные постоянные.

Интегрирование этого уравнения, очевидно, вряд ли бы удалось, если бы в качестве лагранжевых координат были сохранены абсолютные координаты. Введем вместо них эллиптические координаты (37) § 7, так что

$$q_1 = \lambda, \quad q_2 = \mu;$$

тогда

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (q_1^2 - q_2^2) \left[ \frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - c^2} + \frac{\dot{q}_2^2}{c^2 - q_2^2} \right].$$

Следовательно, по (2) § 8

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2} \dot{q}_1,$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{c^2 - q_2^2} \dot{q}_2,$$

и отсюда

$$2T = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2} [(q_1^2 - c^2) p_1^2 + (c^2 - q_2^2) p_2^2]. \quad (13^*)$$

Силовая функция будет

$$U = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2} [(K + K') q_1 - (K - K') q_2], \quad (14)$$

и, таким образом,

$$H = T - U,$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{q_1^2 - q_2^2} \left[ \frac{1}{2} (q_1^2 - c^2) \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \frac{1}{2} (c^2 - q_2^2) \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 - \right. \\ \left. - (K + K') q_1 + (K - K') q_2 \right] = h$$

будет таким, что его можно непосредственно свести к квадратуре.

**Пример 2.** Проблема двух тел.

Дифференциальные уравнения движения в относительных координатах имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (15)$$

где

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (16)$$

Хотя здесь речь идет об относительных координатах, все же приведенные выше рассуждения можно использовать непосредственно, так как эти уравнения имеют именно ту самую форму, которая необходима для применения лагранжевых и гамильтоновых уравнений.

Таким образом, можно положить

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (17)$$

Выберем  $x, y, z$  в качестве лагранжевых координат; тогда согласно (2) § 8  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  будут соответствующими импульсами, и уравнение Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{r} + h.$$

Здесь прямоугольные координаты также непригодны для интегрирования. Наоборот, полярные координаты здесь лучше. Тогда согласно (12) § 7 имеем выражение для  $T$ :

$$2T = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi.$$

Итак, положим

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta;$$

тогда получим

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r},$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi},$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \cos^2 \varphi.$$

Дифференциальные уравнения для этих координат в канонической форме будут

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu}{r}.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби для задачи двух тел примет вид

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = h. \quad (18)$$

Интегрирование этого уравнения мы выполним в одной из следующих глав.

**Пример 3.** Пусть движение тела отнесено к подвижным осям, и пусть  $U$  — функция координат тела относительно этих подвижных осей. Тогда имеем

$$U = U(\xi, \eta)$$

и по (19) § 7

$$2T = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\dot{v}(\dot{\xi}\dot{\eta} - \dot{\xi}\dot{\eta}) + v^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Если  $\xi$  и  $\eta$  принять в качестве лагранжевых координат, то соответствующими  $p_i$  будут

$$p_1 = \dot{\xi} - v\dot{\eta}, \quad p_2 = \dot{\eta} + v\dot{\xi}$$

и

$$H = T_2 - T_0 - U = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{1}{2}v^2(\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{2}[(p_1 + v\dot{\eta})^2 + (p_2 - v\dot{\xi})^2] - \frac{1}{2}v^2(\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta);$$

теперь согласно (4) искомое дифференциальное уравнение примет

вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} + \dot{v}\eta \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} - \dot{v}\xi \right)^2 - \frac{1}{2} \dot{v}^2 (\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta) = 0.$$

Если  $V(\xi, \eta, \alpha_1, \alpha_2)$  является функцией двух независимых величин,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которая удовлетворяет этому уравнению, тогда  $\xi$  и  $\eta$  определяются при помощи (5) и (6).

### § 10. Вариация постоянных в задачах механики

Пусть необходимо решить каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Разобьем характеристическую функцию  $H$  произвольным образом на две части,  $H_0$  и  $H_1$ , так что

$$H = H_0 + H_1, \quad (2)$$

и предположим, что найдено решение дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

либо благодаря применению уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0, \quad (4)$$

либо каким-нибудь другим методом, так что решение (3) будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \\ p_i &= p_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

причем  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  являются независимыми постоянными интегрирования. Затем можно поставить задачу проинтегрировать уравнения (1), используя в качестве переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  вместо  $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ . Эта задача именуется проблемой вариации произвольных постоянных.

Будучи сначала поставлена Эйлером, эта проблема в наиболее общей постановке была развита Лагранжем. Один из наиболее значительных результатов в небесной механике этого великого ученого заключен в его исследованиях по теории возмущений.

Таким образом, задача заключается в составлении дифференциальных уравнений для  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . Теперь следует заметить, что

если через  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  обозначены постоянные, возникшие при интегрировании дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби (4) по формулам (5) предыдущего параграфа, то получаем

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

На этом основании  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  называются каноническими постоянными интегрирования.

**Доказательство.** Из (5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \frac{d\alpha_r}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \frac{d\beta_r}{dt} \right), \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= \dot{p}_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \frac{d\alpha_r}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \frac{d\beta_r}{dt} \right). \end{aligned}$$

Если теперь при интегрировании (3) получили бы  $q_i$  и  $p_i$  в форме (5), то

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

так что приведенные выше уравнения запишутся в таком виде:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dt} + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_n} \frac{d\alpha_n}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_1} \frac{d\beta_1}{dt} + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_n} \frac{d\beta_n}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_n} \frac{d\alpha_n}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} \frac{d\beta_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_n} \frac{d\beta_n}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}. \quad (8)$$

Положим здесь  $i = 1, 2, \dots, n$ ; тогда получим  $2n$  уравнений, которые можно разрешить относительно  $\dot{\alpha}_i$  и  $\dot{\beta}_i$ , так как определитель из коэффициентов отличен от нуля, ибо мы предполагали, что  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  суть независимые постоянные. Эти вычисления выполняются следующим образом.

Умножим первое из приведенных выше уравнений на  $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}$ , а последнее на  $-\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}$ , и сложим все полученные таким образом уравнения последовательно, полагая  $i = 1, 2, \dots, n$ . При этом воспользуемся следующим обозначением:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial q_i}{\partial a} \frac{\partial p_i}{\partial b} - \frac{\partial q_i}{\partial b} \frac{\partial p_i}{\partial a} \right), \quad (9)$$

что можно также записать в следующей форме:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( q_i \frac{\partial p_i}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial b} \left( q_i \frac{\partial p_i}{\partial a} \right) \right] \quad (9^*)$$

ИЛИ

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial b} \left( p_i \frac{\partial q_i}{\partial a} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left( p_i \frac{\partial q_i}{\partial b} \right) \right]. \quad (9^{**})$$

Итак, мы получим

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i, \alpha_r) \frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_{i=1}^n (\beta_i, \alpha_r) \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_r) \frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_{i=1}^n (\beta_i, \beta_r) \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r}. \quad (11)$$

Уравнение (11) получается, если (7) и (8) умножаются соответственно на  $\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}$  и  $-\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}$  и результаты для всевозможных  $i$  складываются.

Выражения  $(a, b)$  впервые были введены Лагранжем и часто называются скобками Лагранжа. Они обладают различными интересными свойствами, из которых здесь приведем только два, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (b, a) &= -(a, b), \\ (a, a) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

которые непосредственно следуют из определения.

Формулы (10) и (11) имеют место для любой системы постоянных интегрирования. Эти уравнения становятся особенно простыми в том случае, если  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  являются каноническими постоянными. Если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  появляются в результате интегрирования уравнения (4), и, следовательно,  $V(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$  будет функцией от  $n$  независимых постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которая удовлетворяет уравнению (4), то

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i. \quad (13)$$

Но согласно (9<sup>\*\*</sup>)

$$(\alpha_r, \beta_s) = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s};$$

тогда по (13)

$$(\alpha_r, \beta_s) = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s}.$$

Между тем имеем

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_r} = \left( \frac{\partial V}{\partial \alpha_r} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} = \beta_r + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s},$$

и, значит,

$$(\alpha_r, \beta_s) = -\frac{\partial \beta_r}{\partial \beta_s} = \begin{cases} 0 & \text{для } r \neq s, \\ -1 & \text{для } r = s. \end{cases} \quad (14)$$

Тем же самым путем получим

$$(\alpha_r, \alpha_s) = (\beta_r, \beta_s) = 0. \quad (14^*)$$

Из (14) и (14\*) теперь следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta_r}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r}, \\ \frac{d\alpha_r}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_r} \\ (r &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Тогда имеет место следующая важная теорема:

Пусть уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

интегрируются при помощи дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0$$

и

$$q_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

$$p_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$$

обозначают полученные таким образом решения, где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  являются каноническими постоянными интегрирования. Если  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  рассматривать как переменные величины, то в уравнениях

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

можно заменить  $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$  через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  при помощи подстановки

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n), \\ p_i &= p_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n); \end{aligned}$$

тогда для новых переменных  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  получаются дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta_i}{dt} &= \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \alpha_i}, \\ \frac{d\alpha_i}{dt} &= - \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \beta_i} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Канонические постоянные определяются уравнениями (13). Из этой интересной теоремы видно бесспорное преимущество канонической формы уравнений в механике перед другими формами уравнений.

**О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ.  
УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ**

**§ 1. Интегрирование дифференциального уравнения  
Гамильтона — Якоби разделением переменных.  
Теорема Штеккеля**

Если время не входит явно в характеристическую функцию  $H$ , то дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби согласно формуле (11) § 9 гл. I принимает вид

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h. \quad (1)$$

Здесь  $H$  — функция второй степени относительно частных производных от  $W$ .

Теперь можно поставить задачу: когда возможно проинтегрировать это уравнение путем разделения переменных, т. е. когда можно проинтегрировать уравнение (1) таким образом, чтобы  $W$  приняло следующую форму:

$$W = \sum_{i=1}^n W^{(i)}(q_i), \quad (2)$$

где каждый член правой части  $W^{(i)}(q_i)$  зависит только от одной из переменных.

Решение этой задачи в общем случае представляется связанным с немалыми трудностями, по крайней мере, когда речь идет о том, чтобы отыскать как необходимые, так и достаточные условия для решения. Тем не менее, П. Штеккелю удалось решить эту проблему для достаточно общего случая. Это случай, когда в (1), кроме переменных  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , входят только квадраты  $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}$ . Тогда можно найти для решения не только упомянутые условия, но также и полностью рассмотреть движение.

Итак, предположим, что (1) имеет следующую форму:

$${}^i H = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^n A_x \left( \frac{\partial W}{\partial q_x} \right)^2 - (U + \alpha_1) = 0, \quad (3)$$

где  $U$  обозначает силовую функцию, а  $\alpha_1$  — постоянную. Рассмотрим задачу: как должны зависеть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и  $U$  от  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , чтобы полный интеграл (3) имел форму (2)?

Положим

$$W_x = \frac{\partial W}{\partial q_x}; \quad (3^*)$$

тогда

$$\sum A_x W_x^2 = 2(U + \alpha_1). \quad (3^{**})$$

Если  $W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  является полным интегралом этого уравнения, то при подстановке этой функции в (3\*\*) это уравнение должно обращаться в тождество, которое будет удовлетворяться при произвольных значениях постоянных интегрирования  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Это уравнение можно последовательно продифференцировать по каждой из величин  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и таким образом получатся  $n$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_1} + A_2 \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_1} + \dots + A_n \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_1} &= 2, \\ A_1 \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_2} + A_2 \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_2} + \dots + A_n \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \dots & \\ A_1 \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_n} + A_2 \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_n} + \dots + A_n \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как, по сделанному несколько выше предположению, функция  $W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  является полным интегралом (1), то согласно § 9 предыдущей главы гессиан должен быть отличен от нуля, т. е. имеем

$$E = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_n} & \dots & \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \alpha_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Если рассмотреть теперь определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_n} & \dots & \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

то найдем, что

$$\Delta = 2^n W_1 W_2 \dots W_n E \quad (7)$$

и так как  $E$  не равно тождественно нулю, то это имеет место также и для  $\Delta$ .

Но если это так, то (4) можно разрешить относительно величин  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , и тогда согласно (9) § 1 гл. I получим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_1}}, \\ A_2 &= \frac{2}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_1}}, \\ \dots \dots \dots \\ A_n &= \frac{2}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В силу (3\*\*) имеем также

$$U = -\alpha_1 + \sum_{x=1}^n W_x^2 \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1}}. \quad (9)$$

Так как согласно (2) § 1 гл. I

$$\Delta = \sum_{x=1}^n \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1}},$$

то вместо (9) можно записать

$$U = \sum_{x=1}^n \left( W_x^2 - \alpha_1 \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1} \right) \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1}}. \quad (9^*)$$

Формулы (8) и (9\*) справедливы всегда. Мы не делали здесь никаких других предположений относительно функции  $W$ , кроме того, что это полный интеграл (1). Подчиним теперь  $W$  условию, что переменные в  $W$  разделяются, так что  $W$  имеет форму (2). Ниже мы установим следствие из формул (8) и (9\*).

Во-первых, из (3\*) следует, что  $W_x$  является функцией только  $q_x$ . Далее, так как мы нашли, что  $\Delta$  не равно тождественно нулю, то всегда имеются значения постоянных интегрирования  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , для которых  $\Delta$  отлично от нуля. Пусть  $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0$  являются такой системой значений. Для этих

значений  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  функции  $\frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha}$  перейдут в определенные функции от  $q_x$ . Положив

$$\Phi_{x\nu}(q_x) = \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_\nu} \quad (x, \nu = 1, 2, \dots, n),$$

имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(q_1) \dots \Phi_{n1}(q_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_{1n}(q_1) \dots \Phi_{nn}(q_n) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Для указанных значений  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  выражения

$$W_x^2 - \alpha_1 \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1} \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

также перейдут в определенные функции от  $q_x$ . Положим

$$\Psi_x(q_x) = W_x^2 - \alpha_1 \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_1};$$

тогда приходим к теореме Штеккеля:

Если уравнение Гамильтона — Якоби

$$H = \sum_{x=1}^n A_x \left( \frac{\partial W}{\partial q_x} \right)^2 - 2(U + \alpha_1) = 0 \quad (11)$$

допускает разделение переменных, то необходимо имеется система  $n^2$  функций

$$\Phi_{x\nu}(q_x) \quad (x, \nu = 1, 2, \dots, n),$$

и система  $n$  функций

$$\Psi_1(q_1), \Psi_2(q_2), \dots, \Psi_n(q_n),$$

обладающих свойством, что коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , и силовая функция  $U$  могут быть представлены при помощи уравнений

$$A_x = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \Phi_{x1}} \quad (x = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

$$U = \sum_{x=1}^n \Psi_x \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \Phi_{x1}}. \quad (13)$$

Здесь  $\Delta$  определяется формулой (10).

[В выражениях (8) для  $A_x$  содержится коэффициент 2. Его часто отбрасывают, при этом только нужно изменить соответствующим образом произвольные функции  $\psi_x$ .]

Эти условия необходимы. Хотя выбор функций  $\varphi_{x\nu}$  и  $\psi_x$  может быть произвольным, это непосредственно не очевидно. Но на самом деле это так. По-видимому, наиболее прямой путь состоял бы в доказательстве того, что уравнение (11), коэффициенты которого заданы при помощи (12) и (13), всегда может быть решено разделением переменных. Это как раз и показал Штеккель.

Решение указанного уравнения имеет следующий вид:

$$W = \sum_{x=1}^n \int \sqrt{2\psi_x(q_x) + \sum_{\lambda=1}^n 2\alpha_{\lambda} \varphi_{x\lambda}(q_x)} dq_x. \quad (14)$$

Отсюда следует:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_x}\right)^2 = 2\psi_x(q_x) + \sum_{\lambda=1}^n 2\alpha_{\lambda} \varphi_{x\lambda}(q_x). \quad (15)$$

Подставим в (11) вместо  $A$  и  $U$  выражения (12) и (13) и примем во внимание соотношение

$$\sum_{x=1}^n \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x1}} \varphi_{x1} = 1;$$

тогда получим

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{x=1}^n \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x1}} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial q_x}\right)^2 - 2\psi_x - 2\alpha_{x1} \varphi_{x1} \right] = 0. \quad (16)$$

Но (15) удовлетворяет этому уравнению. Подставим это выражение для  $\frac{\partial W}{\partial q}$ ; тогда вместо (16) получим

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{x=1}^n \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x1}} \sum_{\lambda=2}^n 2\alpha_{\lambda} \varphi_{x\lambda}(q_x) \right\} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda=2}^n \left\{ 2\alpha_{\lambda} \sum_{x=1}^n \varphi_{x\lambda} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x1}} \right\}.$$

Но теперь согласно (2) § 1 гл. I

$$\sum_{x=1}^n \varphi_{x\lambda} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x1}} = \begin{cases} \Delta & \text{для } \lambda = 1 \\ 0 & \text{для } \lambda \neq 1 \end{cases},$$

так что коэффициенты при  $\alpha_{\lambda}$  тождественно равны нулю.

Следовательно, дифференциальное уравнение в частных производных (11) будет удовлетворяться функцией (14). Это уравнение содержит также необходимое число постоянных

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , и они не зависят друг от друга. Действительно, из (15) следует, что

$$\frac{\partial W_x^2}{\partial x_v} = 2\varphi_{xv}$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_v} \right| = 2^n |\varphi_{xv}| \quad (x, v = 1, 2, \dots, n).$$

Но, с другой стороны,

$$\left| \frac{\partial W_x^2}{\partial \alpha_v} \right| = 2^n W_1 W_2 \dots W_n \left| \frac{\partial W_x}{\partial \alpha_v} \right| = 2^n W_1 W_2 \dots W_n \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_x \partial \alpha_v} \right|.$$

Так как предполагалось, что  $|\varphi_{xv}|$  не равен тождественно нулю, то не должен быть равным нулю также  $\left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_x \partial \alpha_v} \right|$  и, таким образом, постоянные интегрирования взаимно независимы.

Дифференциальное уравнение в частных производных

$$H = 0$$

соответствует системе канонических дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

в которых, если имеет место разделение переменных,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^n A_x p_x^2 - U, \quad (18)$$

а  $A_x$  и  $U$  задаются соотношениями (12) и (13). Согласно (12) § 9 гл. I решение (17) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1 = \sum_{x=1}^n \int \frac{\varphi_{x1}(q_x) dq_x}{\sqrt{2\psi_x(q_x) + 2 \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda \varphi_{x\lambda}(q_x)}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu = \sum_{x=1}^n \int \frac{\varphi_{x\mu}(q_x) dq_x}{\sqrt{2\psi_x(q_x) + 2 \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda \varphi_{x\lambda}(q_x)}} \quad (\mu = 2, 3, \dots, n). \quad (19^*)$$

Итак, уравнения (19) и (19\*) дают общее решение канонических дифференциальных уравнений (17) при сделанных нами предположениях.

Если резюмировать результаты, то они выразятся следующим образом:

Если даны  $n(n+1)$  функций каждой из переменных

$$\varphi_{\kappa\nu}(q_\kappa) \quad (\kappa, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\psi_\kappa(q_\kappa) \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n),$$

обладающих свойством, что

$$\Delta = |\varphi_{\kappa\nu}| \quad (\kappa, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

не равен тождественно нулю, но в остальном выбранных произвольно, если, далее, предположим, что  $n+1$  функций  $A_1, \dots, A_n$  и  $U$  определяются так, что

$$A_\kappa = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\kappa 1}},$$

$$U = \sum_{\kappa=1}^n \psi_\kappa \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\kappa 1}},$$

то решение канонических дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$H = \frac{1}{2} \sum A_\kappa p_\kappa^2 - U,$$

выражается уравнениями (19) и (19\*).

**З а м е ч а н и е.** Если бы миноры  $\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\kappa 1}}$  были тождественно равны нулю, то соответствующий коэффициент  $A$  обращался бы в нуль. Но тогда из дифференциальных уравнений следует, что соответствующее выражение для  $q_\kappa$  постоянно, так что порядок системы дифференциальных уравнений можно будет понизить на единицу. Мы предполагали, что это понижение порядка уже выполнено, так что ни один из коэффициентов  $A_\kappa$  не обращается в нуль.

Движение, определенное уравнениями (19) и (19\*), можно изучить полностью с помощью этих уравнений. Но прежде чем переходить к обсуждению случая с произвольным числом переменных, рассмотрим простейший пример, а именно случай, когда имеется единственная переменная  $q$ .

## § 2. Движения с одной степенью свободы. Либрация и предельное движение

О движении, которое определяется каноническими дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n),$$

говорят, что оно обладает  $n$  степенями свободы. Если степень свободы только одна, то имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$H = \frac{1}{2} A(q) p^2 - U(q). \quad (1^*)$$

Соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби выражается здесь просто:

$$A(q) \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = 2(U + \alpha),$$

и, таким образом, имеем

$$W = \int \sqrt{\frac{2(U + \alpha)}{A(q)}} dq. \quad (2)$$

Затем отсюда получим

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int \frac{dq}{\sqrt{2A(q)(U + \alpha)}} = t + \beta. \quad (3)$$

Теперь мы хотим исследовать движение, определяемое этим уравнением.

Для некоторого сокращения выражений введем понятие «механическая величина». Под механической величиной будем понимать переменную, которая вместе со своей первой производной действительна, непрерывна и конечна для каждого конечного значения времени.

Примером такого рода являются прямоугольные координаты в задаче трех тел в случае, когда в конечный момент времени не происходит столкновения. В качестве механических величин

можно рассматривать также оскулирующие эллиптические элементы и т. д.

При этом вместо времени можно ввести любую другую независимую переменную с такими свойствами, что она: 1) непрерывно растет вместе со временем и 2) становится бесконечной вместе со временем.

Пусть теперь механическая величина  $q$  определяется дифференциальным уравнением в форме (3). Положим

$$F(q) = 2(U + \alpha)A(q);$$

тогда это уравнение выразится так:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = F(q). \quad (4)$$

Далее нужно показать, что  $q$  никогда не может переходить через такое значение  $q = a$ , для которого функция  $F(q)$  обращается в нуль.

Пусть  $F(a) = 0$ , и пусть кратность этого корня равна  $m$ , где  $m$  обозначает целое положительное число. Тогда можно написать

$$F(q) = (q - a)^m \varphi(q), \quad (4^*)$$

где  $\varphi(a)$  отлично от нуля. Предположим теперь, что  $\varphi(q)$  можно разложить в сходящийся степенной ряд в окрестности  $x = a$ , где, следовательно, по предположению, постоянный член отличен от нуля. Из (4) затем получим

$$(q - a)^{-\frac{m}{2}} [c_0 + c_1(q - a) + c_2(q - a)^2 + \dots] dq = \pm dt. \quad (5)$$

При интегрировании мы должны здесь различать два случая, смотря по тому, будет ли  $m$  четным или нечетным числом.

Для нечетного  $m$  интеграл (5) выразится следующим образом:

$$2(q - a)^{-\frac{m}{2} + 1} \left\{ \frac{c_0}{m - 2} + \frac{c_1}{m - 4}(q - a) + \frac{c_2}{m - 6}(q - a)^2 + \dots \right\} = \mp(t + \tau), \quad (6)$$

а для четного  $m$

$$\begin{aligned} & -\frac{c_m}{2} \ln(q - a) + \\ & + 2(q - a)^{-\frac{m}{2} + 1} \left\{ \frac{c_0}{m - 2} + \frac{c_1}{m - 4}(q - a) + \frac{c_2}{m - 6}(q - a)^2 + \dots \right\} = \\ & = \mp(t + \tau), \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\tau$  обозначает постоянную интегрирования и из скобок вынесен член с коэффициентом  $\frac{c_m}{2} - 1$ .

Допустим теперь, что в этом уравнении  $q$  приближается к значению  $q = a$  именно таким образом, что левые части (6) и (7) остаются действительными; тогда одновременно абсолютные величины левых частей вместе с  $t$  неограниченно возрастают всякий раз, как  $m \geq 2$ . Обратно, мы можем утверждать, что если  $m \geq 2$ , то не найдется ни одного конечного значения  $t'$ , для которого  $q$  принимает значение  $a$ . Далее, так как  $q$  действительно и непрерывно, то  $q$  от действительных значений, больших  $a$ , может переходить к действительным значениям, меньшим  $a$ , только само принимая значение  $q = a$ , тогда, стало быть,  $q$  при  $m \geq a$  не может никогда пройти через корень  $q = a$ .

Если, наконец,  $m = 1$ , то согласно (6) в окрестности  $q = a$  между  $q$  и  $t$  имеем следующее соотношение:

$$2(q - a)^{1/2} \left\{ c_0 + \frac{c_1}{3}(q - a) + \frac{c_2}{5}(q - a)^2 + \dots \right\} = \pm (t + \tau). \quad (8)$$

Далее отсюда получим

$$q - a = A_1 (t + \tau)^2 + A_2 (t + \tau)^4 + \dots \quad (8^*)$$

Для  $t = -\tau$  имеем  $q = a$ ; это значение  $q$  достигается здесь при конечном значении  $t$ . Но здесь через точку  $q = a$  также нельзя перейти. Действительно, из (8\*) следует, что для положительного  $A_1$  должно быть  $q > a$ , для отрицательного  $A_1$  всегда  $q < a$ . В обоих случаях точку  $q = a$  переходить нельзя. Таким образом, мы приходим к результату:

Если  $q$  является механической величиной, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = F(q), \quad (a)$$

то  $q$  ни при каком конечном значении  $t$  не может принять значение  $q = a$ , для которого

$$F(q) = 0. \quad (б)$$

Если  $q = a$  — простой корень (б), то это значение достигается при конечном значении  $t$ , и производная от  $q$  при  $q = a$  меняет знак. Если кратность корня больше единицы, то значение  $q = a$  не достигается ни при каком конечном значении  $t$ .

Пусть теперь  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ) — два соседних корня уравнения (б) кратности  $m$  и  $n$ , так что

$$\left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = (q - a)^m (b - q)^n \psi(q), \quad (9)$$

где  $\psi(q)$  ни для каких значений  $q$ , лежащих между  $a$  и  $b$ , не обращается в нуль. Если в начале движения  $q$  находится между  $a$  и  $b$ , то, значит, по приведенной выше теореме  $q$  должно всегда находиться между границами  $a$  и  $b$ .

Для исследования движения, определяемого при помощи (9), мы введем вспомогательную величину  $w$ , которую определим так, чтобы

$$\left(\frac{dq}{dw}\right)^2 = \beta^2 (q-a)^m (b-q)^n, \quad (10)$$

и, далее,

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\psi(q)}{\beta^2}. \quad (11)$$

Так как уравнение (9) заменяется двумя другими, каждому из которых соответствуют свои особые постоянные интегрирования, то одну из этих постоянных можно выбирать по произволу. Мы установим, что для уравнения (11) постоянная интегрирования будет определяться так, чтобы  $w$  получало нулевое значение, когда  $t$  равно нулю. Далее из этого же уравнения следует, что  $w$  должно всегда иметь действительные значения. Но можно распорядиться не только значением  $w$  в начале движения, но также допустимо в начале движения дать  $w$  произвольный знак, так как необходимо только, чтобы имело место уравнение для квадратов производных:

$$\left(\frac{dq}{dw}\right)^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dq}{dt}\right)^2.$$

Дадим далее  $dw$  в начале движения тот же знак, как и  $dt$ ; тогда знаки обеих этих величин всегда будут согласованы, так как  $w$  никогда не может стать нулем (или бесконечностью). Значит, для всех значений  $t$  имеем

$$\frac{dw}{dt} = + \frac{1}{\beta} \sqrt{\psi(q)},$$

где  $\beta$  обозначает еще одну неопределенную положительную постоянную.

Из этого уравнения между  $w$  и  $t$  мы можем вывести одно важное свойство. Когда  $q$  в своем изменении определено так, что всегда  $b \geq q \geq a$ , и сообразно сделанным предположениям  $\psi(q)$  в этой области непрерывно и никогда не становится нулем или бесконечностью, то  $\psi(q)$  необходимо должно иметь для указанных значений  $q$  конечную верхнюю границу и отличную от нуля положительную нижнюю границу. То же самое относится также к

$$\frac{1}{\beta} \sqrt{\psi(q)},$$

так что всегда можно найти два положительных числа  $L_1$  и  $L_2$ , такие, что для всех рассматриваемых значений  $q$

$$\beta L_1 < \sqrt{\psi(q)} < \beta L_2,$$

и отсюда следует, что

$$L_1 t < w < L_2 t. \quad (12)$$

После того как мы выбрали две определенные границы, внутри которых должны быть заключены значения  $w$ , мы можем перейти к исследованию уравнения (10), дающего зависимость между  $q$  и  $w$ . Здесь мы обнаруживаем большую пользу, которую доставляет нам введение вспомогательной величины  $w$ . Действительно, теперь все рассмотрение движения сводится к уравнению (10), для чего можно обойтись элементарными методами. Предположив, что решением этого уравнения будет

$$q = f(w),$$

для представления всего движения мы здесь только потребуем, чтобы  $w$  могло пробегать все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Более того, если мы отождествляем  $w$  с точностью до постоянного множителя с  $t$ , то мы можем получить приближенное представление движения. Это приближение такого же рода, как и то, которое получается в обыкновенной задаче о маятнике, если встречающийся там эллиптический синус заменить обычным синусом.

Предположим сначала, что

$$m = n = 1;$$

такой случай был впервые рассмотрен Вейерштрассом в его ценном сочинении [6].

Имеем теперь

$$\frac{dq}{dw} = \beta \sqrt{(q-a)(b-q)}. \quad (13)$$

Решение этого уравнения выражается так:

$$q = a \cos^2 \frac{\beta w}{2} + b \sin^2 \frac{\beta w}{2}. \quad (14)$$

Значит, в этом случае  $q$  является периодической функцией  $w$  с периодом  $2\pi/\beta$ . Покажем, что  $q$  является также периодической и по  $t$ . Постоянной  $\beta$  мы можем распорядиться, например, так, чтобы величина периода относительно  $w$  совпадала с периодом по  $t$ . Согласно (11) имеем

$$\int_0^w \frac{\beta dw}{\sqrt{\psi(q)}} = t.$$

Если  $w$  увеличить на  $2\pi/\beta$ , то  $q$  останется неизменным. Обозначим через  $2T$  соответствующее приращение  $t$ ; тогда имеем

$$2T = \int_w^{w + \frac{2\pi}{\beta}} \frac{\beta dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{\beta w}{2} + b \sin^2 \frac{\beta w}{2}\right)}}.$$

Но это выражение не зависит от  $w$ , так как  $\psi$  периодически по  $w$  с периодом  $\frac{2\pi}{\beta}$ , следовательно,  $2T$  будет постоянным, и, таким образом,  $q$  является периодической по  $t$  с периодом

$$2T = \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{\beta dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{\beta w}{2} + b \sin^2 \frac{\beta w}{2}\right)}} \quad (15)$$

или

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} \frac{\beta dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{\beta w}{2} + b \sin^2 \frac{\beta w}{2}\right)}}. \quad (16)$$

Это уравнение согласно (14) можно также записать следующим образом:

$$T = \int_a^b \frac{dq}{\sqrt{(q-a)(b-q)\psi(q)}}. \quad (16^*)$$

Если величины периодов по  $w$  и по  $t$  должны быть равными, то имеем

$$2T = \frac{2\pi}{\beta}$$

или

$$\beta = \frac{\pi}{T}. \quad (17)$$

Если корни  $a$  и  $b$  уравнения

$$F(q) = 0$$

простые, тогда  $q$  будет периодической функцией времени. Эта функция является также четной функцией от  $t$ . Аналитическое представление этой функции может быть легко найдено. По теореме Фурье имеем

$$q = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos \frac{\pi t}{T} + B_2 \cos \frac{2\pi t}{T} + \dots, \quad (18)$$

где

$$TB_n = 2 \int_0^T q \cos \frac{n\pi t}{T} dt. \quad (18^*)$$

Отсюда интегрированием по частям получаем

$$n\pi B_n = -2 \int_a^b \sin \frac{n\pi t}{T} dq, \quad (18^{**})$$

где  $t$  должно быть выражено через  $q$ .

Вычисление (18<sup>\*\*</sup>) упрощается, если  $t$  и  $q$  выразить через вспомогательную величину  $w$ . Согласно (11) и (17) имеем

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\beta dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{\pi w}{2T} + b \sin^2 \frac{\pi w}{2T}\right)}} = \\ &= \left[ \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos \frac{\pi w}{T} + c_2 \cos \frac{2\pi w}{T} + \dots \right] dw; \end{aligned} \quad (19)$$

здесь

$$Tc_n = 2 \int_0^T \frac{\beta \cos \frac{n\pi w}{T} dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{\pi w}{2T} + b \sin^2 \frac{\pi w}{2T}\right)}}. \quad (19^*)$$

Согласно (16), в частности,

$$\frac{1}{2} c_0 = 1. \quad (19^{**})$$

Затем интегрированием (19) получаем

$$t = w + \frac{T}{\pi} c_1 \sin \frac{\pi w}{T} + \frac{T}{2\pi} c_2 \sin \frac{2\pi w}{T} + \dots \quad (20)$$

При помощи этого уравнения  $t$  выражается через  $w$ , и коэффициенты в этом ряде можно всегда вычислить из (19<sup>\*</sup>), например, при помощи так называемых механических квадратур.

С другой стороны, из (13) и (14)

$$dq = \frac{\pi}{2T} (b - a) \sin \frac{\pi w}{T} dw. \quad (21)$$

Подставим теперь в (18<sup>\*</sup>) выражения (20) и (21); тогда получим

$$nTB_n = -(b - a) \int_0^T \sin \frac{n\pi t}{T} \sin \frac{\pi w}{T} dw, \quad (22)$$

ти

$$\frac{2nTB_n}{b-a} = \int_0^T \cos \frac{\pi}{T}(nt+w) dw - \int_0^T \cos \frac{\pi}{T}(nt-w) dw, \quad (22^*)$$

где теперь вместо  $t$  подставляется выражение (20). Численное определение  $B_n$  по этой формуле можно проводить различным образом: при помощи механических квадратур, разложением по степеням  $c_1, c_2, \dots$ , при помощи бесселевых функций и т. д.

Если кратность корней уравнения

$$F(q) = 0$$

больше единицы, то изучение движения легко может быть выполнено при помощи уравнения

$$\frac{dq}{dw} = \beta (q-a)^{m/2} (b-q)^{n/2}.$$

Пусть, во-первых, кратность одного из корней, например,  $n = 1$ , а другого —  $m > 1$ . Если, далее,  $dq$  положительно при  $t = 0$ , то  $q$  возрастает и достигает верхней границы  $q = b$ . Здесь  $dq : dw$  меняет знак,  $q$  начинает убывать и неограниченно приближается к значению  $q = a$  вместе с ростом  $w$  (а также и  $t$ ), не достигая этого значения за конечный промежуток времени.

Если, во-вторых, как  $m$ , так и  $n$  больше или равны 2, тогда во все время движения  $dq : dw$  никогда не может изменить знак, и  $q$  постепенно приближается к одной из границ  $a$  или  $b$  (к последней границе, если при  $t = 0$ ,  $dq : dw$  положительно, к первой, если  $dq : dw$  отрицательно), не достигая ее в конечное время.

Чтобы характеризовать движения, встречающиеся при решении дифференциального уравнения (4), мы будем использовать следующие названия:

1. Будем говорить, что механическая величина обладает либрацией, если она периодически колеблется между двумя постоянными границами. Эти границы будем называть границами либрации.

2. Будем говорить, что механическая величина обладает предельным движением, если она постепенно приближается к определенному граничному значению, не достигая его в конечный момент времени. Это несобственное граничное значение будем называть предельной границей.

Из предыдущих исследований непосредственно следует, что в данном случае могут быть только два этих типа. Либрация имеет место, если оба корня,  $a$  и  $b$ , простые, в противном случае всегда будет предельное движение.

В случае либрации общее аналитическое выражение для  $q$  дается формулами (18) и (22\*). Соответствующее выражение для случая предельного движения, насколько нам известно, до сих пор не давалось. Движения, названные здесь предельными, такого же рода, как и исследованные Пуанкаре асимптотические движения. Но аналитический способ построения последних не совпадает с рассмотренным здесь способом, справедливым для предельных движений, и поэтому мы сохраним название «предельное движение».

В истории математики исследования уравнения

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = F(q) \quad (a)$$

(где  $F(q)$  — полином относительно  $q$  степени  $s$ ) имели своеобразное развитие. В начале прошлого столетия было доказано, что если  $s = 4$ , то  $q$  является эллиптической функцией  $t$ , имеющей два периода, из которых по крайней мере один должен быть мнимым. Если  $s > 4$ , тогда  $q$ , рассматриваемая как функция комплексной переменной  $t$ , должна иметь больше двух периодов. Но Якоби в своем знаменитом сочинении [7] доказал, что если функция имеет три (или больше) периодов, то либо эти периоды могут быть представлены в виде комбинации двух периодов, либо функция должна обладать таким свойством, что она остается неизменной при бесконечно малом изменении аргумента. Отсюда Якоби сделал вывод, что  $F(q)$  не может быть аналитической функцией  $q$ , если степень  $s$  больше четырех. Ошибочный вывод, если его позволительно так назвать, основывается на том, что Якоби предполагал, что  $q$  изменяется неограниченно на всей комплексной плоскости. Но если ограничиться только действительными значениями, как это сделал Вейерштрасс в цитированном выше сочинении, то, как мы видели,  $q$  можно рассматривать как вполне определенную функцию действительной переменной  $t$ . Этим путем можно идти даже дальше, выделяя вместо двух корней уравнения

$$F(q) = 0$$

четыре (пусть ими являются  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ) и вводя вспомогательную величину  $w$ , определяемую следующим уравнением:

$$\left(\frac{dq}{dw}\right)^2 = \beta^2 (q - a_1)^{s_1} (q - a_2)^{s_2} (q - a_3)^{s_3} (q - a_4)^{s_4},$$

что может быть полезным, когда в механической задаче в начале движения  $q$  при известных условиях может находиться между различными парами корней  $a_i$  и  $a_j$ .

**Пример. Математический маятник.**

Если вертикальную координату маятника, отсчитываемую вниз от начала координат, обозначить через  $z$ , длину маятника через  $l$ , а ускорение силы тяжести через  $g$ , то будем иметь

$$\frac{l dz}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0)}} = dt,$$

где  $z_0$  обозначает постоянную интегрирования.

Из приведенных выше рассуждений непосредственно следует, что если

1)  $-l < z_0 < l$ , то имеет место либрация в границах между  $z_0$  и  $l$ ; если

2)  $z_0 < -l$ , то имеет место либрация в границах  $-l$  и  $+l$ , т. е. маятник движется всегда в одном и том же направлении; если

3)  $z_0 = -l$ , то происходит предельное движение, и маятник при возрастании времени приближается сколь угодно близко к самой верхней точке, не достигая ее за конечный промежуток времени; если

4)  $z_0 = +l$ , то маятник остается неподвижным в наиболее нижней точке.

Для периода движения  $2T$  согласно (16\*) в случаях 1) и 2) получаются значения

$$2T = 2 \int_{z_0}^l \frac{l dz}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0)}}$$

и

$$2T = 2 \int_{-l}^l \frac{l dz}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0)}}.$$

**§ 3. Условно-периодические движения**

Теперь переходим к общему случаю, когда движение обладает  $n$  степенями свободы. Итак, пусть имеется каноническая система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

и предположим, что соответствующее уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби допускает интегрирование

разделением переменных, так что согласно (19) и (19\*) § 1  $q_1, q_2, \dots, q_n$  даются следующими уравнениями:

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\Phi_{i1}(q_i) dq_i}{\sqrt{2\psi_i(q_i) + 2\alpha_1\Phi_{i1}(q_i) + \dots + 2\alpha_n\Phi_{in}(q_i)}} = t + \beta_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\Phi_{ij}(q_i) dq_i}{\sqrt{2\psi_i(q_i) + 2\alpha_1\Phi_{i1}(q_i) + \dots + 2\alpha_n\Phi_{in}(q_i)}} = \beta_j \quad (j=2, \dots, n). \quad (2^*)$$

Изменения переменных  $q_1, q_2, \dots, q_n$  должны исследоваться в предположении, что они, в соответствии с определениями, данными в предыдущем параграфе, представляют собой механические величины.

При  $n = 2$  эти уравнения были впервые исследованы Штауде [8], который ввел также чрезвычайно полезное понятие «условно-периодические движения», речь о которых пойдет ниже. Для случая  $n > 2$  исследования Штауде продолжил Штеккель [9], который установил весьма важные свойства этих движений.

Положим

$$\Phi_i(q_i) = 2\psi_i(q_i) + 2\alpha_1\Phi_{i1}(q_i) + \dots + 2\alpha_n\Phi_{in}(q_i), \quad (3^*)$$

тогда уравнения (2) и (2\*) после их дифференцирования дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_{11}(q_1) dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \frac{\Phi_{n1}(q_n) dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}} &= dt, \\ \frac{\Phi_{12}(q_1) dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \frac{\Phi_{n2}(q_n) dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{\Phi_{1n}(q_1) dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \frac{\Phi_{nn}(q_n) dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В начале движения переменные  $q_1, q_2, \dots, q_n$  принимают значения  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ . Теперь рассмотрим систему уравнений:

$$\Phi_i(q_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — два значения  $q_i$ , для которых выполняется (4), и при этом  $a_i < q_i^0 < b_i$ . Эти корни должны быть такими, что между ними нет других корней уравнения  $\Phi_i = 0$ . Пусть кратность корней  $m_i$  и  $n_i$ . Положим теперь

$$(q_i - a_i)^{-\frac{m_i}{2}} (b_i - q_i)^{-\frac{n_i}{2}} dq_i = \beta_i dw_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Кроме того, введем обозначения

$$\Phi_i(q_i) = (q_i - a_i)^{m_i} (b_i - q_i)^{n_i} \Psi_i(q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

и

$$F_{ij}(q_i) = \frac{\Phi_{ij}}{\sqrt{\Psi_i(q_i)}}; \quad (7)$$

тогда будем иметь вместо (3) уравнения

$$\left. \begin{aligned} F_{11}(q_1)\beta_1dw_1 + \dots + F_{n1}(q_n)\beta_ndw_n &= dt, \\ F_{12}(q_1)\beta_1dw_1 + \dots + F_{n2}(q_n)\beta_ndw_n &= 0, \\ \dots \\ F_{1n}(q_1)\beta_1dw_1 + \dots + F_{nn}(q_n)\beta_ndw_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из § 1 известно, что определитель

$$\Delta = |\varphi_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

отличен от нуля. То же самое имеет место и для определителя

$$E = |F_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Согласно (7) эти два определителя связаны соотношением:

$$E = \frac{\Delta}{\sqrt{\psi_1\psi_2\dots\psi_n}}. \quad (10)$$

Если продифференцируем это уравнение по  $\varphi_{ij}$  и будем рассматривать при этом  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  как постоянные, то получим

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varphi_{ij}} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{ij}}.$$

Но согласно (7)

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{\Psi_i(q_i)}} \frac{\partial E}{\partial F_{ij}},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial F_{ij}} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{ij}} \sqrt{\Psi_i(q_i)}. \quad (11^*)$$

В частности, для  $j = 1$

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial F_{i1}} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}} \sqrt{\Psi_i(q_i)}. \quad (11)$$

Но в § 1 мы доказали, что

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}} \neq 0,$$

и, следовательно, определители

$$\frac{\partial E}{\partial F_{i1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

тоже не могут быть тождественно равными нулю.

Предположим, что этот определитель ни для одного значения  $q_i$  между  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) не становится равным нулю или бесконечности.

Считая, что сказанное выше имеет место и для определителя  $E$  и его миноров первого порядка, разрешим систему (8) относительно  $dw_1, dw_2, \dots, dw_n$ , что возможно, так как определитель  $E$  отличен от нуля.

Из (9) § 1 гл. I имеем

$$\frac{dt}{E} = \frac{\beta_1 dw_1}{\frac{\partial E}{\partial F_{11}}} = \dots = \frac{\beta_n dw_n}{\frac{\partial E}{\partial F_{n1}}}. \quad (12)$$

Если выбрать соответствующим образом знаки коэффициентов  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , то из (12) следует, что если  $t$  растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ , принимая вещественные значения, то  $w_1, w_2, \dots, w_n$  также всегда должны возрастать. Но отсюда согласно (5) и исследованиям предыдущего параграфа следует, что  $q_i$  должно всегда оставаться в границах между  $a_i$  и  $b_i$ .

Функции

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial F_{i1}}$$

должны теперь всегда иметь верхнюю и нижнюю границы, а из (12) следует, наконец, что  $w_i$  вместе с  $t$  должны неограниченно возрастать.

Движения, определяемые уравнениями (2) и (2\*), аналогичны, таким образом, движениям, исследованным в предыдущем параграфе, когда  $q_1, q_2, \dots, q_n$  должны совершать либо либрационные, либо предельные движения. Не исключено, что одни из величин  $q_i$  имеют предельные движения, тогда как другие — либрационные.

Если

$$m_i = n_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то для всех переменных движение будет либрационным; этот случай представляет особенный интерес, так что на нем мы остановимся подробнее.

Уравнение (5) переписется в виде

$$\frac{dq_i}{\sqrt{(q_i - a_i)(b_i - q_i)}} = \beta_i dw_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$



увеличиваются на постоянные величины  $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}$ . Можно также утверждать обратное: если рассматривать  $w_1, w_2, \dots, w_n$  как функции постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , то эти функции обладают следующим свойством: при увеличении  $A_1, A_2, \dots, A_n$  соответственно на  $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}$ ,  $w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$  остаются неизменными, а  $w_i$  увеличится на  $2\pi$ .

Величины  $w_1, w_2, \dots, w_n$  на самом деле являются однозначными функциями постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Для того чтобы доказать это, продифференцируем уравнения (16), рассматривая  $A_1, A_2, \dots, A_n$  как переменные. Имея в виду (15), получим

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= F_{11}\beta_1 dw_1 + \dots + F_{n1}\beta_n dw_n, \\ dA_2 &= F_{12}\beta_1 dw_1 + \dots + F_{n2}\beta_n dw_n, \\ &\dots \dots \dots \\ dA_n &= F_{1n}\beta_1 dw_1 + \dots + F_{nn}\beta_n dw_n, \end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

откуда, разрешив относительно  $dw_1, dw_2, \dots, dw_n$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} E dw_1 &= \frac{\partial E}{\partial F_{11}} dA_1 + \dots + \frac{\partial E}{\partial F_{1n}} dA_n, \\ &\dots \dots \dots \\ E dw_n &= \frac{\partial E}{\partial F_{n1}} dA_1 + \dots + \frac{\partial E}{\partial F_{nn}} dA_n. \end{aligned} \right\} \quad (18^{**})$$

Так как якобиан  $E$  ни для одного значения  $q_i$  внутри допустимой области значений не обращается в нуль, то, очевидно, произвольной системе значений  $dA_1, dA_2, \dots, dA_n$  соответствует единственная определенная система значений дифференциалов  $dw_1, dw_2, \dots, dw_n$ . Итак, если постоянные интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$  пробегают произвольный непрерывный ряд конечных значений, то  $w_1, w_2, \dots, w_n$  принимают также вполне определенный, непрерывный ряд значений.

Пусть  $q_1, q_2, \dots, q_n$  являются однозначными функциями от  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , так же как и от  $\{A_1, A_2, \dots, A_n$ . Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= f_1(t + A_1, A_2, \dots, A_n), \\ &\dots \dots \dots \\ q_n &= f_n(t + A_1, A_2, \dots, A_n); \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$

тогда, учитывая сказанное выше, функции  $f$  обладают следующими

свойствами:

$$\left. \begin{aligned}
 f_i(t + A_1 + 2\omega_{11}, A_2 + 2\omega_{12}, \dots, A_n + 2\omega_{1n}) &= \\
 &= f_i(t + A_1, A_2, \dots, A_n), \\
 f_i(t + A_1 + 2\omega_{21}, A_2 + 2\omega_{22}, \dots, A_n + 2\omega_{2n}) &= \\
 &= f_i(t + A_1, A_2, \dots, A_n), \\
 \dots \\
 f_i(t + A_1 + 2\omega_{n1}, A_2 + 2\omega_{n2}, \dots, A_n + 2\omega_{nn}) &= \\
 &= f_i(t + A_1, A_2, \dots, A_n)
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Значит, эти функции являются (по Вейерштрассу)  $n$ -периодическими функциями  $n$  переменных  $t + A_1, A_2, \dots, A_n$ . Периоды  $\omega_{ij}$  даются следующими формулами:

$$\omega_{ij} = \int_0^\pi F_{ij}(q_i) dw_i = \int_{a_i}^{b_i} \frac{\Phi_{ij}(q_i) dq_i}{V(q_i - a_i)(b_i - q_i)\Psi_i(q_i)}. \quad (20)$$

Вместо  $t + A_1, A_2, \dots, A_n$  введем новые переменные  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , определяемые следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{11}u_1 + \omega_{21}u_2 + \dots + \omega_{n1}u_n &= \pi(t + A_1), \\
 \omega_{12}u_1 + \omega_{22}u_2 + \dots + \omega_{n2}u_n &= \pi A_2, \\
 \dots \\
 \omega_{1n}u_1 + \omega_{2n}u_2 + \dots + \omega_{nn}u_n &= \pi A_n,
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где мы предполагаем, что определитель

$$\Omega = |\omega_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

отличен от нуля.

Из (21) непосредственно следует, что если  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) увеличиваются на  $2\pi$ , то  $t + A_1, A_2, \dots, A_n$  возрастают соответственно на  $2\omega_{i1}, 2\omega_{i2}, \dots, 2\omega_{in}$ .

Можно утверждать обратное: если система уравнений (21) линейна и определитель  $\Omega$  отличен от нуля, то когда  $t + A_1, A_2, \dots, A_n$  возрастают соответственно на  $2\omega_{i1}, 2\omega_{i2}, \dots, 2\omega_{in}$ , одновременно  $u_i$  увеличивается на  $2\pi$ , в то время как  $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$  остаются неизменными.

Следовательно, из (19) вытекает, что  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) суть периодические функции от  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) с периодом  $2\pi$ .

Обозначим через  $g_i$  те функции, в которые переходят  $f_i$ , если в них вместо переменных  $t + A_1, A_2, \dots, A_n$  подставить  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ;

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} g_i(u_1 + 2\pi, u_2, \dots, u_n) &= g_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ g_i(u_1, u_2 + 2\pi, \dots, u_n) &= g_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ &\dots \dots \dots \\ g_i(u_1, u_2, \dots, u_n + 2\pi) &= g_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &(i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

или, вообще,

$$g_i(u_1 + 2m_1\pi, u_2 + 2m_2\pi, \dots, u_n + 2m_n\pi) = g_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_n$  обозначают произвольные положительные или отрицательные целые числа.

Функции этого вида можно представить обобщенным рядом Фурье с  $n$  переменными

$$g_i = \sum C_{v_1, v_2, \dots, v_n}^{(i)} e^{(v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n) i} \quad (v_1, v_2, \dots, v_n = -\infty, \dots, +\infty), \quad (24)$$

где коэффициенты даются формулой

$$\pi^n C_{v_1, v_2, \dots, v_n}^{(i)} = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g_i(u_1, u_2, \dots, u_n) e^{-(v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n) i} du_1 du_2 \dots du_n. \quad (24^*)$$

Значение этого интеграла всегда можно вычислить и для него действительны, *mutatis mutandis*, те же самые замечания, которые сделаны выше (§ 2) для одной переменной. Итак, в этом случае ( $m_i = n_i = 1$ ) координаты  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются  $n$ -периодическими функциями  $n$  переменных  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Может также случиться, что они станут периодическими функциями времени. Но в общем случае это не так.

Согласно (21)  $u_1, u_2, \dots, u_n$  являются линейными функциями времени. Решая эти уравнения, придем к системе

$$\left. \begin{aligned} \Omega u_1 &= \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{11}} \pi(t + A_1) + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{12}} \pi A_2 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{1n}} \pi A_n, \\ \Omega u_2 &= \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{21}} \pi(t + A_1) + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{22}} \pi A_2 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{2n}} \pi A_n, \\ &\dots \dots \dots \\ \Omega u_n &= \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n1}} \pi(t + A_1) + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n2}} \pi A_2 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{nn}} \pi A_n. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Если теперь  $t$  возрастает на  $2T$ , то одновременно увеличиваются

$$\begin{aligned} u_1 & \text{ на } \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{11}} 2\pi T, \\ u_2 & \text{ на } \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{21}} 2\pi T, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_n & \text{ на } \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n1}} 2\pi T. \end{aligned}$$

Если движение должно быть периодическим по времени с периодом  $2T$ , то упомянутые выше добавки к  $u_1, u_2, u_n$  должны быть кратны  $2\pi$ , а также должны иметь место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{11}} &= \frac{m_1}{T}, \\ \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{21}} &= \frac{m_2}{T}, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n1}} &= \frac{m_n}{T}, \end{aligned}$$

в которых  $m_1, m_2, \dots, m_n$  обозначают целые числа.

Теперь умножим эти уравнения соответственно на  $\omega_{11}, \omega_{21}, \dots, \omega_{n1}$ , затем точно также на  $\omega_{12}, \omega_{22}, \dots, \omega_{n2}$  и т. д., и складывая полученные таким образом уравнения, придем к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} m_1\omega_{11} + m_2\omega_{21} + \dots + m_n\omega_{n1} &= T, \\ m_1\omega_{12} + m_2\omega_{22} + \dots + m_n\omega_{n2} &= 0, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m_1\omega_{1n} + m_2\omega_{2n} + \dots + m_n\omega_{nn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Чтобы движение стало периодическим по времени, должны иметь место приведенные выше соотношения между периодами  $\omega_{ij}$ . Период (по  $t$ ) задается первой из этих формул.

В связи с тем, что координаты  $q_i$  могут в отдельных случаях становиться периодическими функциями, для этих движений Штауде ввел термин «условно-периодические движения».

Так как определитель  $\Omega$  не обращается в нуль, то каждому значению  $2T$  согласно (26) соответствует единственная система значений величин  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Если определенные таким образом величины  $m_1, m_2, \dots, m_n$  окажутся целыми числами, то движение будет периодическим с периодом  $2T$ .

Относительно условно-периодических движений Штеккель доказал интересную и важную теорему, которую мы теперь рассмотрим.

Заметим сначала, что бесконечно малому приращению чисел  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , согласно (18), соответствуют бесконечно малые приращения  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , а поэтому и бесконечно малые приращения  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Имеем теперь

$$q_i = f_i(t + A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и эти функции, согласно (19), обладают такими свойствами, что

$$f_i\left(t + A_1 + \sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha 1}, A_2 + \sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha 2}, \dots, A_n + \sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha n}\right) = f_i(t + A_1, A_2, \dots, A_n). \quad (27)$$

Теперь можно доказать [10], что всегда можно найти бесконечное множество систем целых чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , для которых каждое из  $n - 1$  выражений

$$\sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha j} \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

будет меньше любой произвольной величины  $\varepsilon$ , как бы мала она ни была. Итак, число  $m_\alpha$  выбирается таким образом, что

$$\sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha j} = \varepsilon_j \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

где  $|\varepsilon_j| < \varepsilon$ . Тогда согласно (27) имеем

$$f\left(t + A_1 + \sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha 1}, A_2 + \varepsilon_2, \dots, A_n + \varepsilon_n\right) = f(t + A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Положим

$$t = t_1 - \sum_{\alpha=1}^n 2m_\alpha \omega_{\alpha 1} = t_1 - P,$$

где через  $t_1$  обозначено произвольное значение времени; тогда отсюда будем иметь

$$f(t_1 + A_1, A_2 + \varepsilon_2, \dots, A_n + \varepsilon_n) = f(t_1 - P + A_1, A_2, \dots, A_n),$$

но мы показали, что вследствие непрерывности функций  $f$  при бесконечно малых изменениях постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$  претерпевают также бесконечно малые изменения.

Следовательно,

$$f(t_1 + A_1, A_2 + \varepsilon_2, \dots, A_n + \varepsilon_n)$$

отличается от  $f(t_0 + A_1, A_2, \dots, A_n)$  на бесконечно малую величину и поэтому из последнего уравнения следует также, что функции

$$f(t_1 + A_1, A_2, \dots, A_n)$$

и

$$f(t_1 - P + A_1, A_2, \dots, A_n)$$

сколь угодно мало отличаются одна от другой.

С другой стороны, это означает, что координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  для времени  $t_1$  и для времени  $t_1 - P$  как угодно мало отличаются одна от другой.

Следовательно, если для времени  $t_1$  координаты принимают значения  $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}$ , то всегда имеются другие значения  $t$  и даже бесконечно много других значений  $t$ , для которых траектория как угодно близко подходит к точке  $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}$ , так как числа  $m_\alpha$  могут выбираться бесконечно многими способами.

Можно продолжить мысль Штекеля и доказать, что всегда найдутся такие значения времени, для которых траектория подходит как угодно близко к любой точке, которая лежит, вообще говоря, внутри области допустимых значений для координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Эта область  $B$  в соответствии со сказанным выше определяется так, что

$$a_i \leq q_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть теперь  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$  есть какая-либо точка области  $B$ , относящаяся, как следует из уравнения (16), к определенной системе значений  $t + A_1, A_2, \dots, A_n$ , которые мы обозначим через  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Функция

$$Q_i = f_i(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

отнюдь не обязательно представляет значение  $q_i$ . Но мы хотим доказать, что в выражении для  $q_i$

$$q_i = f_i(t + A_1, A_2, \dots, A_n)$$

всегда можно найти такое значение  $t$ , для которого  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) как угодно мало отличаются от  $q_i$ .

В самом деле, справедливо соотношение (27). Теперь из теоремы Якоби — Кронекера, о которой говорилось выше, следует, что всегда, пока периоды  $\omega_{ij}$  независимы друг от друга, можно



$\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1n}$ . В этом случае  $q_1$  обладает такими же свойствами, как и  $\omega_1$  в уравнениях (16).

Если

$$\frac{\Phi_{1i}(q_1)}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

постоянная величина, то период — произвольный.

В механике часто бывает, что взаимное положение движущихся тел остается неизменным, если одна или несколько координат  $q_i$  (так называемые угловые координаты) увеличиваются на величину, кратную  $2\pi$ . Тогда вместо этих  $q_i$  вводят вспомогательные величины

$$x_i = \sin q_i$$

и полностью повторяют предыдущие рассуждения.

**Пример. Конический маятник.**

Выберем ось  $Z$  вертикальной и обозначим:  $\theta$  — угол, который составляет проекция маятника на плоскость  $XU$  с произвольной неподвижной линией;  $z$  — координату по оси  $Z$ ;  $l$  — длину маятника;  $g$  — ускорение силы тяжести и, наконец, через  $c, c'$  — постоянные интегрирования. Тогда переменные  $z$  и  $\theta$  даются следующими формулами:

$$d\theta + \frac{l dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}} = dt, \quad \left. \vphantom{d\theta} \right\} \quad (29)$$

$$\frac{cdz}{(l^2 - z^2) \sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}} = 0,$$

и по виду этих дифференциальных уравнений мы можем непосредственно заключить, что налицо случай условно-периодического движения.

В случае  $c = 0$  имеем обычную плоскую задачу о движении маятника. Исключив этот случай, легко найдем, что уравнение

$$(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2 = 0$$

имеет три действительных корня, один из которых отрицателен и численно больше  $l$ , а два других численно меньше  $l$ .

Итак, координата  $z$  должна всегда оставаться между двумя последними корнями. Из этого следует, что  $l^2 - z^2$  никогда не может обращаться в нуль. Так как корни простые, то можно непосредственно применять формулы (13) и т. д.

Как только  $z$  принимает вновь то же самое значение и одновременно  $\theta$  возрастает на величину, кратную  $2\pi$ , маятник возвращается в прежнее положение.

Итак, если положим

$$y = \cos \theta, \quad (30)$$

то движение будет периодическим, если координаты  $y$  и  $z$  восстанавливают свои первоначальные значения. Дифференциальные уравнения в этих координатах после интегрирования дают

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{l dz}{\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}} &= t + A_1, \\ \int \frac{cl dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} &= A_2. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Положим

$$h(z) = (2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2$$

и обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ) корни уравнения  $h(z) = 0$ , которые численно меньше  $l$ , и через  $\gamma$  — третий корень; тогда можно принять в уравнениях (6) и следующих, что

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0, & F_{21} &= \frac{l}{\sqrt{2g(z + \gamma)}}, \\ F_{12} &= 1, & F_{22} &= \frac{cl}{(l^2 - z^2) \sqrt{2g(z + \gamma)}}. \end{aligned}$$

Периоды  $\omega_{ij}$  будут

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 0, & \omega_{21} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{l dz}{\sqrt{h(z)}}, \\ \omega_{12} &= -\pi, & \omega_{22} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{cl dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{h(z)}}, \end{aligned}$$

и определитель  $\Omega$  принимает значение

$$\Omega = \pi\omega_{21},$$

отличное от нуля.

Переменные  $u_1$  и  $u_2$  в уравнениях (21) определяются из следующих соотношений:

$$\pi(t + A_1) = \omega_{21}u_2,$$

$$\pi A_2 = -\pi u_1 + \omega_{22}u_2,$$

так что

$$u_1 = \frac{\omega_{22}}{\omega_{21}}(t + A_1) - A_2,$$

$$u_2 = \frac{\pi}{\omega_{21}}(t + A_1).$$

Координаты  $y$  и  $z$  при помощи уравнений (24) и (24\*) могут быть представлены как дwoякопериодические функции обеих переменных  $u_1$  и  $u_2$ ; следует заметить, что это представление обладает значительными преимуществами перед обычным решением этой задачи с применением эллиптических функций. Движение становится, в соответствии с (26), чисто периодическим, если  $m_1\pi - m_2\omega_{22} = 0$ , и период становится равным  $2T = 2m_2\omega_{21}$ .

В этих формулах содержится полная теория сферического маятника.

ЗАДАЧА ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

§ 1. Общие соображения

Мы ограничимся случаем, когда движение происходит в плоскости. Общий (пространственный) случай может быть рассмотрен совершенно аналогичным образом \*).

Если использовать эллиптические координаты  $\lambda$  и  $\mu$  (§ 7 гл. I), то получим

$$2T = (\lambda^2 - \mu^2) \left[ \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2} \right], \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [(K + K')\lambda - (K - K')\mu]. \quad (2)$$

Если мы хотим записать дифференциальные уравнения в канонической форме, то можно положить

$$q_1 = \lambda, \quad q_2 = \mu,$$

и тогда согласно § 8 гл. I получим

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \dot{\lambda}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \dot{\mu},$$

так что

$$2T = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2} [(q_1^2 - c^2) p_1^2 + (c^2 - q_2^2) p_2^2],$$

$$U = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2} [(K + K') q_1 - (K - K') q_2].$$

Канонические уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

\*) Интегрирование регуляризованных дифференциальных уравнений для сферодальных координат в пространственном случае приводится в статье переводчика [11]. В обобщенной постановке задача двух неподвижных центров рассмотрена Е. И. Аксеновым, Е. А. Гребсниковым и В. Г. Демидовым (см. *Астрон. журн.* 40, 2, 1963). (*Прим. перев.*)

где

$$H = T - U. \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения имеют форму, которая необходима для применения теоремы Штекеля. Действительно, если положить [(10) § 1 гл. II]

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \frac{q_1^2}{q_1^2 - c^2}, & \varphi_{21} &= \frac{q_2^2}{q_2^2 - c^2}, \\ \varphi_{12} &= \frac{1}{q_1^2 - c^2}, & \varphi_{22} &= \frac{1}{q_2^2 - c^2}, \\ \psi_1 &= \frac{K + K'}{q_1^2 - c^2} q_1, & \psi_2 &= \frac{K - K'}{q_2^2 - c^2} q_2, \end{aligned}$$

так что

$$\Delta = \frac{q_1^2 - q_2^2}{(q_1^2 - c^2)(q_2^2 - c^2)},$$

то получим приводившуюся выше форму.

Введем снова обозначения  $\lambda$  и  $\mu$  вместо  $q_1$  и  $q_2$ ; тогда согласно (19) и (19\*) § 1 гл. II мы придем к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} & \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{2(\lambda^2 - c^2)[(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha]}} + \\ & \quad + \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{2(\mu^2 - c^2)[(K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha]}} = t + \beta_1, \\ & \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(\lambda^2 - c^2)[(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha]}} + \\ & \quad + \int \frac{d\mu}{\sqrt{2(\mu^2 - c^2)[(K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha]}} = \beta_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

соответствующим (43) § 7 гл. I, а промежуточные интегралы выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} &= \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)[(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha]}, \\ (\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} &= -\sqrt{2(\mu^2 - c^2)[(K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha]}. \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

Характеристическая функция  $H$  не зависит от  $t$ , и поэтому здесь имеется интеграл

$$H = h$$

или

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2) \left[ \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu^2}{c^2 - \mu^2} \right] = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [(K + K')\lambda - (K - K')\mu] + h. \quad (6)$$

Из этого интеграла находим, что величины  $\lambda$  и  $\mu$  в общем случае будут дwoякопериодическими функциями от  $t + \beta_1$  и  $\beta_2$ . Для периодов  $\omega_{ij}$  согласно (20) § 3 гл. II получим следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, & \omega_{21} &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, \\ \omega_{12} &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, & \omega_{22} &= \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где для сокращения записи положили

$$\left. \begin{aligned} R(\lambda) &= 2(\lambda^2 - c^2) [(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha], \\ S(\mu) &= 2(\mu^2 - c^2) [(K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

а  $a_1, b_1$  и  $a_2, b_2$  обозначают соответственно корни уравнений  $R(\lambda) = 0$  и  $S(\mu) = 0$ .

Находим, что определители  $\Delta$  и  $\Omega$  (§ 3 гл. II) отличны от нуля, кроме случая  $\lambda = \mu$ , в котором имеет место столкновение.

Введем согласно (21) § 3 гл. II вспомогательные величины  $u_1$  и  $u_2$ ; тогда будем иметь

$$\pi(t + \beta_1) = \omega_{11}u_1 + \omega_{21}u_2,$$

$$\pi\beta_2 = \omega_{12}u_1 + \omega_{22}u_2,$$

или

$$\left. \begin{aligned} \Omega u_1 &= \pi\omega_{22}(t + \beta_1) - \pi\omega_{21}\beta_2, \\ \Omega u_2 &= -\pi\omega_{12}(t + \beta_1) + \pi\omega_{11}\beta_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и  $\lambda$  и  $\mu$  будут дwoякопериодическими функциями  $u_1$  и  $u_2$  с периодом  $2\pi$ , которые можно разложить в ряд Фурье по кратным  $u_1$  и  $u_2$  \*).

Движение будет периодическим во времени, если  $\omega_{21}$  и  $\omega_{22}$  соизмеримы, так что

$$m_1\omega_{12} + m_2\omega_{22} = 0, \quad (10)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  обозначают целые числа, и для периода  $2T$  получим значение

$$2T = 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21}. \quad (10^*)$$

Если корни уравнений  $R(\lambda) = 0$  или  $S(\mu) = 0$  не будут простыми, то имеет место предельное движение.

\*) Выполненное Шарлье исследование условно-периодического характера движения в задаче двух неподвижных центров оказывается весьма важным для исследования устойчивости в смысле Арнольда [12]. (Прим. перев.)

Кроме этих случаев, при различных значениях  $h$  и  $\alpha$  могут встретиться только два случая, а именно: 1)  $\lambda$  или  $\mu$  получают постоянные значения или 2) движение невозможно.

Из определения величин  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$2\lambda = r + r', \quad 2\mu = r - r',$$

следует, что всегда должны выполняться следующие неравенства:

$$\lambda \geq c \geq \mu \geq -c. \quad (11)$$

$\lambda$  представляет собой также большую полуось эллипса, фокусы которого находятся в двух неподвижных центрах и который проходит через движущуюся точку;  $\mu$  обозначает аналогичную величину для гиперболы;  $2c$  представляет собой расстояние между фокусами.

Если  $\lambda = c$ , то это означает, что фокусы совпадают с концами большой оси эллипса, т. е. при  $\lambda = c$  эллипс вырождается в отрезок прямой  $K'K$ . Следовательно, при  $\lambda = c$  движущаяся точка, которую мы для краткости будем называть планетой, всегда находится на линии  $K'K$ .

Если, наоборот,  $\mu = c$ , то гипербола вырождается в ту часть оси  $X$ , которая лежит левее массы  $K'$ . Для  $\mu = -c$  получим соответствующую часть оси абсцисс правее массы  $K$ . При  $\mu = \pm c$  планета находится на одной из этих частей оси абсцисс.

Если  $\mu = 0$ , то гипербола совпадает с осью  $Y$ .

Если в начальный момент координаты планеты  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ , то согласно (5\*) должно быть

$$\left. \begin{aligned} L(\lambda_0) &= (K + K')\lambda_0 + h\lambda_0^2 + \alpha \geq 0, \\ M(\mu_0) &= (K - K')\mu_0 + h\mu_0^2 + \alpha \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

откуда следует, что  $\lambda_0$  и  $\mu_0$  должны удовлетворять также неравенствам (11). Соотношения (11) и (12) должны выполняться не только в начальный момент, но и всегда для всех соответствующих задаче пар значений  $(\lambda, \mu)$ .

Теперь перейдем к более детальному рассмотрению различных состояний движения. Представляется целесообразным различать следующие случаи \*):

- 1)  $h$  отрицательно,
- 2)  $h$  положительно,
- 3)  $h = 0$ ,
- 4) предельные движения;
- 5) чисто периодические движения.

В первом и во втором случаях мы предполагаем, что корни уравнений  $R(\lambda) = 0$  и  $S(\lambda) = 0$  являются простыми.

\*) При анализе качественных форм движения Шарлье допустил ряд неточностей, которые были позднее устранены в работах Тальквиста [13] и Бадаляна [14] — [15]. (Прим. перев.)

## § 2. Постоянная интеграла живых сил $h$ отрицательна. Случай либрации

Уравнение  $R(\lambda) = 0$  всегда имеет два корня  $\lambda = \pm c$ . Так как мы предполагаем здесь, что постоянная  $h$  отрицательна, то положим

$$h = -h_1, \quad (1)$$

где  $h_1$  обозначает положительную постоянную. Положим теперь

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda - h_1\lambda^2 + \alpha; \quad (2)$$

тогда согласно (12) § 1 всегда должно быть

$$L(\lambda) \geq 0. \quad (3)$$

Если бы  $\lambda$  неограниченно возрастало, то, очевидно, при достаточно больших значениях  $\lambda$  значение  $L(\lambda)$  стало бы отрицательным, что в силу (3) невозможно. Отсюда следует, что при отрицательных значениях  $h$  величина  $\lambda$  должна всегда иметь конечную верхнюю границу. В этом случае планета не может произвольно далеко отстоять от  $K$  и  $K'$ .

Пусть теперь  $r_1$  и  $r_2$  — корни уравнения  $L(\lambda) = 0$ ; тогда имеем

$$L(\lambda) = h_1(r_1 - \lambda)(\lambda - r_2), \quad (4)$$

где при действительных значениях  $r_1, r_2$  предполагается, что

$$r_1 > r_2. \quad (5)$$

Можно различать четыре случая:

$r_1$  и  $r_2$  комплексные,

$r_1$  и  $r_2$  действительные, но меньшие  $c$ ,

$r_1$  действительно и больше  $c$ ,

$r_1$  и  $r_2$  действительные и большие  $c$ .

Но первые два случая соответствуют одинаковому состоянию движения и могут быть рассмотрены одновременно. В обоих случаях знак  $L(\lambda)$  не изменяется, ибо не существует никаких других действительных корней, больших  $c$ . В обоих случаях  $L(\lambda)$  должно оставаться отрицательным, так как  $L(+\infty)$  отрицательно.

Следовательно, мы будем различать следующие три случая:

a)  $r_1$  и  $r_2$  либо комплексные, либо действительные, но меньшие  $c$ ,

b)  $r_1 > c > r_2$ ,

c)  $r_1 > r_2 > c$ .

Если положить

$$M(\mu) = (K - K')\mu - h_1\mu^2 + \alpha, \quad (6)$$

и обозначить корни уравнения

$$M(\mu) = 0 \quad (7)$$

через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , где для действительных корней  $\rho_1 > \rho_2$ , так что

$$M(\mu) = h_1(\rho_1 - \mu)(\mu - \rho_2),$$

то всегда будем иметь

$$M(\mu) \leq 0. \quad (8)$$

Здесь мы должны исследовать четыре случая:

- а)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные,
- б)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительные и по абсолютной величине большие  $c$ ,
- γ)  $\rho_1 > c > \rho_2 > -c$ ,
- δ)  $c > \rho_1 > \rho_2 > -c$ .

В γ) включен также случай

$$c > \rho_1 > -c > \rho_2,$$

который будет подробно разобран ниже.

Комбинируя каждый из случаев а), б) и с) с четырьмя последними, получим здесь 12 различных случаев, которые последовательно рассмотрим.

**С л у ч а й Iа.** Корни  $r_1$  и  $r_2$  либо комплексные, либо действительные и меньшие  $c$ .

Согласно (5\*) § 1 имеем

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)} L(\lambda). \quad (9)$$

Так как в этом случае  $L(\lambda)$  постоянно остается отрицательным и, кроме того,  $\lambda$  не может стать меньше, чем  $c$ , то этому уравнению можно удовлетворить только тогда, когда положим

$$\lambda \equiv c. \quad (10)$$

Планета всегда должна оставаться на линии  $K'K$ . Движение будет прямолинейным. В зависимости от значений  $\rho$  мы получим теперь:

**С л у ч а й Iаа.**  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные \*).

При всех действительных значениях  $\mu$  функция  $M(\mu)$  не изменяет знака и, следовательно, отрицательна, так как она оказывается отрицательной при достаточно больших значениях  $\mu$ .

\*) В реальных движениях этот случай не встречается. (Прим. перев.)

Имеем

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - c^2) M(\mu)}, \quad (11)$$

и так как  $M(\mu)$  отрицательно, то  $\mu$  должно было бы колебаться периодически между  $-c$  и  $+c$ . Но так как при  $\mu = \pm c$  и  $\lambda = c$  планета сталкивается с одной из масс  $K$  или  $K'$ , то дифференциальные уравнения теряют силу.

Значит, случай Iaа характеризуется тем, что в начальный момент планета находится на линии  $K'K$ , а ее начальная скорость направлена вдоль оси  $X$ . Планета движется в этом направлении до тех пор, пока не произойдет соударения с  $K'$  или  $K$ .

Случай Iaб.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительны и по абсолютной величине больше  $c$ .

Функция  $M(\mu)$  во время движения знака не меняет. Если  $M(\mu)$  отрицательна, то имеем такое же движение, как и в случае Iaа. Наоборот, если  $M(\mu)$  положительно, то из (11) следует, что  $\mu$  необходимо должно быть тождественно равным  $+c$  или  $-c$ . Тогда планета имеет те же самые координаты, как и одна из масс, и движение невозможно.

С л у ч а й Iaγ.  $\rho_1 > c > \rho_2 > -c^*$ .

Имеем

$$(\mu^2 - c^2) M(\mu) = (\mu^2 - c^2) h_1 (\rho_1 - \mu) (\mu - \rho_2). \quad (12)$$

Чтобы это выражение оставалось положительным, очевидно, должно быть

$$-c \leq \mu \leq \rho_2.$$

Если в начальный момент  $\dot{\mu}$  положительно, то  $\mu$  возрастает до значения  $\mu = \rho_2$ , затем возвращается и, наконец, сталкивается с массой  $K$ .

С л у ч а й Iaб.  $c > \rho_1 > \rho_2 > -c$ .

Из (12) следует, что имеем либо

$$-c \leq \mu \leq \rho_2,$$

либо

$$\rho_1 \leq \mu \leq c.$$

Планета сталкивается либо с  $K$ , либо с  $K'$ .

В качестве пятой возможности можно было бы рассмотреть случаи, когда

$$c > \rho_1 > -c > \rho_2,$$

который, очевидно, подобен случаю Iaγ, только планета здесь должна столкнуться с массой  $K'$  \*\*).

\*) Этот случай отпадает. (Прим. перев.)

\*\*\*) Этот случай также не реален. (Прим. перев.)

Мы обратимся теперь к следующему случаю.

С л у ч а й Ib.  $r_1 > c > r_2$ .

Из

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2) h_1 (r_1 - \lambda)(\lambda - r_2)} \quad (13)$$

следует, что

$$r_1 \geq \lambda \geq c.$$

Если  $d\lambda$  в начале движения положительно, то  $\lambda$  возрастает, достигает значения  $\lambda = r_1$ , затем начинает уменьшаться и уменьшается непрерывно до  $\lambda = c$ , после чего вновь возрастает. Значит, для  $\lambda$  имеет место случай либрации. Говоря языком геометрии, планета всегда должна находиться внутри эллипса, который имеет фокусами  $K'$  и  $K$ , и большая полуось которого равна  $r_1$ . Более точное описание движения зависит от значения корней  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

С л у ч а й Iba.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные.

Функция  $M(\mu)$  не меняет знака и остается отрицательной. Тогда из (11) следует, что  $\mu$  колеблется в границах между  $-c$  и  $c$ . Следовательно, имеет место либрация как для  $\lambda$ , так и для  $\mu$ , и мы можем применить здесь результаты об условно-периодических движениях. Траектория является либо замкнутой линией, имеющей примерно форму лембискаты, либо она повсюду плотно заполняет все пространство, ограниченное эллипсом  $\lambda = r_1$ .

Для элементарных периодов имеем здесь значения

$$\omega_{11} = \int_c^{r_1} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad \omega_{21} = \int_{-c}^c \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}},$$

$$\omega_{12} = \int_c^{r_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad \omega_{22} = \int_{-c}^c \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}.$$

Величины  $\lambda$  и  $\mu$  можно разложить в сходящиеся ряды Фурье по кратным обоим аргументов  $u_1$  и  $u_2$ , определенных при помощи (9) § 1.

С л у ч а й Ibв.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительны и по абсолютной величине больше  $c$ .

Функция  $M(\mu)$  не меняет знака во время движения. Если  $M(\mu)$  отрицательно, то этот случай совпадает с Iba. Если же  $M(\mu)$  положительно, то из (11) следует, что

$$\mu \equiv -c.$$

Движение происходит на той части оси  $X$ , которая лежит за массой  $K$  или  $K'$ , если исходить из начала координат. В конечном итоге планета столкнется с одной из масс.

С л у ч а й Iвγ.  $\rho_1 > c > \rho_2 > -c$ .

Как и в случае Iаγ, находим, что

$$-c \leq \mu \leq \rho_2.$$

Следовательно, имеет место либрация как по  $\mu$ , так и по  $\lambda$ . Траектория находится внутри области, расположенной вокруг  $K$ , которая ограничена эллипсом  $\lambda = r_1$  и гиперболой  $\mu = \rho_2$ . Движение является условно-периодическим. Для элементарных периодов  $\omega_{11}$  и  $\omega_{12}$  получаются те же самые выражения, как и в случае Iвγ, а значения остальных будут

$$\omega_{21} = \int_{-c}^{\rho_2} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}; \quad \omega_{22} = \int_{-c}^{\rho_2} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}.$$

Значит, здесь тело будет спутником массы  $K$ . Интересно заметить, что траектория спутника повсюду плотно заполняет область возможности движения, и поэтому нет никакой нижней границы для расстояния спутника от массы  $K$ . Но верхняя граница существует.

К этому случаю относится также тот, в котором

$$c > \rho_1 > -c > \rho_2.$$

Тело движется подобно спутнику вокруг массы  $K'$  \*).

С л у ч а й Iвδ.  $c > \rho_1 > \rho_2 > -c$ .

Тело становится спутником, который движется либо вокруг  $K'$  либо вокруг  $K$ . Рассмотрение аналогично предыдущему.

С л у ч а й Iвε.  $c > \rho_1 > \rho_2 > -c$ .

Тело будет спутником, который обращается либо вокруг  $K'$ , либо вокруг  $K$ . Исследование подобно тому, которое имеем в предыдущем случае.

С л у ч а й Iс.  $r_1$  и  $r_2$  больше  $c$ .

Из (13) следует, что либо  $\lambda \equiv c$ , и этот случай можно опустить, либо

$$r_2 \leq \lambda \leq r_1.$$

Движение происходит между двумя эллипсами, большие полуоси которых равны  $r_2$  и  $r_1$ . Величина  $\lambda$  обладает либрационным движением в границах между  $r_1$  и  $r_2$ . Более точное исследование движения зависит от значения корней  $c$  и  $-c$ .

С л у ч а й Iса.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные.

Как и в случае Iба,  $\mu$  колеблется в границах  $-c$  и  $+c$ . Планета движется по траектории, которая охватывает обе массы,  $K'$

\* ) Этот случай невозможен. (Прим. перев.)

и  $K$ , и является либо замкнутой, либо повсюду плотно заполняет пространство, ограниченное обоими эллипсами  $r_1$  и  $r_2$ .

С л у ч а й Iсв.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительны и по абсолютной величине больше  $c$ .

По предположению,  $r_1 > r_2 > c$  и

$$L(r_1) = L(r_2) = 0.$$

Так как  $L(+\infty)$  отрицательно, то должно быть

$$L(c) < 0,$$

т. е.

$$(K + K')c - h_1c^2 + a < 0.$$

Но

$$M(c) = (K - K')c - h_1c^2 + a < L(c).$$

Значит,  $M(c)$  также должно быть отрицательным. Но согласно предположению корни уравнения  $M(\mu) = 0$  оба действительны и численно больше  $c$ . Поэтому для движения, в котором всегда имеет место условие  $|\mu| \leq c$ ,  $M(\mu)$  должно быть отрицательным, и в соответствии с этим заключаем, что снова приходим к случаю Iса.

С л у ч а й Iсγ.  $\rho_1 > c > \rho_2 > -c$ .

Этот случай невозможен. Действительно, как и в предыдущем случае, находим, что

$$M(c) < L(c) < 0.$$

И, далее,

$$M(-c) < M(c).$$

Значит, функция  $M(\mu)$  обладает свойством, что при  $\mu = +c$  и  $\mu = -c$  она отрицательна. Но отсюда следует, что уравнение

$$M(\mu) = 0$$

между значениями  $\mu = -c$  и  $\mu = c$  имеет либо два корня, либо ни одного, что противоречит предположению.

Не может также существовать двух корней между этими границами. Обозначим через  $x$  какую-нибудь действительную и положительную величину, которая меньше  $c$ ; тогда, по предположению,  $L(x)$  отрицательна. Но теперь

$$M(x) - L(x) = -2K'x$$

и, таким образом,  $M(x)$  также должно быть отрицательным для всех положительных  $x$ , меньших  $c$ . С другой стороны,

$$M(-x) = -(K - K')x - h_1x^2 + a = M(x) - 2(K - K')x,$$

и так как здесь предполагается, что  $K > K'$ , то  $M(-x)$  также должно быть отрицательным.

Итак, если  $r_1 > r_2 > c$ , то между  $-c$  и  $+c$  не может быть никаких корней.

С л у ч а й Iсб, в котором  $c_1 > \rho_1 > \rho_2 > c$ , также не может иметь места.

### § 3. Постоянная $h$ положительна

Теперь перейдем ко второму важному случаю, именно к случаю, когда постоянная  $h$  положительна, и произведем такое же разбирание в зависимости от корней.

Так как теперь

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha, \quad (1)$$

и так как, согласно с природой движения,  $L(\lambda)$  всегда должно быть при  $\lambda > c$  положительным (или нулем), то отсюда следует, что  $\lambda$  может принимать произвольно большие значения. Необходимо даже, чтобы  $\lambda$  вместе со временем неограниченно возрастало. Так как

$$(\lambda^2 - \mu^2) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = 2(\lambda^2 - c^2)L(\lambda) = 2(\lambda^2 - c^2)h(\lambda - r_1)(\lambda - r_2), \quad (2)$$

или

$$(\lambda^2 - \mu^2) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = 2h(\lambda + c)(\lambda - c)(\lambda - r_1)(\lambda - r_2),$$

то находим, что  $\lambda$  должно быть либо больше всех трех корней

$$c, r_1, r_2,$$

либо меньше всех трех, если пока не рассматривать кратные корни. Но  $\lambda$  никогда не может быть меньше  $c$ , и, значит,  $\lambda$  всегда больше, чем наибольший из этих трех корней, или в крайнем случае равно этому корню. Если в начальный момент  $d\lambda$  отрицательно, то  $\lambda$  убывает и достигает этого наибольшего корня. Затем  $d\lambda$  меняет знак, и  $\lambda$  монотонно возрастает до бесконечности. Такого типа будут все движения, для которых  $h$  положительно. Здесь мы должны только определить минимальное значение  $\lambda$ . На движение, кроме того, влияют значения корней  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

С л у ч а й IIа.  $r_1$  и  $r_2$  либо комплексные, либо действительные и меньшие  $c$ .

Здесь нижняя граница  $\lambda$  равна  $c$ . В зависимости от корней  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , получаем:

С л у ч а й IIаа.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные.

$M(\mu)$  постоянно положительно, так как положительно  $M(\infty)$ . Тогда должно быть

$$\mu \equiv \pm c.$$

Планета движется вдоль оси  $X$  и сталкивается с одной из масс  $K$  или  $K'$ , или удаляется в бесконечность в зависимости от знака  $d\lambda$  в начальный момент.

С л у ч а й Шаб.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительны и по абсолютной величине больше  $c$ .

Если  $M(\mu)$  здесь положительно, то движение будет таким, как и в предыдущем случае. Если же  $M(\mu)$  отрицательно, то планета может один раз пересечь линию  $K'K$  и затем удалиться от  $K'K$  по осциллирующей кривой, в то время как  $\mu$  периодически колеблется между  $-c$  и  $+c$ .

С л у ч а й Шаг.  $\rho_1 > c > \rho_2 > -c$  (или  $c > \rho_1 > -c > \rho_2$ ). Планета делает один оборот вокруг  $K'$  (соответственно  $K$ ) и затем постепенно удаляется на бесконечность, в то же время она колеблется между отрицательной (соответственно положительной) частью оси  $X$  и гиперболой  $\mu = \rho_2$  (соответственно  $\mu = \rho_1$ ).

С л у ч а й Шад.  $c > \rho_1 > \rho_2 > -c$ .

Здесь  $\mu$  колеблется между значениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Планета пересекает линию  $K'K$  и удаляется на бесконечность, периодически колеблясь между гиперболами  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

С л у ч а й Шб.  $r_1 > c > r_2$ .

Здесь нижняя граница для  $\lambda$  равна  $r_1$ . Планета приближается к эллипсу  $\lambda = r_1$ , касается его и затем удаляется на бесконечность, в то время как  $\lambda$  непрерывно возрастает. Постоянная  $\alpha$  должна здесь быть отрицательной.

Оба корня,  $r_1$  и  $r_2$ , не могут быть при положительном  $h$  больше  $c$ . Имеем

$$r_1 = -\frac{K+K'}{2h} + \sqrt{\frac{(K+K')^2}{4h^2} - \frac{\alpha}{h}},$$

$$r_2 = -\frac{K+K'}{2h} - \sqrt{\frac{(K+K')^2}{4h^2} - \frac{\alpha}{h}}.$$

Если корни действительны, значит,  $r_2$  необходимо должно быть отрицательным.

С л у ч а й Шба. Корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные или действительные и по абсолютной величине больше  $c$ .

Здесь  $M(\mu)$  будет всегда отрицательным, так как отрицательно  $M(0) = \alpha$ . Величина  $\mu$  колеблется между  $-c$  и  $c$ . Планета, удаляясь, обращается вокруг масс  $K$  и  $K'$  по развертывающейся

кривой. Орбита является своего рода внешней развертывающейся спиралью.

С л у ч а й IIIв. Один или оба корня  $\rho_1$  и  $\rho_2$  меньше  $c$ , но больше  $-c$ .

Этот случай невозможен. Так как, по предположению,  $r_1 > c$ , и непосредственно очевидно, что модуль  $r_2$  больше модуля  $r_1$ , то  $r_2$  должно быть отрицательным и численно больше  $c$ . Функция  $L(x)$  не обращается в нуль ни при каких значениях  $x$ , которые заключены между  $-c$  и  $c$ , и для этих значений остается отрицательной. Теперь из уравнения

$$M(x) = L(x) - 2K'x$$

следует, что  $M(x)$  должно быть и для положительных  $x$  также отрицательным (и отличным от нуля). С другой стороны

$$M(-x) = M(x) - 2(K - K')x,$$

и поэтому  $M(-x)$  в упомянутой области также отрицательно. Следовательно, никакой из корней  $\rho_1$  и  $\rho_2$  не может лежать между  $-c$  и  $+c$ .

#### § 4. Постоянная $h$ равна нулю

Пусть теперь

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda + \alpha = (K + K')(\lambda - r),$$

$$M(\mu) = (K - K')\mu + \alpha = (K - K')(\mu - \rho).$$

Мы должны здесь различать в зависимости от значения  $r$  два случая, а именно:

1)  $r < c$ ,

2)  $r > c$ .

С л у ч а й IIIа.  $r < c$ .

Функция  $L(\lambda)$  во время движения остается положительной. Величина  $\lambda$  может монотонно убывать, пока она не достигнет значения  $\lambda = c$ . Затем  $\lambda$  начинает расти и непрерывно растет до бесконечности.

Пусть

$$r = -\frac{\alpha}{K + K'} < c,$$

$$\rho = -\frac{\alpha}{K - K'}.$$

Абсолютная величина  $\rho$  может быть здесь в зависимости от обстоятельств меньше или больше  $c$ .

С л у ч а й IIIa.  $|\rho| > c$ .

Здесь функция  $M(\mu)$  всегда остается отрицательной, и так как

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - c^2)M(\mu)},$$

то  $\mu$  должно периодически колебаться между  $-c$  и  $+c$ .

Планета один раз пересекает линию  $K'K$  и затем удаляется в бесконечность по раскручивающейся спирали, охватывающей линию  $K'K$ . Этот случай подобен IIb.

С л у ч а й IIIa.  $|\rho| < c$ .

Чтобы  $M(\mu)$  было отрицательным,  $\mu$  должно быть здесь меньше  $\rho$ . Величина  $\mu$  периодически колеблется между  $\rho$  и  $-c$ . Планета один раз пересекает линию  $KK'$  и удаляется в бесконечность, периодически колеблясь между гиперболой и положительной частью оси  $X$ . Движение очень своеобразно и неожиданно.

С л у ч а й IIIb.  $r > c$ .

Нижняя граница для  $\lambda$  здесь будет равна  $r$ , и движение совершается вне эллипса  $\lambda = r$ . Постоянная  $\alpha$  должна быть отрицательна ( $= -\alpha_1$ ) и, согласно предположению, имеем

$$\frac{\alpha_1}{K + K'} > c.$$

Должны также иметь

$$\rho = \frac{\alpha_1}{K - K'} > c,$$

так что следует рассмотреть только один случай.

С л у ч а й IIIa.  $r > c$ .  $\rho > c$ .

Во время движения  $M(\mu)$  остается всегда отрицательной и, таким образом,  $\mu$  периодически колеблется в границах между  $-c$  и  $+c$ . Планета касается эллипса  $r = c$  и удаляется в бесконечность по развертывающейся спирали, которая охватывает рассматриваемый эллипс.

## § 5. Кратные корни уравнения $R(\lambda) = 0$ или $S(\mu) = 0$ .

### Предельные движения

Если два корня совпадают, то возникает предельное движение. Будем различать следующие случаи:

A)  $r_1 = r_2 > c$ ,

B)  $r_1 > r_2 = c$ ,

C)  $r_1 = c > r_2$ ,

D)  $r_1 = c = r_2$ .

Различные случаи, в которых совпадают два корня уравнения  $S(\mu) = 0$ , мы рассмотрим позже.

С л у ч а й IVA.  $r = r_1 = r_2 > c$ .

Имеем

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)h(\lambda - r)^2}.$$

Для того чтобы движение было возможно, необходимо, чтобы  $h$  было положительно или  $\lambda = r$ . Последний случай мы исследуем позже. Предположим, следовательно, что  $h > 0$ .

Так как уравнение

$$(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha = 0$$

обладает двойным корнем  $\lambda = r$ , то

$$(K + K')r + hr^2 + \alpha = 0, \quad (K + K') + 2hr = 0,$$

значит,

$$r = -\frac{K + K'}{2h}.$$

Стало быть, корни должны быть отрицательны и поэтому не могут быть больше  $c$ . Если  $h$  отрицательно, то может встречаться только этот случай, и  $\lambda$  должно быть равным  $r$ . Он будет рассмотрен в следующем параграфе.

С л у ч а й IVB.  $r_1 > r_2 = c$ .

Здесь имеем

$$L(c) = (K + K')c + hc^2 + \alpha = 0$$

и

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = (\lambda - c) \sqrt{2h(\lambda + c)(\lambda - r_1)}.$$

Если  $h$  положительно, то должно быть  $\lambda > r_1$ , и мы приходим снова к случаю IIb.

Предположим, что  $h$  отрицательно ( $= -h_1$ ). Величина  $\lambda$  должна быть меньше  $r_1$  и с ростом времени асимптотически приближается к значению  $\lambda = c$ . Относительно значения корня  $\rho$  заметим, что

$$M(c) < L(c) = 0,$$

и, далее,

$$M(-c) = M(c) - 2(K - K')c < M(c).$$

Таким образом, функция  $M(\mu)$  при  $\mu = \pm c$  отрицательна, и либо оба корня  $\rho$  должны лежать между  $-c$  и  $+c$ , либо они должны находиться вне этих границ (или быть комплексными).

С л у ч а й IVBa.  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные, или действительные, и по абсолютной величине большие  $c$ .

Во время движения  $M(\mu)$  всегда остается отрицательным. Тогда величина  $\mu$  периодически колеблется в границах между

—  $c$  и  $+c$ . Планета описывает спираль, которая асимптотически приближается к линии  $K'K$ . Эта спираль ограничивается снаружи эллипсом  $\lambda = r_1$ .

С л у ч а й IVB $\beta$  \*). Корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительны и по абсолютной величине больше  $c$ .

Так как теперь

$$M(\mu) = h_1(\rho_1 - \mu)(\mu - \rho_2),$$

то, чтобы  $M(\mu)$  было отрицательно,  $\mu$  должно быть либо больше  $\rho_1$  или меньше  $\rho_2$ . В последнем случае  $\mu$  периодически колеблется между  $\rho_2$  и  $-c$ , а в предыдущем случае — между  $\rho_1$  и  $+c$ . Планета описывает маятникообразное движение около  $K'$  или  $K$  и при этом асимптотически приближается к линии  $K'K$ .

С л у ч а й IVC.  $r_1 = c > r_2$ .

Как и в предыдущем случае, теперь получим

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = (\lambda - c) \sqrt{2h(\lambda + c)(\lambda - r_2)}.$$

Так как здесь  $\lambda > r_2$ , то  $h$  должно быть положительным. Большая полуось эллипса  $\lambda$  может быть сколь угодно большой и с возрастанием времени асимптотически приближается к значению  $\lambda = c$ .

Для значения корня  $\rho$ , который здесь подвергается исследованию, получим, как и в предыдущем случае, неравенства

$$M(-c) < M(c) < L(c) = 0.$$

Так как  $M(\pm\infty)$  положительно, то находим, что

$$\rho_1 > c, \quad \rho_2 < -c.$$

Значит, функция  $M(\mu)$  не может во время движения менять знак, но остается отрицательной, и поэтому  $\mu$  колеблется между  $-c$  и  $+c$ . Движение подобно тому, которое исследовалось в случае IVBa, только здесь нет никакой верхней границы для  $\lambda$ .

С л у ч а й IVD.  $r_1 = r_2 = c$ .

Он невозможен по тем же самым причинам, которые были отмечены для случая IVA.

Мы переходим теперь к тем случаям, в которых имеются кратные корни уравнения

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = 0.$$

Функция  $S(\mu) = 0$  имеет четыре корня, и все они могут являться граничными точками области допустимых значений.

\* ) Случай B $\beta$  нереален. (Прим. перев.)

Таким образом, мы должны различать следующие случаи:

K)  $\rho_1 = \rho_2$ ,

L)  $\rho_1 = c$ ,

M)  $\rho_1 = -c$ ,

N)  $\rho_2 = c$ ,

O)  $\rho_2 = -c$ .

Кроме того, может случиться, что совпадают три корня:

P)  $\rho_1 = \rho_2 = c$ ,

Q)  $\rho_1 = \rho_2 = -c$ .

С л у ч а й VK.  $\rho_1 = \rho_2$ .

Здесь нужно предположить, что корень  $\rho$  лежит между  $-c$  и  $+c$ , так как иначе он не влиял бы на движение.

Пусть

$$S(\mu) = 2h(\mu^2 - c^2)(\mu - \rho)^2,$$

откуда следует, что либо  $h$  положительно, и тогда должно быть  $\mu^2 \equiv c^2$  \*) (в таком случае движение будет происходить вдоль оси  $X$ ), или  $h$  отрицательно ( $= -h_1$ ). Рассмотрим этот случай. Пусть

$$M(\mu) = (K - K')\mu - h_1\mu^2 + \alpha.$$

Так как  $\rho$  — двойной корень, то имеем

$$(K - K')\rho - h_1\rho^2 + \alpha = 0,$$

$$K - K' - 2h_1\rho = 0,$$

следовательно,

$$\rho = \frac{K - K'}{2h_1}. \quad (1)$$

Подставим это значение в первое из уравнений; тогда будет иметь место соотношение

$$(K - K')^2 + 4h_1\alpha = 0, \quad (2)$$

которому должны удовлетворять коэффициенты, так что  $\alpha$  — отрицательно ( $= -\alpha_1$ ). Пусть, далее,

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda - h_1\lambda^2 - \alpha_1,$$

и корни уравнения  $L(\lambda) = 0$  суть

$$r_{1,2} = \frac{K + K' \pm \sqrt{(K + K')^2 - 4\alpha_1 h_1}}{2h_1}.$$

Если под квадратным корнем вычтем величину  $(K - K')^2 + 4\alpha_1 h_1$ ,

\*) Случай  $\mu = \rho$  также может встретиться и позже будет исследован.

равную нулю, то получим

$$r_{1,2} = \frac{K + K' \pm 2\sqrt{KK'}}{2h_1} = \frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h_1}. \quad (3)$$

Теперь

$$\begin{aligned} (\sqrt{K} - \sqrt{K'})^2 &= K + K' - 2\sqrt{KK'} = K - K' + 2K' - 2\sqrt{KK'} = \\ &= K - K' + 2\sqrt{K'}(\sqrt{K'} - \sqrt{K}) < K - K', \end{aligned}$$

и, следовательно, имеем

$$r_2 < \frac{K - K'}{2h_1} < c. \quad (4)$$

Значит, только корень  $r$  может быть больше  $c$ . Мы должны здесь рассмотреть два случая:

С л у ч а й VKa.  $r_1 < c$ .

Здесь необходимо, чтобы

$$\lambda \equiv c;$$

тогда движение происходит на линии  $K'K$ , и планета при возрастании времени неограниченно приближается к точке  $\mu = \rho$  на этой линии, где  $\rho$  определяется формулой (1), причем это приближение может происходить как с одной, так и с другой стороны.

С л у ч а й VKb.  $r_1 > c$ .

Движение ограничивается эллипсом  $\lambda = r_1$ . Планета колеблется между этим эллипсом и линией  $K'K$ ; при этом она при монотонном увеличении или монотонном уменьшении  $\mu$  асимптотически приближается к гиперболе  $\mu = \rho$ .

С л у ч а й VL.  $\rho_1 = c > \rho_2$ .

Планета асимптотически приближается к линии  $K'\infty$ . Пусть

$$(K - K')c + hc^2 + \alpha = 0, \quad (5)$$

и тогда имеем

$$S(\mu) = 2h(\mu - c)^2(\mu - \rho_2)(\mu + c).$$

Если  $h$  отрицательно, то  $\mu$  должно колебаться между  $-c$  и  $\rho_2$ , и мы приходим к рассмотренному ранее в § 2 случаю \*). Если  $h$  положительно, тогда следует, что всегда должно быть  $\mu > \rho_2$ . Планета один раз касается гиперболы  $\mu = \rho_2$ , а затем асимптотически приближается к отрицательной части оси  $X$  (или параллельной к ней прямой).

Что касается корней  $r_1$  и  $r_2$ , то можно доказать, что они для положительных  $h$  не могут быть больше  $c$ . Действительно,

\*) Если  $\rho_2 < -c$ , то движение происходит на оси  $X$ .

согласно (5)

$$L(c) = (K + K')c + hc^2 + \alpha > 0,$$

и для всех  $\lambda$ , больших  $c$ , имеем

$$L(\lambda) > L(c).$$

Значит, функция  $L(\lambda)$  во время движения не меняет знака и постоянно остается положительной. Величина  $\lambda$  один раз принимает свое минимальное значение  $\lambda = c$ . Планета один раз пересекает линию  $K'K$  и асимптотически приближается к одной из прямых, параллельных оси  $X$ .

С л у ч а й VM.  $\rho_1 = -c > \rho_2$ .

Планета асимптотически приближается к положительной части оси  $X$ . Имеем

$$S(\mu) = 2h(\mu + c)^2(\mu - \rho_2)(\mu - c).$$

Так как  $\mu < c$ , то  $h$  должно быть отрицательным ( $= -h_1$ ). Вместе с тем,

$$M(-c) = -(K - K')c - h_1c^2 + \alpha = 0,$$

так что  $\alpha$  положительно.

Далее,

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda - h_1\lambda^2 + \alpha,$$

и, следовательно,  $L(c)$  положительно. Но так как  $L(\pm\infty)$  отрицательно, то, очевидно,

$$r_1 > c > r_2.$$

Область движения ограничивается эллипсом  $\lambda = r_1$ . Величина  $\lambda$  колеблется между  $\lambda = r_1$  и  $\lambda = c$ . Отрицательная часть оси  $X$ , с другой стороны от  $c$ , может пересекаться один раз, и орбита асимптотически приближается к положительной части оси  $X$  с маятниковоподобными колебаниями при монотонно уменьшающихся значениях  $\mu$ .

С л у ч а й VN.  $\rho_1 > \rho_2 = c$ .

Имеем теперь

$$S(\mu) = 2h(\mu - c)^2(\mu - \rho_1)(\mu + c).$$

Здесь  $h$  должно быть отрицательным ( $= -h_1$ ). Поэтому

$$M(c) = (K - K')c - h_1c^2 + \alpha = 0.$$

Отсюда следует, что  $L(c)$  положительно, и так как  $L(\pm\infty)$  будет отрицательным, то должно быть

$$r_1 > c > r_2.$$

Этот случай совпадает с предыдущим, только в этом случае планета теперь асимптотически приближается к отрицательной части оси  $X$ .

С л у ч а й VO.  $\rho_1 > \rho_2 = -c$ .

Планета приближается асимптотически к положительной части оси  $X$ . Иначе этот случай будет совпадать со случаем VL.

С л у ч а й VP.  $\rho_1 = \rho_2 = c$ .

Пусть

$$M(c) = (K - K')c + hc^2 + a = 0,$$

$$M'(c) = K - K' + 2hc = 0,$$

так что

$$c = -\frac{K - K'}{2h},$$

и отсюда следует, что  $h$  должно быть отрицательным ( $h = -h_1$ ). Как и в случае VK, далее находим

$$r_{1,2} = \frac{(V\bar{K} \pm V\bar{K}')^2}{2h_1},$$

так что, как и в указанном случае,

$$r_2 < c.$$

С другой стороны, находим, что здесь также всегда

$$r_1 > c.$$

Движение ограничено эллипсом  $r_1 = c$ , и орбита будет такой же, как и в случае VN.

Наконец, в с л у ч а е VQ

$$\rho_1 = \rho_2 = -c.$$

Здесь будет

$$-c = -\frac{K - K'}{2h},$$

так что  $h$  положительно. Справедливы те же самые выражения для  $r_1$  и  $r_2$ , как и в предыдущем случае, поэтому

$$r_{1,2} = -\frac{(V\bar{K} \pm V\bar{K}')^2}{2h},$$

и оба корня отрицательны.

Значит, функция  $L(\lambda)$  во время движения не изменяет своего знака и остается положительной, и так как

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = 2(\lambda^2 - c^2)L(\lambda),$$

то величина  $\lambda$  один раз уменьшается до своего минимального значения  $\lambda = c$ . Орбита один раз пересекает линию  $K'K$  и затем асимптотически приближается к прямой, параллельной оси  $X$ . Этот случай подобен случаю VM.

Из замечательных орбит, которые можно встретить в этой проблеме, наиболее своеобразные, пожалуй, относятся к случаям IIaγ и IIaδ, и они кажутся даже невероятными. Поэтому исследуем их несколько подробнее.

В случае IIa  $h$  положительно,  $r_1$  и  $r_2$  либо комплексные, либо действительные и меньшие  $c$ .

Исследуем те значения корней, которые могут встретиться. Имеем

$$r_{1,2} = \frac{-(K + K') \pm \sqrt{(K + K')^2 - 4ah}}{2h}$$

и

$$\rho_{1,2} = \frac{-(K - K') \pm \sqrt{(K - K')^2 - 4ah}}{2h}.$$

Сначала предположим, что  $r_1$  и  $r_2$  комплексные. Тогда имеем

$$(K + K')^2 < 4ah.$$

Значит,  $a$  должно быть положительным, и далее будем иметь

$$(K - K')^2 < 4ah.$$

Корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  также будут комплексными, и имеют место те же условия, что и в случае IIaα.

Во-вторых, предположим, что  $r_1$  и  $r_2$  действительны и меньше  $c$ . Тогда имеем

$$(K + K')^2 > 4ah$$

и

$$2hr_2 < 2hr_1 = \sqrt{(K + K')^2 - 4ah} - (K + K') < 2ch$$

или

$$(K + K' + 2ch)^2 > (K + K')^2 - 4ah > 0,$$

или

$$4ch(K + K') + 4c^2h^2 > -4ah,$$

где  $a$  может быть отрицательным. Можно разделить на  $4h$ , и тогда получим

$$(K + K')c + hc^2 > -a,$$

что можно также написать в виде  $L(c) > 0$ .

Случаи IIaγ и IIaδ предполагают, что  $\rho_1$  и  $\rho_2$  могут принимать действительные значения, и что одно или оба эти значения по абсолютной величине меньше  $c$ .

Если оба корня по абсолютной величине должны быть меньше  $c$ , то будем иметь

$$K - K' + \sqrt{(K - K')^2 - 4ha} < 2ch,$$

или

$$(K - K')^2 - 4ah < [2ch - (K - K')]^2,$$

откуда после преобразований получаем

$$-(K - K')c + hc^2 + a > 0,$$

что можно также записать в виде  $M(-c) > 0$ . Теперь, очевидно,

$$M(-c) = L(c) - 2Kc,$$

и возможно, что при  $L(c) > 0$  можем иметь также  $M(-c) > 0$ . Оба корня  $\rho_1$  и  $\rho_2$  могут быть действительны и численно меньше  $c$ .

Рассмотрим теперь соответствующие дифференциальные уравнения

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2h(\lambda^2 - c^2)(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)},$$

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2h(\mu^2 - c^2)(\mu - \rho_1)(\mu - \rho_2)},$$

где

$$c > r_1 > r_2, \quad c > \rho_1 > \rho_2 > -c.$$

Чтобы величины, стоящие под знаками квадратного корня, были положительны, величины  $\lambda$  и  $\mu$  должны, очевидно, удовлетворять следующим неравенствам:

$$\lambda \geq c, \quad \rho_1 \geq \mu \geq \rho_2.$$

Положим

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\sqrt{2h(\lambda + c)(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)}}{\lambda^2 - \mu^2},$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{\sqrt{2(c^2 - \mu^2)h}}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Подкоренные выражения никогда не могут обратиться в нуль, и поэтому вспомогательные величины  $w_1$  и  $w_2$  монотонно возрастают вместе со временем.

Далее, имеем

$$\frac{d\lambda}{dw_1} = \sqrt{\lambda - c},$$

$$\frac{d\mu}{dw_2} = \sqrt{(\rho_1 - \mu)(\mu - \rho_2)},$$

и отсюда интегрированием получаем

$$\lambda = c + \frac{1}{4} w_1^2,$$

$$\mu = \rho_1 \cos^2 \frac{w_2}{2} + \rho_2 \sin^2 \frac{w_2}{2}.$$

Планета колеблется между двумя гиперболами,  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , и одновременно монотонно удаляется в бесконечность.

Следовательно, случай IIaб существует. Что же касается случая IIaв, то он содержится в IIIaв.

### § 6. Периодические движения

Движения, периодические во времени, могут встретиться в случаях, рассмотренных в § 2, если выполнены условия (10) § 1. Кроме того, движение будет периодическим, если тело движется по кривой  $\lambda = \text{const}$ , а также при условии, что орбита определяется уравнением

$$\mu = \text{const}.$$

Сначала рассмотрим эти случаи.

С л у ч а й VIa.  $\lambda = \text{const}$ .

Так как

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2) L(\lambda)}, \quad (1)$$

то очевидно, что  $\lambda$  либо равно  $c$ , либо совпадает с корнем уравнения

$$L(\lambda) = 0. \quad (2)$$

В первом случае тело движется вдоль линии  $K'K$ , и мы уже знаем, что при этом могут встретиться только три случая: либо имеет место соударение с одной из притягивающих масс, либо планета асимптотически приближается к некоторой точке на линии  $K'K$  (VKa), либо планета удаляется в бесконечность. Эти случаи мы можем опустить.

Остается еще упомянуть о случае, в котором  $\lambda$  совпадает с одним из корней  $r_1$  или  $r_2$ . Если  $r_1 > c > r_2$ , то  $\lambda$  не может тождественно совпадать с  $r_1$ . Известно, что для отрицательных  $h$  должна быть либрация по  $\lambda$  между  $r_1$  и  $c$  (случай Ib), а для положительных  $h$   $\lambda$  возрастает до бесконечности (случай IIb).

Если  $r_1 > r_2 > c$ , то  $h$  необходимо должно быть отрицательным, так как для положительных  $h$  по крайней мере один корень должен быть отрицательным. Поэтому имеем

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2h_1(\lambda^2 - c^2)(r_1 - \lambda)(\lambda - r_2)}. \quad (3)$$

Если мы исключим случай  $\lambda \equiv c$ , то всегда будет иметь место либрационное движение между  $r_1$  и  $r_2$ , и  $\lambda$  может оставаться постоянным только при единственном условии, что

$$r_1 = r_2.$$

Так как здесь будет двойной корень, то должно быть

$$(K + K')^2 - 4ah = 0 \quad (4)$$

и, следовательно,

$$(K - K')^2 - 4ah < 0,$$

так что  $\rho_1$  и  $\rho_2$  будут комплексными. В соответствии с этим, величина  $\mu$  колеблется между  $-c$  и  $+c$ , и движение происходит по эллипсу  $\lambda = r$ , где (согласно IVA) будет

$$r = \frac{K + K'}{2h_1}. \quad (5)$$

Всегда имеется особое решение дифференциального уравнения (3):

$$\lambda = r_1 \quad \text{или} \quad \lambda = r_2.$$

Находим, что вторая производная от  $\lambda$  по времени имеет конечное значение. Если, однако,  $\lambda = r$  обозначает двойной корень, то не только вторая производная, но и все производные высших порядков также при  $\lambda = r$  тождественно равны нулю.

С л у ч а й VIb.  $\mu = \text{const.}$

Если не принимать во внимание случаи  $\mu = \pm c$  и если  $\mu$  должно быть постоянным, то дифференциальное уравнение

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2h(\mu^2 - c^2)(\mu - \rho_1)(\mu - \rho_2)} \quad (6)$$

должно удовлетворяться только значениями  $\mu = \rho_1 = \rho_2 = \rho$ .

С л у ч а й VIba. Для отрицательных  $h (= -h_1)$  имеем

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2h_1(c^2 - \mu^2)(\mu - \rho)^2},$$

и в этом случае  $\mu = \rho$  является неустойчивым решением.

Так как  $\rho$  — двойной корень, то имеем

$$\rho = \frac{K - K'}{2h_1} < c \quad (7)$$

и, кроме того,

$$(K - K')^2 - 4ah = 0. \quad (8)$$

Далее,

$$r_{1,2} = \frac{-(K + K') \pm \sqrt{(K + K')^2 - 4ah}}{2h}$$

или, по (8),

$$r_{1,2} = \frac{-(K + K') \pm 2\sqrt{KK'}}{2h} = \frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h_1}.$$

Таким образом,

$$\rho = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что  $r_1$  и  $r_2$  одновременно не могут быть больше  $c$ . Однако возможно, что

$$r_1 > c > r_2.$$

Теперь имеем

$$L(\lambda) = h_1 (r_1 - \lambda) (\lambda - r_2),$$

и  $\lambda$  будет колебаться между  $r_1$  и  $c$ .

В этом случае планета будет совершать маятникообразные движения вдоль гиперболы

$$\mu = \frac{K - K'}{2h_1}.$$

Если  $K = K'$ , то  $\mu = 0$ , и планета колеблется вдоль оси  $Y$ , вблизи начала координат по обе стороны.

**С л у ч а й VIбβ.** Если  $h$  положительно, то для совпадающих значений  $\rho$  получим

$$\rho = -\frac{K - K'}{2h},$$

$$r_{1,2} = -\frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h}.$$

Таким образом, здесь оба корня  $r$  будут отрицательны. Функция  $L(\lambda)$  остается во время движения положительной. Величина  $\lambda$  возрастает до бесконечности. В этом случае планета уходит в бесконечность по гиперболе

$$\rho = -\frac{K - K'}{2h}.$$

Если элементарные периоды  $\omega_{12}$  и  $\omega_{22}$  имеют такие значения, что

$$m_1 \omega_{12} + m_2 \omega_{22} = 0,$$

где  $m_1$  и  $m_2$  обозначают целые числа, то будут иметь место периодические орбиты. Числа  $m_1$  и  $m_2$  имеют разные знаки, так как  $\omega_{12}$  и  $\omega_{22}$  можно выбрать положительными. Лучше записать

$$m_1 \omega_{12} - m_2 \omega_{22} = 0, \quad (10)$$

где теперь  $m_1$  и  $m_2$  обозначают положительные числа. Затем для соответствующего периода получаем значение

$$2T = 2m_1\omega_{11} - 2m_2\omega_{21}. \quad (11)$$

Примем теперь для постоянной интегрирования  $h$  положительное значение, тогда уравнение (10) будет выполняться для бесконечного ряда дискретных значений другой постоянной интегрирования  $\alpha$  и обратно. Таким образом, будет  $\infty^2$  периодических траекторий.

Чем меньше числа  $m_1$  и  $m_2$ , тем «проще» будет соответствующее периодическое движение. Орбита оказывается наиболее простой, если  $m_1 = m_2 = 1$ . Вообще постоянные интегрирования можно выбрать так, чтобы имел место этот случай. Так, например, может быть в случаях I $\nu$  и I $\alpha$ . Мы получим периодическую орбиту, которая не пересекает сама себя. Однако в случае I $\beta$  такой выбор едва ли возможен. Очевидно, наименьшими значениями для  $m_1$  и  $m_2$  здесь будут  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ .

Рассмотрим отношение

$$\nu = \frac{\omega_{12}}{\omega_{22}},$$

которое можно считать меньшим единицы (в противном случае это будет иметь место для  $\frac{\omega_{22}}{\omega_{12}}$ ), тогда движение будет периодическим, если  $\nu$  является рациональным числом. Так как на сколь угодно малом отрезке всегда найдется бесчисленное множество рациональных чисел, каким бы малым ни был выбран этот отрезок, то периодические орбиты будут распределены всюду плотно среди орбит, для которых имеет место  $0 < \nu < 1$ . Таким образом, необходимо придавать  $\nu$  бесконечно малые изменения, чтобы отделять произвольные периодические орбиты от соседних, непериодических орбит.

Бесконечное множество элементов называется счетным по Кантору, если можно пронумеровать его элементы так, что ни один элемент не будет пропущен. Рациональные числа между нулем и единицей образуют счетное множество; действительно, их можно записать в следующем порядке:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6},$$

так что последовательно записываются те числа, знаменатели которых 2, 3, 4, 5, 6, . . . и т. д., и для каждого знаменателя числителю придаются значения 1, 2, 3, и т. д., за исключением таких значений, для которых числитель и знаменатель не являются взаимно простыми.

Периодические орбиты образуют счетное множество, что, наоборот, не имеет места для случая непериодических орбит.

Множество последних, по терминологии Кантора, имеет более высокую мощность, чем множество периодических кривых. Если рассматривать непериодические орбиты, то согласно § 2 гл. II эллиптические координаты  $\lambda$  и  $\mu$ , а следовательно, также и расстояния  $r$  и  $r'$  планеты от притягивающих масс, можно разложить в ряды Фурье в форме

$$\sum_{i_1, i_2 = -\infty}^{+\infty} C_{i_1, i_2} \cos (i_1 u_1 + i_2 u_2). \quad (12)$$

Эти ряды равномерно сходятся, а  $u_1$  и  $u_2$  являются линейными функциями времени:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= n_1 t + \gamma_1, \\ u_2 &= n_2 t + \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\pi \omega_{22}}{\Omega}, \\ n_2 &= -\frac{\pi \omega_{12}}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Можно произвести некоторые интересные исследования этих рядов, которые представляют большой интерес для решения задачи трех тел. Для построения рядов (12) можно использовать приближенные методы, которые употребляются в «теории возмущений». Рассмотрим, например, спутниковый случай Ib $\delta$ , в котором движущееся тело должно оставаться в окрестности массы  $K$ , и предположим, что масса  $K'$  сравнительно мала, тогда можно для получения выражений для координат использовать разложения по степеням малой массы  $K'$ . При определении методом последовательных приближений значений коэффициентов  $C_{i_1, i_2}$  пришлось бы преодолевать трудности, возникающие за счет малых делителей, имеющих вид  $i_1 n_1 + i_2 n_2$  (о которых впоследствии будем говорить), и ряды (12) не были бы равномерно сходящимися, хотя это и имеет место для истинных рядов (12). Можно было бы заранее сказать, почему должны возникать такие трудности. Объяснение этого, видимо, кроется в том, что, как было доказано в § 3 гл. II, для расстояния  $r$  от тела  $K$  не существует никакой нижней границы, отличной от нуля. Поэтому не существует также никакого среднего значения этого расстояния в том смысле, в каком это понятие используется в теории возмущений.

Возможно, что в подобных обстоятельствах и следует искать объяснение вопроса сходимости рядов теории возмущений.

## § 7. Сопоставление различных типов орбит, встречающихся в задаче двух неподвижных центров

1. **Прямолинейное движение.** Планета движется вдоль отрезка  $K'K$  или на его продолжении.

Планета движется в начальном направлении до тех пор, пока она не столкнется с одной из масс ( $Ia\alpha$ ,  $Ia\beta$ ,  $IIa\alpha$  и др.),

или планета движется в начальном направлении, пока она не достигнет определенной точки, затем возвращается и сталкивается через некоторый промежуток времени с массой ( $Ia\gamma$ ,  $Ia\delta$  и др.), или удаляется на бесконечность вдоль оси  $X$  ( $IIa\alpha$ ),

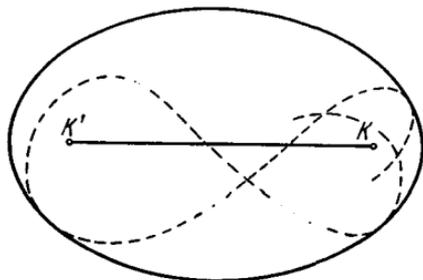


Рис. 2.

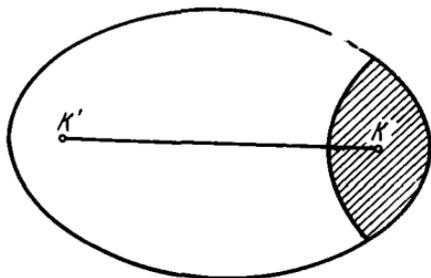


Рис. 3.

или приближается неограниченно к точке, расположенной между  $K'$  и  $K$ , не достигая ее за конечный промежуток времени ( $VKa$ ).

2. **Лемнискатоподобное движение.** Если движение не является периодическим, то орбита заполняет повсюду плотно всю область, заключенную внутри эллипса ( $Ib\alpha$ ,  $Ib\beta$ ; рис. 2).

3. **Спутниковое движение.** Планета движется внутри ограниченной области, в которой находится одна из масс  $K$  или  $K'$ . Границами этой области служат дуги эллипса и гиперболы. Орбита является или периодической или повсюду плотно заполняет упомянутую область ( $Ib\gamma$ ,  $Ib\delta$ ; рис. 3).

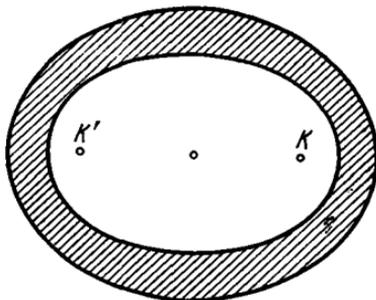


Рис. 4.

4. **Планетное движение.** Планета движется (подобно внешней планете) в области, ограниченной двумя софокусными эллипсами. Орбита либо периодическая, в случае когда оба эллипса сливаются, либо повсюду плотно заполняет соответствующую область ( $Ic\alpha$ ,  $Ic\beta$ ; рис. 4).

5. Расходящееся маятниковое движение. Планета удаляется в бесконечность от обоих центров, совершая маятникообразные колебания между ветвями гиперболы по обе стороны оси  $X$  (IIау, IIIаф; рис. 5).

6. Гиперболическое синусоидальное движение. Планета удаляется в бесконечность, совершая периоди-

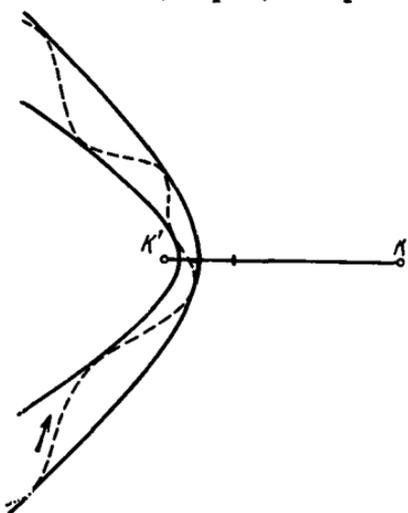


Рис. 6.

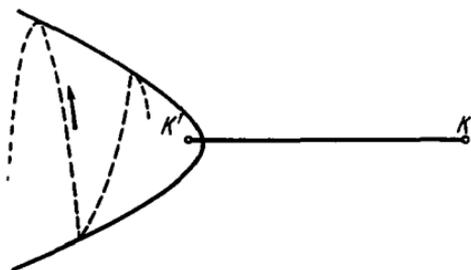


Рис. 5.

ческие колебания между двумя софокусными гиперболами (IIаб; рис. 6).

7. Расходящееся спиральное движение. Планета удаляется в бесконечность, совершая вокруг линии  $K'K$  обходы все возрастающих размеров (IIаф, IIба, IIIаа, IIIба; рис. 7).

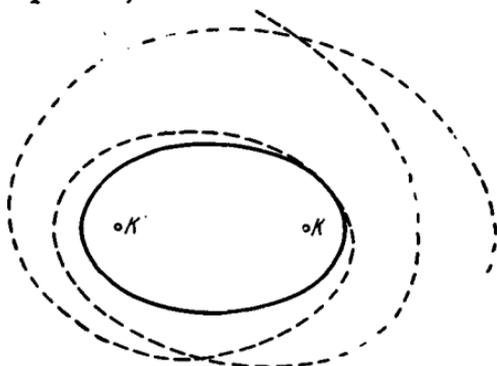


Рис. 7.

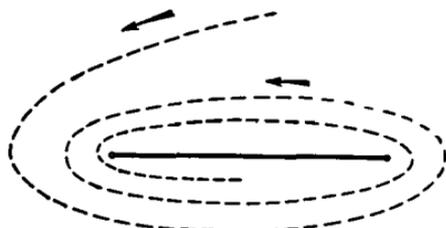


Рис. 8.

8. Сходящееся спиральное движение. Планета асимптотически приближается к отрезку  $K'K$ , обращаясь вокруг него, но не достигая его в конечный момент времени (IVBa, IVc; рис. 8).

9. Сходящееся маятниковое движение. Совершая маятниковоподобные колебания по обе стороны от оси  $X$ ,

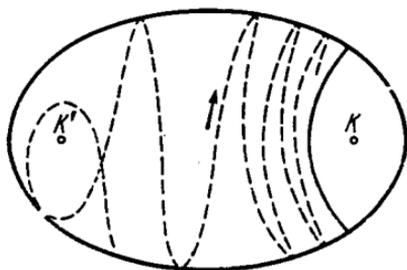


Рис. 9.

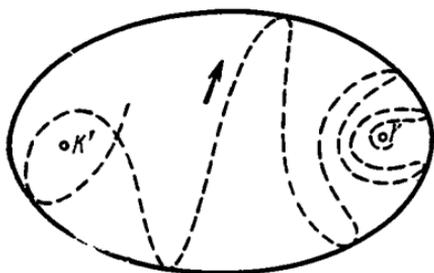


Рис. 10.

планета асимптотически приближается либо к гиперболе ( $VKb$ ), либо к оси  $X$ , не достигая этих границ за конечное время ( $VKb$ ,  $IVB\beta$ ,  $VM$ ,  $VN$ ,  $VP$ ; рис. 9 и 10).

10. Асимптотически-прямолинейное движение. Планета асимптотически приближается к прямой, параллельной оси  $X$  ( $VL$ ,  $VO$ ; рис. 11).

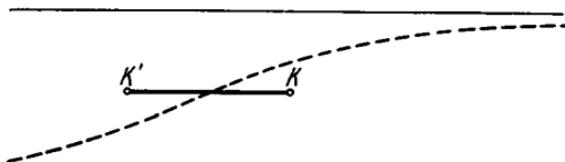


Рис. 11.

11. Эллиптическое движение. Планета движется в определенном направлении по эллипсу, уравнение которого

$$\lambda = \frac{K + K'}{2h_1}$$

(случай  $VIa$ ).

12. Гиперболическое движение. Планета движется вдоль гиперболы либо так, что она удаляется в бесконечность, и фокус этой гиперболы лежит в большей массе  $K$ , либо так, что она маятникообразно колеблется вдоль гиперболы около оси  $X$ , и фокус этой гиперболы лежит в меньшей массе  $K'$  ( $VIa$ , рис. 12).

Все рассмотренные здесь типы движения, за исключением случая VIa, являются устойчивыми и не могут перейти при бесконечно малом изменении постоянных интегрирования ( $h$  и  $\alpha$ ) из одного типа в другой.

Введенные выше наименования для различных форм движения не всегда дают адекватное описание соответствующей орбиты.

За более точным описанием мы отсылаем читателя к предыдущим параграфам.

В своей классической работе об эллиптических интегралах Лежандр посвятил подробные исследования проблеме двух неподвижных центров [15]. При этом он ограничился случаем, когда  $h < 0$ , в котором, как мы видели, орбиты лежат в ограниченной области.

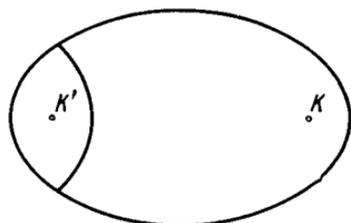


Рис. 12.

Среди возможных здесь движений он рассматривал типы 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12. Сходящееся маятниковобразное движение 9 он рассматривал только для случая, когда планета асимптотически приближается к оси  $X$  (см. рис. 10). Общий случай (см. рис. 9), в котором планета асимптотически приближается к гиперболу, он не заметил. Любопытно, что Лежандру было известно важное свойство неперiodических орбит заполнять повсюду плотно область возможности движения. По крайней мере он определенно упомянул об этом относительно планетного движения типа 4.

Прямолинейное движение было изучено Лежандром в предположении, что планета может проходить через массы  $K$  и  $K'$ . Полезно считать, что движение заканчивается соударением, так как здесь утрачивается физический смысл движения и дифференциальные уравнения теряют силу.

Лежандр основывается при рассмотрении этой проблемы на своих глубоких исследованиях эллиптических интегралов. Но эти рассмотрения оказываются неоправданно громоздкими и трудными.

В сравнении с этим, как мы видели, выполненное рассмотрение движения оказалось почти не связанным с выкладочной работой и без громоздких формул. Если бы вместо интегралов Лежандра мы захотели ввести эллиптические функции, то это не принесло бы никакой пользы. Это излишне при рассмотрении форм движения, а для вычисления значений координат для произвольного момента времени это слишком окольный путь, так как достаточно выразить не координаты через время, а время через координаты. А координаты через время задаются формулами (12), и коэффициенты в рядах могут быть всегда сравнительно легко вычислены.

## § 8. Примеры

Хотя в природе неизвестно ни одного примера, в котором движение тела определяется притяжением к двум неподвижным центрам, но все же встречаются различные случаи, когда речь идет о трех телах, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, в которых представляется справедливым предположить, что проблему двух неподвижных центров можно выбрать в качестве приближения при изучении орбит.

Например, такой случай встретился бы, если мы бы захотели исследовать движение малого тела, которое с большой скоростью проходит через двойную систему.

В нашей планетной системе также не исключены примеры, в которых возможно подобным образом получить приближение к истинной орбите. Рассмотрим, например, систему, которая состоит из Солнца, планеты и принадлежащего ей спутника; тогда угловую скорость планеты вокруг Солнца можно считать весьма малой, если спутник расположен достаточно близко к планете, и, таким образом, по крайней мере на коротких промежутках времени, можно было бы считать Солнце неподвижным, а спутник притягиваемым двумя неподвижными центрами. Если иметь дело с движением малой планеты под действием притяжения Солнца и большой планеты — Юпитера или Сатурна, — то, как будет показано в одной из следующих глав, координаты планеты можно разложить в ряды по степеням угловой скорости большой планеты и затем воспользоваться методом последовательных приближений, выбрав проблему двух неподвижных центров в качестве первого приближения. Хотя сходимость этих приближений не была исследована, тем не менее представляет интерес проверить орбиты, которые получились бы в первом приближении.

Предположим, что тело находится на линии центров между Солнцем  $K$  и планетой  $K'$ , и что оно в начальный момент будет удаляться с перпендикулярной к этой линии скоростью, причем  $K$  и  $K'$  будем считать покоящимися; его движение должно исследоваться в предположении, что тело будет притягиваться к  $K$  и  $K'$  по закону Ньютона.

Сначала мы должны определить постоянные интегрирования  $h$  и  $\alpha$ , а затем вычислить корни  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ .

Согласно формулам (6) и (5\*) § 1 имеем следующие формулы для вычисления  $h$  и  $\alpha$ :

$$h = \frac{1}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \left[ \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2} \right] - \frac{(K + K') \lambda}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{(K - K') \mu}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)^2 \dot{\lambda}^2}{2(\lambda^2 - c^2)} - (K + K') \lambda - h \lambda^2, \quad (2)$$

или

$$-\alpha = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)^2 \dot{\mu}^2}{2(c^2 - \mu^2)} + (K - K')\mu + h\mu^2. \quad (2^*)$$

Чтобы получить значения  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  и  $\dot{\lambda}_0$ ,  $\dot{\mu}_0$ , мы должны в этих формулах подставить значения  $h$  и  $\alpha$  для начального момента.

Выберем единицу длины так, чтобы  $c = 1$ . Тогда расстояние  $K'K$  будет равно 2. Если тело в начальный момент находится на расстоянии  $a$  от  $K'$ , то

$$\lambda_0 = 1, \mu_0 = 1 - a. \quad (3)$$

Чтобы вывести значения производных  $\dot{\lambda}_0$  и  $\dot{\mu}_0$ , воспользуемся уравнениями (1) § 7; так как согласно сделанным предположениям

$$\dot{x}_0 = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} \mu_0 d\lambda_0 + \lambda_0 d\mu_0 &= 0, \\ \sqrt{c^2 - \mu_0^2} \frac{\lambda_0 d\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 - c^2}} - \sqrt{\lambda_0^2 - c^2} \frac{\mu_0 d\mu_0}{\sqrt{c^2 - \mu_0^2}} &= dy_0, \end{aligned}$$

или, в соответствии с полученными для  $\lambda_0$  и  $\mu_0$  значениями,

$$\begin{aligned} (1 - a) \dot{\lambda}_0 + \dot{\mu}_0 &= 0, \\ \sqrt{1 - (1 - a)^2} \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\lambda_0^2 - 1}} &= \dot{y}_0. \end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь

$$\dot{\lambda}_0 = \dot{\mu}_0 = 0 \quad (4)$$

и

$$\frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\lambda_0^2 - 1}} = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{1 - (1 - a)^2}}. \quad (4^*)$$

Если подставить значения (3), (4) и (4\*) в (1) и (2), то

$$h = \frac{1}{2} \dot{y}_0^2 - \frac{K}{2 - a} - \frac{K'}{a}, \quad (5)$$

$$-\alpha = (K - K')(1 - a) + h(1 - a)^2. \quad (5^*)$$

Если значения масс  $K$  и  $K'$ , расстояние  $a$  и начальная скорость  $\dot{y}_0$  заданы, то значения  $h$  и  $\alpha$  могут быть определены.

Относительно  $a$  мы сделаем два различных предположения, одно из которых соответствует случаю, когда речь идет о планете, движущейся между Солнцем и возмущающей планетой, а другой соответствует спутниковому случаю.

Сначала заметим, что уравнение (5\*) можно записать в следующей форме:

$$M(1 - a) = 0,$$

где  $M(\mu)$  — то же самое обозначение, что и в предыдущих параграфах. Следовательно, один из корней  $\rho_1, \rho_2$  равен  $1 - a$ , т. е. равен тому значению, которое имеет  $\mu$  в начальный момент. Граница области, допустимой для орбиты, таким образом, проходит через ту же точку, в которой траектория (в начальный момент) пересекает линию  $K'K$  под прямым углом.

Чтобы получить простой пример астероидного движения, положим \*)

$$a = 1.$$

Тогда согласно (5\*)

$$\alpha = 0, \quad h = \frac{1}{2} \dot{y}_0^2 - K - K'. \quad (6)$$

Определим начальную скорость  $\dot{y}_0$  таким образом, чтобы астероид двигался вокруг Солнца  $K$  по кругу, если прекратится притяжение планеты  $K'$ . Как и в предыдущем параграфе, будет

$$\dot{y}_0^2 = \frac{K}{r} = K, \quad (7)$$

так что

$$h = -\frac{1}{2} K - K'. \quad (8)$$

Для определения границы области возможности движения согласно предыдущим параграфам нужно вычислить корни уравнений

$$L(\mu) = 0$$

и

$$M(\mu) = 0.$$

Так как  $\alpha = 0$ , то

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (K + K') \lambda + h\lambda^2, \\ M(\mu) &= (K - K') \mu + h\mu^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (K + K') \lambda - \left(\frac{1}{2} K + K'\right) \lambda^2, \\ M(\mu) &= (K - K') \mu - \left(\frac{1}{2} K + K'\right) \mu^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2(K + K')}{K + 2K'}, & r_2 &= 0, \\ \rho_1 &= \frac{2(K - K')}{K + 2K'}, & \rho_2 &= 0. \end{aligned}$$

\*) Это примерно соответствовало бы малой планете, которая находится на среднем расстоянии астероидов и возмущается Юпитером.

В обозначениях предыдущих параграфов

$$r_1 > c > r_2, \rho_1 > c > \rho_2 > -c,$$

и мы приходим к случаю Iв § 2. Для  $\lambda$  и  $\mu$  теперь находим следующие границы:

$$\frac{2(K+K')}{K+2K'} \geq \lambda \geq 1,$$

$$0 \geq \mu \geq -1.$$

Движение является либрационным. Для  $\mu = 0$  получаем отрезок  $AOB$  оси  $Y$ . Большая полуось эллипса  $\lambda = \frac{2(K+K')}{K+2K'}$  прибли-

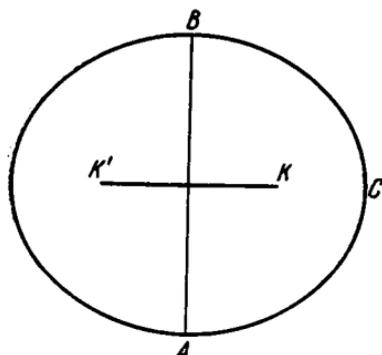


Рис. 13.

женно равна 2, так как масса  $K'$  мала. Движение происходит внутри области  $ABC$ , которую траектория будет заполнять всюду плотно. Любопытно, что граница области возможности движения при любых значениях  $K'$  всегда образуется осью  $Y$ .

Перейдем теперь ко второму случаю, в котором малое тело, очень близкое к планете, будет удаляться от линии  $K'K$  в перпендикулярном к ней направлении. Предположим, что тело обладает такой начальной скоростью, что оно двигалось бы вок-

руг  $K'$  по кругу, если бы можно было пренебречь притяжением Солнца; тогда будем иметь

$$\dot{y}_0^2 = \frac{K'}{a}$$

и значит,

$$h = -\frac{K}{2-a} - \frac{K'}{2a}, \quad (9)$$

где  $a$  обозначает малую величину.

Двигается ли тело вокруг  $K$  или вокруг  $K'$ ? Чтобы решить это, мы должны вычислить корни  $r_1, r_2, \rho_1, \rho_2$ . Имеем

$$M(\mu) = (K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha,$$

$$M(1-a) = (K - K')(1-a) + h(1-a)^2 + \alpha = 0,$$

так что если  $M(1-a)$  вычтем из  $M(\mu)$ , то

$$M(\mu) - M(1-a) = [K - K' + h(\mu + 1 - a)] [\mu - (1-a)].$$

Большая полуось гиперболы, ограничивающей область, внутри которой может двигаться тело, равна  $1-a$ . Если, далее, имеется гипербола, расположенная ближе к  $K$ , то тело должно двигаться

вокруг  $K'$ . Условие того, что тело будет спутником  $K'$ , таково:

$$-\frac{K - K' + h(1 - a)}{h} < 1 - a,$$

или, если подставить значение  $h$ ,

$$\frac{K'}{a^2} > \frac{K}{2 - a}. \quad (10)$$

Для Луны

$$K = 320\,000 K',$$

$$200a = 1,$$

и поэтому находим, что здесь

$$\frac{K'}{a^2} < \frac{K}{2 - a},$$

следовательно, тело, которое находилось бы на расстоянии Луны, согласно с высказанными условиями, двигалось бы вокруг Солнца, а не вокруг Земли, если последние рассматривать неподвижными. Это относится также и к тому случаю, когда вместо сидерической угловой скорости Луны используется синодическая.

На первый взгляд это кажется странным. Можно было бы ожидать, что тело будет двигаться вокруг Земли. Однако при ближайшем рассмотрении находим, что результат не мог быть другим, так как именно здесь опускается притяжение Земли Солнцем. Прямое притяжение Луны Солнцем на самом деле почти вдвое больше прямого притяжения Луны Землей. Неравенство (10) может быть просто выражено следующим образом: тело движется вокруг Солнца, если удвоенная сила больше силы притяжения планетой.

Таким образом, для Луны нельзя использовать задачу двух неподвижных центров в качестве первого приближения.

Если бы вместо этого взять, например, внутреннего спутника Марса — Фобос, то мы бы нашли, что притяжение Фобоса Марсом в 200 раз больше притяжения этого спутника Солнцем. Для спутников Нептуна притяжение центральной планеты в 8000 раз больше прямого притяжения Солнца. В этих случаях Солнце в первом приближении можно считать неподвижным\*).

\* При изучении движения комет в сфере действия Юпитера, а также в задачах механики космического полета с малой постоянной тягой, может быть использован предельный вариант задачи двух неподвижных центров, в котором один из притягивающих центров удаляется в бесконечность. Подобный подход излагается в работах В. Г. Дёмнина [16], В. В. Белецкого [17], А. Л. Куницына [18]. (Прим. перев.)

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

§ 1. Общие соображения

Если начало координат поместить в одну из масс  $m_1$  и через  $x, y, z$  обозначить координаты другой массы  $m_2$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= k^2 (m_1 + m_2), \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

и  $k^2$  обозначает постоянную тяготения.

Из этих дифференциальных уравнений непосредственно получаются следующие интегралы:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1, \quad (2)$$

который называется интегралом живых сил, и

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_1, \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_2, \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которые будем называть интегралами площадей.

Если эти интегралы умножить соответственно на  $x, y, z$  и результаты сложить, то получается уравнение плоскости:

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \quad (4)$$

Из этого уравнения следует, что движение происходит в некоторой неподвижной плоскости.

Если обозначить через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  углы, которые нормаль к этой плоскости образует с осями координат, то уравнение плоскости можно записать также в форме

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

и поэтому имеем

$$\frac{c_1}{\cos \alpha} = \frac{c_2}{\cos \beta} = \frac{c_3}{\cos \gamma} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Если  $i$  — наклонение плоскости орбиты к плоскости  $XU$ ,  $\Omega$  — угол, который образует восходящий узел орбиты с осью  $X$ , то непосредственно находим, что

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sin i \sin \Omega, \\ \cos \beta &= -\sin i \cos \Omega, \\ \cos \gamma &= \cos i, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -c \sin i \cos \Omega, \\ c_3 &= c \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где положили

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Если повернуть координатные оси, то  $i$  и  $\Omega$ , так же как  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$ , изменятся, в то время как  $c$  остается неизменным.

Форма орбиты определяется значениями постоянных интегрирования  $c$  и  $h$ . Получаются следующие четыре случая, которые мы поочередно исследуем:

1.  $c = 0$ , прямолинейное движение;
2.  $h_1$  отрицательно, эллиптическое движение,
3.  $h_1$  равно нулю, параболическое движение,
4.  $h_1$  положительно, гиперболическое движение.

В качестве исходного пункта интегрирования мы выбираем дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби, так как при этом мы придем к более подробным сведениям о задаче трех тел.

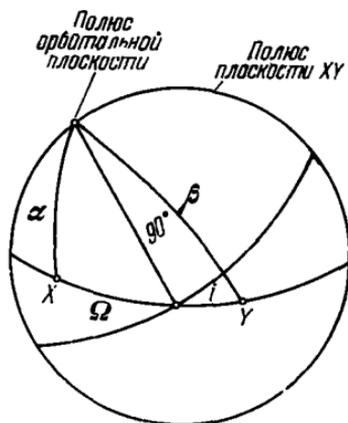


Рис. 14.

## § 2. Интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби для задачи двух тел

В § 9 гл. I было показано, что для задачи двух тел в полярных координатах уравнение Гамильтона — Якоби имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1. \quad (1)$$

Легко показать, что это уравнение можно проинтегрировать путем разделения переменных. Здесь можно применить теорему Штеккеля. Действительно, если положить

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11} &= 1, & \varphi_{21} &= 0, & \varphi_{31} &= 0, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{r^2}, & \varphi_{22} &= 1, & \varphi_{32} &= 0, \\ \varphi_{13} &= 0, & \varphi_{23} &= -\frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}, & \varphi_{33} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

то будем иметь

$$\Delta = |\varphi_{ij}| = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

и

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{11}} = 1, \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{21}} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{31}} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}.$$

Коэффициенты при частных производных в левой части (1) имеют, стало быть, ту форму, которая необходима для применения теоремы Штеккеля; далее имеем

$$\psi_1 = \frac{\mu}{r}, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0. \quad (3)$$

При помощи формул § 1 гл. II задачу можно непосредственно свести к квадратурам. Соответствующие уравнения будут

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}} = dt, \quad (4)$$

$$-\frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}} + \frac{d\varphi}{\sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2 \varphi}}} = 0, \quad (4^*)$$

$$-\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2 \varphi}}} + \frac{d\theta}{\sqrt{2\alpha_3}} = 0, \quad (4^{**})$$

где  $h_1 = \alpha_1$ .

Если эти уравнения разрешить относительно  $dr$ ,  $d\varphi$  и  $d\theta$ , то получим промежуточные интегралы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}, \\ r^2 \frac{d\varphi}{dt} &= \sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2 \varphi}}, \\ r^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{2\alpha_3}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При рассмотрении движения можно исходить либо из (4), либо из (5), смотря по тому, будут ли использоваться соответствующие теоремы § 2 или § 3 предыдущей главы. Из (4) очевидно, что здесь мы имеем пример условно-периодических движений, а в одном из следующих параграфов мы выведем теоремы, которые отсюда следуют для задачи двух тел.

Из последнего уравнения (5) следует, что  $\alpha_3$  должно быть положительным, так как иначе  $d\theta$  становится мнимым, и далее из второго уравнения вытекает, что  $\alpha_2$  также должно быть положительным. Поэтому положим

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_2 &= h_2^2, \\ 2\alpha_3 &= h_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $h_2$  и  $h_3$  обозначают действительные величины, которые также могут быть равны нулю.

Подставим эти величины в (4) и проинтегрируем; тогда получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} &= H_1 + t, \\ h_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - h_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} &= H_2, \\ \theta - h_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} &= H_3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  обозначают три новые постоянные интегрирования. В соответствии с § 1 гл. II постоянная  $\alpha_1$  совпадает с постоянной  $h_1$  интеграла живых сил.

Уравнения (7) дают общий интеграл с необходимым числом постоянных интегрирования. Прежде чем определять из этих

уравнений координаты  $r$ ,  $\varphi$  и  $\theta$  как функции времени, рассмотрим формы орбит при различных значениях постоянных интегрирования. Как было уже установлено в предыдущем параграфе, орбита лежит в плоскости, а поэтому для изучения формы орбиты достаточно найти расстояние  $r$  между обоими телами как функцию времени. Но это выполняется с помощью первого из уравнений (7), которое мы теперь будем исследовать.

Из второго уравнения (5) вытекает, что при  $\alpha_2 = 0$  должно также иметь место  $\alpha_3 = 0$ , и поэтому при  $\alpha_2 = 0$  приходим к результату, что как  $\varphi$ , так и  $\theta$  должны быть постоянны, так что тело движется по прямой, вдоль радиуса-вектора.

### § 3. Прямолинейное движение

Из § 2 второй главы известно, что изменение механической величины  $r$ , определяемой дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2} = \psi(r), \quad (1)$$

зависит от значений корней уравнения

$$\psi(r) = 0. \quad (2)$$

Эти корни не могут быть комплексными. Если бы имел место этот случай, то  $\psi(r)$  ни при каких действительных значениях не меняла бы знак. Но при достаточно малых  $r$  значение  $\psi(r)$  необходимо является отрицательным, поэтому, если бы корни были комплексными,  $\psi(r)$  должно было бы быть отрицательным, что невозможно. Итак, корни комплексными быть не могут.

При  $c = 0$  (и, следовательно, при  $h_2 = 0$ ) уравнение  $\psi = 0$  не может иметь больше одного корня. Исследуем теперь этот случай. Нам уже известно, что движение происходит вдоль радиуса-вектора. Имеем

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1. \quad (2^*)$$

Если, во-первых,  $h_1$  положительно, то правая часть уравнения (2\*) ни при каких действительных (положительных) значениях  $r$  не обращается в нуль. Отсюда следует, что в этом случае  $r$  всегда или возрастает, или всегда уменьшается. Оба тела либо неограниченно удаляются друг от друга, либо в конце концов сталкиваются друг с другом.

Если, во-вторых,  $h_1$  отрицательно, то положим

$$h_1 = -f; \quad (3)$$

тогда

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu - 2fr}{r}.$$

В соответствии с методом, развитым в § 2 гл. II, введем при помощи уравнения

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2f}{\beta} \left(\frac{\mu}{f} - r\right) \quad (4)$$

вспомогательную переменную  $w$ , так что

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r}, \quad (5)$$

где  $\beta$  обозначает некоторую положительную постоянную, пока не определенную.

Из (5) следует, что  $w$  возрастает вместе с  $t$ . Уравнение (4) дает

$$r = \frac{\mu}{f} - \frac{fw^2}{2\beta}. \quad (6)$$

Положим

$$\frac{\mu}{f} = \frac{f}{2\beta},$$

откуда

$$\beta = \frac{f^2}{2\mu}; \quad (7)$$

тогда будем иметь

$$r = \frac{\mu}{f} (1 - w^2). \quad (8)$$

Подставляя в (5) это значение, получим

$$\sqrt{1 - w^2} dw = \frac{f^{1/2}}{\mu \sqrt{2}} dt, \quad (9)$$

и тогда после интегрирования находим

$$w \sqrt{1 - w^2} + \arcsin w = \frac{f^{1/2} \sqrt{2}}{\mu} (t - t_0). \quad (10)$$

Уравнения (8) и (10) дают решение задачи. При  $t < t_0$   $w$  отрицательно и затем возрастает, а при  $t = t_0$  получает значение  $w = 0$ . При этом расстояние  $r$  достигает максимального значения  $\mu/f$ . Далее  $r$  уменьшается до тех пор, пока оба тела в конечный момент времени не столкнутся. Это произойдет в момент

$$t - t_0 = \frac{\mu\pi}{2 \sqrt{2} f^{3/2}}. \quad (11)$$

Для определения значений  $r$  в произвольный момент времени уравнение (10) необходимо разрешить относительно  $w$ . Так как это уравнение трансцендентное, то его решение возможно только или посредством разложения в ряды, или другими приближенными методами. Если расстояние между телами мало, то можно использовать разложения по дробным степеням времени, которые мы здесь получим.

Из (2) дифференцированием получаем

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (12)$$

Если тела соударяются в момент  $t = 0$ , то мы будем строить разложение  $r$  в ряд в окрестности  $t = 0$ . Введем вместо  $r$  новую переменную  $\rho$  при помощи уравнения

$$r = \rho \sqrt[3]{\mu}, \quad (13)$$

и тогда получим

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = -\frac{1}{\rho^2}. \quad (14)$$

Если теперь положить

$$\rho = t^m \gamma, \quad (15)$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= m\gamma t^{m-1}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} &= m(m-1)\gamma t^{m-2}. \end{aligned}$$

Величина (15) будет, очевидно, удовлетворять дифференциальному уравнению (14), если  $m$  и  $\gamma$  будут выбраны так, что

$$\left. \begin{aligned} 2 - m &= 2m, \\ m(m-1)\gamma^3 &= -1, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{2}{3}, \\ \gamma &= \sqrt[3]{\frac{9}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

Следовательно,

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} t^{2/3} = \tau \quad (17)$$

является частным решением (14). Оно не содержит постоянной интегрирования. Теперь будем искать общий интеграл в форме

$$\rho = \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \dots \quad (18)$$

Отсюда получаем

$$\frac{dp}{dt} = (1 + 2\alpha_2\tau + 3\alpha_3\tau^2 + \dots) \frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = (2\alpha_2 + 6\alpha_3\tau + \dots) \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + (1 + 2\alpha_2\tau + 3\alpha_3\tau^2 + \dots) \frac{d^2\tau}{dt^2}.$$

Но согласно (17)

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\tau}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{1}{\tau^2};$$

тогда получаем

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\alpha_2}{\tau} + 9\alpha_3 + 20\alpha_4\tau + \dots$$

Далее, согласно (18)

$$\rho^2 = \tau^2 + 2\alpha_2\tau^3 + (\alpha_2^2 + 2\alpha_3)\tau^4 + \dots,$$

и отсюда

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\tau^2} - \frac{2\alpha_2}{\tau} + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_3 - (4\alpha_2^3 - 6\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_4)\tau + \dots$$

Таким образом из (14) получаем следующие соотношения:

$$2\alpha_2 = 2\alpha_2,$$

$$9\alpha_3 = -3\alpha_2^2 + 2\alpha_3,$$

$$20\alpha_4 = 4\alpha_2^3 - 6\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_4,$$

.....

Отсюда находим, что  $\alpha_2$  — произвольно,

$$\alpha_3 = -\frac{3}{7}\alpha_2^2, \quad \alpha_4 = \frac{23}{63}\alpha_2^3, \dots$$

Наконец, при помощи (13) для радиуса-вектора находим

$$r = \sqrt[3]{\mu} \left( \tau + \alpha_2\tau^2 - \frac{3}{7}\alpha_2^2\tau^3 + \frac{23}{63}\alpha_2^3\tau^4 - \dots \right). \quad (19)$$

Если бы мы исходили из уравнения (2), а не (12), то в ряд для  $r$  вошла бы постоянная  $h_1$ . Следовательно, между  $h_1$  и  $\alpha_2$  должна существовать зависимость. Для ее определения подставим (18) в (2) и тогда получим

$$h_1 = 5\mu^{2/3} \alpha_2. \quad (20)$$

Разложение  $r$  для случая соударения было дано впервые Барроу [19].

## § 4. Эллиптическое движение

Если в уравнении

$$r^2\psi(r) = 2\mu r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0 \quad (1)$$

$h_2$  отлично от нуля и  $h_1$  отрицательно ( $= -f$ ), то оба корня должны быть действительны и положительны. Мы должны доказать, что они не могут быть комплексными, и так как  $\psi(0)$  и  $\psi(\infty)$  отрицательны, то оба корня должны быть положительными. Обозначим корни через  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ); тогда

$$r^2\psi(r) = 2f(r_1 - r)(r - r_2). \quad (2)$$

Отсюда следует, что всегда должны быть выполненными неравенства

$$r_2 \leq r \leq r_1. \quad (3)$$

Согласно принципам, развитым в § 2 гл. II, введем теперь вспомогательную переменную  $w$  при помощи формулы

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2f}{\beta} (r_1 - r)(r - r_2).$$

Выберем здесь  $\beta$  так, чтобы

$$\beta = 2f, \quad (4)$$

и тогда будем иметь уравнения

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = (r_1 - r)(r - r_2), \quad (5)$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r^2} = \frac{2f}{r^2}. \quad (6)$$

Величина  $w$  монотонно возрастает вместе с  $t$ , и  $r$  периодически колеблется в границах от  $r_1$  до  $r_2$ . Из (5) следует

$$r = r_1 \sin^2 \frac{w}{2} + r_2 \cos^2 \frac{w}{2}. \quad (7)$$

В этом случае орбита, как известно, будет эллиптической. Чтобы доказать это, нам необходимо принять во внимание уравнения для  $\varphi$  и  $\theta$ . Так как мы уже доказали, что орбита является плоской кривой, то плоскость  $XU$  можно выбрать так, чтобы она совпадала с орбитальной плоскостью. Тогда имеем  $\varphi = 0$  и используем только последнее из уравнений (5) § 2, которое запишем в виде

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h_2. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$r \frac{dr}{dt} = \sqrt{2\mu r - 2fr^2 - h_2^2}, \quad (9)$$

и из этого уравнения посредством деления получим

$$\frac{h_2 dr}{r \sqrt{2\mu r - 2fr^2 - h_2^2}} = d\theta. \quad (10)$$

Интеграл этого уравнения при соответствующем задании постоянных  $p$  и  $e$  будет записываться в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \pi)}, \quad (11)$$

где  $\pi$  обозначает постоянную интегрирования; (11) представляет собой полярное уравнение эллипса.

Максимальное значение величины  $r$  равно  $r_1$ , а минимальное —  $r_2$ . Для введения обычных обозначений положим

$$r_1 = a(1 + e), \quad r_2 = a(1 - e); \quad (12)$$

тогда из (7) получим

$$r = a(1 - e \cos w). \quad (13)$$

Вспомогательная величина  $w$  называется в астрономии эксцентрисической аномалией.

Далее из (6), подставляя вместо  $r$  выражение (13), после интегрирования получим уравнение

$$w - e \sin w = \frac{\sqrt{2f}}{a}(t - t_\pi), \quad (14)$$

которое обычно называется уравнением Кеплера. Если из (14) найти  $w$  как функцию  $t$ , то с помощью (13) можно вычислить соответствующее значение  $r$ .

Величины  $a$  и  $e$  можно легко выразить через постоянные интегрирования  $h_1$  и  $g$ . Согласно (1) имеем

$$r_1 + r_2 = \frac{\mu}{f}, \quad r_1 r_2 = \frac{h_2^2}{2f}.$$

Отсюда и из (12) следует

$$a = \frac{\mu}{2f}, \quad a^2(1 - e^2) = \frac{h_2^2}{2f} \quad (15)$$

или

$$h_2 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad f = \frac{\mu}{2a}. \quad (15^*)$$

С помощью этих формул  $h_2$  и  $f$  выражаются через эллиптические элементы. Согласно (16\*) § 2 гл. II период будет равен

$$2T = 2 \int_{r_2}^{r_1} \frac{r dr}{\sqrt{2\mu r - 2fr^2 - h_2^2}} = 2 \int_0^\pi \frac{r dw}{\sqrt{2f}}, \quad (16^*)$$

или, если подставить вместо  $r$  значение (13), то

$$2T = \frac{2\pi a}{\sqrt{2f}}. \quad (16)$$

Отношение  $2\pi : 2T$  называется средним движением  $n$  планеты, которое выражается следующим образом:

$$n = \frac{\sqrt{2f}}{a} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}; \quad (17)$$

тогда формула (14) запишется в виде

$$w - e \sin w = n(t - t_n). \quad (18)$$

Теперь выразим постоянные  $h_3$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  через обычные эллиптические элементы. Согласно (5) § 2 имеем

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}, \quad (19)$$

где  $\varphi$  обозначает угол, который радиус-вектор образует с плоскостью  $XU$ . Следовательно, максимальное и минимальное значения  $\varphi$  определяются формулой

$$\cos \varphi = \pm \frac{h_3}{h_2},$$

и так как  $\varphi$  не может превосходить величины наклона орбитальной плоскости к плоскости  $XU$ , то

$$h_3 = h_2 \cos i = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i. \quad (20)$$

Для определения  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  в (7) § 2 необходимо выбрать определенные пределы интегралов. Их можно выбрать произвольно и положить

$$\int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} = H_1 + t, \quad (21^*)$$

$$h_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - h_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} = H_2, \quad (21^{**})$$

$$\theta - h_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = H_3. \quad (21^{***})$$

Если  $r = r_1$ , то планета находится в перигелии. Из (21\*) получаем, что  $-H_1 = t_\pi$  — момент прохождения планеты через перигелий.

Положим также в (21\*\*)  $r = r_1$ ; тогда последний интеграл обратится в нуль, и получаем

$$h_2 \int_0^{\varphi_\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \int_0^{\varphi_\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}} = H_2,$$

где через  $\varphi_\pi$  обозначена широта планеты в момент ее прохождения через перигелий. Если положить

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad (22)$$

то угол  $u$  будет иметь очевидный геометрический смысл (рис. 15) Имейм

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}},$$

и, следовательно,  $H_2 = u_\pi$  — угловое расстояние перигелия от восходящего узла орбиты.

Если наконец, положить в (21\*\*\*)  $\varphi = 0$ , то получим  $H_3 = \theta_0$  — долготу восходящего узла.

Если обозначить через  $\Omega$  долготу восходящего узла планеты, а через  $\pi$  — долготу перигелия, которая определяется обычным образом, как сумма угла между осью  $X$  и линией узлов и угла в плоскости орбиты между линией узлов и направлением на перигелий, то получим следующую совокупность значений постоянных интегрирования, выраженных через обычные эллиптические элементы:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & h_2 &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, \\ h_3 &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i, & H_1 &= -t_\pi, \\ H_2 &= \pi - \Omega, & H_3 &= \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Постоянные  $h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3$  называются каноническими элементами орбиты.

Выражение координат как функций времени будет дано в одном из следующих параграфов. Хотя координаты  $r, \varphi$  и  $\theta$  можно выразить как функции времени только путем разложения в ряды,

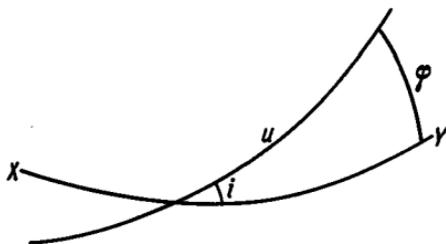


Рис. 15.

но их можно представить в замкнутом виде как тригонометрические функции вспомогательной переменной — эксцентрической аномалии  $w$ . Из (5) § 2 имеем

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_2 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}$$

или

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{h_2 dt}{r^2} = \frac{h_2}{\sqrt{2f}} \frac{dw}{r},$$

или

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{\sqrt{1 - e^2} dw}{1 - e \cos w}, \quad (24)$$

и после выполнения интегрирования получим

$$\arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin i} = 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right] + H_2, \quad (25)$$

где постоянная  $H_2$  должна быть тождественной с введенной в (21\*\*) постоянной интегрирования.

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{\sin i} &= \cos H_2 \sin 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right] + \\ &+ \sin H_2 \cos 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right]. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \sin 2 \operatorname{arctg} x &= \frac{2x}{1+x^2}, \\ \cos 2 \operatorname{arctg} x &= \frac{1-x^2}{1+x^2}, \end{aligned}$$

и поэтому после некоторых преобразований будем иметь

$$\frac{\sin \varphi}{\sin i} = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin w}{1-e \cos w} \cos H_2 + \frac{\cos w - e}{1-e \cos w} \sin H_2. \quad (26)$$

Заметим, что из этого выражения следует

$$r \sin \varphi = a \sin i \left[ \sqrt{1-e^2} \sin w \cos H_2 + (\cos w - e) \sin H_2 \right]. \quad (27)$$

Величина  $r \sin \varphi$  обозначает аппликату планеты, которая выражается при помощи приведенной выше простой формулы через  $w$ .

Наконец, из (21\*\*\*) имеем

$$\theta - H_3 = \cos i \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}},$$

или, вводя вспомогательную величину  $u$ ,

$$\theta - H_3 = \int_0^u \frac{\cos i \, du}{1 - \sin^2 i \sin^2 u},$$

откуда

$$\theta - H_3 = \operatorname{arctg} (\cos i \cdot \operatorname{tg} u). \quad (28)$$

Введем снова  $\varphi$ ; тогда окончательно получаем

$$\operatorname{tg} (\theta - H_3) = \frac{\cos i \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}, \quad (29)$$

где вместо  $\sin \varphi$  необходимо подставить его выражение из (27).

Из (29) выводятся следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin (\theta - H_3) &= \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \varphi, \\ \cos (\theta - H_3) &= \frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}{\sin i \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (29^*)$$

Из (25) следует, что

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}} = \cos \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right] + H_2 \right\}$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}} &= \cos H_2 \cos 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right] - \\ &\quad - \sin H_2 \sin 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right], \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}} = \frac{\cos w - e}{1 - e \cos w} \cos H_2 - \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin w}{1 - e \cos w} \sin H_2. \quad (30)$$

С помощью этого выражения и (27) (если положить  $H_3 = \Omega$ ,  $H_2 = \pi - \Omega$ ) получаем

$$\left. \begin{aligned} r \cos \varphi \cos (\theta - \Omega) &= a [(\cos w - e) \cos (\pi - \Omega) - \\ &\quad - \sqrt{1 - e^2} \sin w \sin (\pi - \Omega)], \\ r \cos \varphi \sin (\theta - \Omega) &= a \cos i [\sqrt{1 - e^2} \sin w \cos (\pi - \Omega) + \\ &\quad + (\cos w - e) \sin (\pi - \Omega)], \\ r \sin \varphi &= a \sin i [\sqrt{1 - e^2} \sin w \cos (\pi - \Omega) + \\ &\quad + (\cos w - e) \sin (\pi - \Omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Левые части этих выражений обозначают прямоугольные координаты планеты в системе координат, ось  $X$  которой совпадает с линией узлов; ось  $Y$  лежит в прежней плоскости  $XU$ , ось  $Z$  совпадает со старой осью  $Z$ . Таким образом, эти координаты суть линейные функции от  $\cos w$  и  $\sin w$ . Координаты, относящиеся к произвольной системе координат, также будут линейными функциями тех же величин.

### § 5. Параболическое движение

Если  $h_1 = 0$ , то

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu r - h_2^2}{r^2}, \quad (1)$$

и если положить теперь

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{1}{\beta} (2\mu r - h_2^2), \quad (2)$$

то будем иметь

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r^2}. \quad (3)$$

Из (2) следует, что  $r$  имеет минимальное значение  $h_2^2/2\mu$ , от которого оно неограниченно возрастает. Обозначим перигелийное расстояние планеты через  $q$ ; тогда

$$q = \frac{h_2^2}{2\mu} \quad (4)$$

и

$$\frac{dr}{\sqrt{r-q}} = \sqrt{\frac{2\mu}{\beta}} dw,$$

$$2\sqrt{r-q} = \sqrt{\frac{2\mu}{\beta}} w.$$

Если, далее, мы определим  $\beta$  таким образом, чтобы

$$\frac{\mu}{2\beta} = q$$

и, следовательно,

$$\beta = \frac{\mu}{2q} = \frac{\mu^2}{h_2^2}, \quad (5)$$

то получим

$$r = q(w^2 + 1). \quad (6)$$

В соответствии с (3) между  $w$  и  $t$  будет иметь место соотношение

$$r dw = V\sqrt{\beta} dt$$

или, если подставить вместо  $r$  его значение из (6) и проинтегрировать,

$$\frac{1}{3} w^3 + w = \frac{V\sqrt{\beta}}{q} (t - t_0) \quad (7)$$

или

$$\frac{1}{3} w^3 + w = \frac{V\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (t - t_0),$$

где через  $t_0$  обозначено время прохождения планеты через перигелий. Формулы (6) и (7) определяют радиус-вектор как функцию времени. Координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  можно выразить в конечном виде как функцию вспомогательной величины  $w$ .

Подставим в формулы

$$h_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - h_2 \int_{r_2}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{h_2^2}{r^2}}} = H_2, \quad (8)$$

$$\theta - h_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = H_3 \quad (8^*)$$

вместо  $\varphi$  вспомогательную величину  $u$ , а вместо  $r$  величину  $w$ , где

$$\sin \varphi = \sin i \sin u;$$

тогда из (8) получим

$$u = H_2 + 2 \operatorname{arctg} w, \quad (9)$$

откуда после преобразований находим

$$\frac{\sin \varphi}{\sin i} = \frac{2w}{1+w^2} \cos H_2 + \frac{1-w^2}{1+w^2} \sin H_2. \quad (10)$$

Имеем также

$$\cos u = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}},$$

и поэтому

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}} = \frac{1-w^2}{1+w^2} \cos H_2 - \frac{2w}{1+w^2} \sin H_2. \quad (11)$$

Для долготы планеты  $\theta$  из (8\*) получаем значение

$$\theta = H_3 + \int_0^u \frac{\cos i du}{1 - \sin^2 i \sin^2 u},$$

или

$$\theta = H_3 + \operatorname{arctg} (\cos i \operatorname{tg} u),$$

или

$$\operatorname{tg} (\theta - H_3) = \cos i \operatorname{tg} u.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \cos (\theta - H_3) &= \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}}}{\cos \varphi}, \\ \sin (\theta - H_3) &= \frac{\cos i \sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u}} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} i. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Заменяя  $H_3$  и  $H_2$  через  $\Omega$  и  $\pi - \Omega$ , после подстановки выражений (10) и (11) получаем

$$\left. \begin{aligned} r \cos \varphi \cos (\theta - \Omega) &= q [(1 - w^2) \cos (\pi - \Omega) - \\ &\quad - 2w \sin (\pi - \Omega)], \\ r \cos \varphi \sin (\theta - \Omega) &= q \cos i [2w \cos (\pi - \Omega) + \\ &\quad + (1 - w^2) \sin (\pi - \Omega)], \\ r \sin \varphi &= q \sin i [2w \cos (\pi - \Omega) + \\ &\quad + (1 - w^2) \sin (\pi - \Omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, в прямоугольной системе координат, ось  $X$  которой проходит через восходящий узел плоскости орбиты, координаты выражаются при помощи (13) через рациональные функции второго порядка относительно  $w$ . Координаты, отнесенные к произвольной системе координат, также будут рациональными функциями второго порядка относительно  $w$ .

Если плоскость  $X'Y'$  лежит в плоскости орбиты, то  $\theta$  будет долготой в орбите  $v$ . Выражение для нее можно получить из (13), если положить  $\pi = \Omega$ :

$$\left. \begin{aligned} r \cos (v - \pi) &= q (1 - w^2), \\ r \sin (v - \pi) &= 2rw, \end{aligned} \right\} \quad (14^*)$$

откуда после деления находим

$$\operatorname{tg} (v - \pi) = \frac{2w}{1 - w^2}.$$

так что

$$w = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - \pi). \quad (14)$$

Таким образом, мы имеем следующую сводку формул для вычисления положения тела на параболической орбите:

$$\frac{1}{3} w^3 + w = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (t - t_0),$$

$$r = q(1 + w^2),$$

$$w = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - \pi),$$

$$r \cos \varphi \cos (\theta - \Omega) = q [(1 - w^2) \cos (\pi - \Omega) - 2 w \sin (\pi - \Omega)],$$

$$r \cos \varphi \sin (\theta - \Omega) = q \cos i [2 w \cos (\pi - \Omega) + (1 - w^2) \sin (\pi - \Omega)],$$

$$r \sin \varphi = q \sin i [2 w \cos (\pi - \Omega) + (1 - w^2) \sin (\pi - \Omega)].$$

Для представления координат как функций времени необходимо использовать разложения в ряды.

Вблизи момента прохождения планеты через перигелий координаты можно разложить в ряды по степеням времени, которые сходятся для достаточно больших, но ограниченных интервалов времени.

### § 6. Гиперболическое движение

Если  $h_1$  положительно, то один из корней уравнения

$$r^2 \psi(r) = 2\mu r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0 \quad (1)$$

должен быть положительным, а другой — отрицательным. Если положить

$$r^2 \psi(r) = 2h_1 (r - r_1) (r - r_2),$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r_2 - r_1 &= \frac{\mu}{h_1}, \\ r_2 r_1 &= \frac{h_2^2}{2h_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Расстояние  $r$  между телами имеет минимум, равный  $r_1$ , и неограниченно возрастает после того как он достигнут.

Чтобы проинтегрировать уравнение

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2h_1 (r - r_1) (r + r_2)}{r^2}, \quad (3)$$

мы должны ввести, в соответствии с принципами, развитыми в § 2 гл. II, вспомогательную величину  $w$ , которую определим так, чтобы

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2h_1(r-r_1)}{\beta}, \quad (4)$$

тогда получаем

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta(r+r_2)}{r^2}. \quad (4^*)$$

Из (4) следует

$$r - r_1 = \frac{h_1}{2\beta} w^2. \quad (5)$$

Для установления зависимости между  $r$  и временем необходимо последнее выражение подставить в (4\*); тогда получим

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\sqrt{\beta\left(r_1 + \frac{h_1}{2\beta}w^2 + r_2\right)}}{r_1 + \frac{h_1}{2\beta}w^2}. \quad (6)$$

Постоянная  $\beta$  еще не определена. Выберем ее таким образом, чтобы

$$\frac{h_1}{2\beta} = r_1 + r_2, \quad (7)$$

и затем вместо (6) получим

$$\frac{(r_1 + r_2)(1 + w^2) - r_2}{\sqrt{\beta(r_1 + r_2)(1 + w^2)}} dw = dt,$$

или

$$\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)(1 + w^2)}{\beta}} dw - \frac{r_2 dw}{\sqrt{\beta(r_1 + r_2)(1 + w^2)}} = dt. \quad (8)$$

Теперь имеем

$$2 \int \sqrt{1 + w^2} dw = w\sqrt{1 + w^2} + \ln(w + \sqrt{1 + w^2});$$

$$\int \frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}} = \ln(w + \sqrt{1 + w^2}).$$

Из (8) после интегрирования получим

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{\beta}} w \sqrt{1 + w^2} - \frac{r_2 - r_1}{2\sqrt{\beta(r_1 + r_2)}} \ln(w + \sqrt{1 + w^2}) = t - t_0.$$

Положим

$$\kappa = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1},$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\beta(r_1 + r_2)}}{r_2 - r_1};$$

тогда из приведенного выше уравнения следует

$$kw \sqrt{1+w^2} - \ln(w + \sqrt{1+w^2}) = \lambda(t - t_0) \quad (9^*)$$

или

$$\frac{e^{kw} \sqrt{1+w^2}}{w + \sqrt{1+w^2}} = e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (9)$$

С помощью последней формулы по  $t$  можно вычислить  $w$ . Здесь через  $e$  мы обозначили основание натуральных логарифмов.

При помощи соотношений (2) получим следующие выражения для  $k$  и  $\lambda$  через постоянные интегрирования  $h_1$  и  $h_2$ :

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{\mu} \sqrt{2h_1 h_2^2 + \mu^2}, \\ \lambda &= \frac{1}{\mu} h_1 \sqrt{2h_1}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Как будет показано ниже, в этом случае орбита будет гиперболической. Если выразить постоянные через элементы, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a(e - 1), \\ r_2 &= a(1 + e), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $a$  обозначает действительную полуось, а  $e$  — эксцентриситет гиперболы. Далее, согласно (2) и (7)

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{\mu}{2a}, \\ h_2 &= \sqrt{\mu a (e^2 - 1)}, \\ \beta &= \frac{\mu}{8a^2 e}. \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Для  $k$  и  $\lambda$  получим следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} k &= e, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{\mu}}{2a^{3/2}}; \end{aligned} \right\} \quad (11^{**})$$

тогда формулы для вычисления радиуса-вектора гиперболической орбиты выразятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r &= a(e - 1) + 2aew^2, \\ \frac{e^{kw} \sqrt{1+w^2}}{w + \sqrt{1+w^2}} &= e^{\frac{\sqrt{\mu}}{2a^{3/2}}(t-t_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти формулы непригодны для расчетов таких орбит, эксцентриситет которых близок к единице. В этом случае  $a$  будет бесконечно велико и, следовательно, по (11\*)  $\beta$  — исчезающе мало. Поэтому для таких орбит рекомендуется при вычислениях избирать другой путь. При интегрировании (3) можно поступить следующим образом. Положим

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2h}{\beta} (r - r_1)(r + r_2), \quad (13)$$

и тогда получим

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r^2}. \quad (13^*)$$

Очевидно, что определенная таким образом величина  $w$  обладает свойством монотонно возрастать вместе со временем. Полагая теперь

$$\beta = 2h, \quad (14)$$

интеграл уравнения (13) напомним в виде

$$r = \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{ch} w, \quad (15)$$

где использовано обозначение

$$\operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}. \quad (16)$$

Так как по (13\*)

$$r dw = \sqrt{\beta} dt,$$

то, подставляя вместо  $r$  его значение и используя обозначение\*)

$$\operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}, \quad (16^*)$$

получим следующую зависимость между  $w$  и временем

$$\frac{r_1 - r_2}{2} w + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{sh} w = \sqrt{\beta} (t - t_0). \quad (17)$$

Если теперь величины  $a$  и  $e$  заменить в (15) и (17) при помощи соотношений (11), получим

$$\left. \begin{aligned} r &= a(e \operatorname{ch} w - 1), \\ e \operatorname{sh} w - w &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} (t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь, в соответствии с (11\*) и (14),

$$\frac{\sqrt{\beta}}{a} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \quad (18^*)$$

\*) Здесь  $e$  — основание натуральных логарифмов. (Прим. ред.)

Если обозначить через  $v$  долготу в орбите, то в соответствии с (5) § 2

$$r^2 \frac{dv}{dt} = h_2. \quad (19)$$

Так как, далее,

$$r \frac{dr}{dt} = \sqrt{2h_1(r-r_1)(r+r_2)},$$

то между дифференциалами  $r$  и  $v$  имеет место соотношение

$$dv = \frac{h_2 dr}{r \sqrt{2h_1(r-r_1)(r+r_2)}}, \quad (20)$$

и легко убедиться в том, что этому уравнению удовлетворяет величина

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos(v - \pi)}, \quad (20^*)$$

которая представляет собой полярное уравнение гиперболы с действительной полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$ . Вместо величин  $r_1, r_2, h_1, h_2$  необходимо подставить значения (11) и (11\*).

Далее можно таким же образом, как для эллипса и параболы, представить прямоугольные координаты в замкнутом виде как функции вспомогательной величины  $w$ . Если подставить в (19) вместо  $dt$  выражение (13\*) и вместо  $dr$  (18), то получим

$$dv = \frac{h_2 dw}{a \sqrt{3} (\operatorname{ch} w - 1)} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} dw}{e \operatorname{ch} w - 1}. \quad (21)$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{v - \pi}{2} = \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \operatorname{th} \frac{w}{2}. \quad (22)$$

Для гиперболических орбит, эксцентриситет которых близок к единице, необходимо использовать другие формулы.

## § 7. Отталкивательная сила. Кометные хвосты

Если сила отталкивательная, то  $\mu$  должно быть отрицательным ( $= -\mu_1$ ). Если мы теперь рассмотрим уравнение

$$r^2 \psi(r) = -2\mu_1 r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0, \quad (1)$$

то отсюда непосредственно получим, что  $h_1$  должно быть только положительным, так как иначе движение будет невозможным. Один из корней уравнения (1) должен быть положительным, а другой — отрицательным. Мы положим

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2h_1(r-r_1)(r+r_2)}{r^2}. \quad (2)$$

Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r_1 - r_2 &= \frac{\mu_1}{h_1}, \\ r_1 r_2 &= \frac{h_2^2}{2h_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из первого из этих уравнений следует, что  $r_1 > r_2$ . В подобном уравнении, рассмотренном в предыдущем параграфе, критический корень был, наоборот, численно меньше второго. Мы можем по своему произволу при интегрировании (2) использовать либо первый, либо второй метод, описанные в предыдущем параграфе. Положим теперь

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = (r - r_1)(r + r_2), \quad (4)$$

и тогда

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2h_1}{r^3}. \quad (4^*)$$

Из (4) следует, что

$$r = \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{ch} w. \quad (5)$$

Если это значение подставить в (4\*), то получим

$$\frac{r_1 - r_2}{2} w + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{sh} w = \sqrt{2h_1} (t - t_0). \quad (5^*)$$

Далее,

$$r^2 dv = h_2 dt, \quad (6^*)$$

и, следовательно,

$$dv = \frac{h_2 dr}{r \sqrt{2h_1} \sqrt{(r - r_1)(r + r_2)}}. \quad (6)$$

Если ввести величины  $a$  и  $e$ , определив их при помощи следующих равенств:

$$r_1 = a(e + 1), \quad r_2 = a(e - 1), \quad (7)$$

то согласно (3) будем иметь

$$h_1 = \frac{\mu_1}{2a}, \quad h_2 = \sqrt{\mu_1 a (e^2 - 1)}. \quad (7^*)$$

Если принять во внимание соотношения (7) и (7\*), то найдем, что интеграл (6) имеет следующий вид:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{e \cos(v - \pi) - 1}. \quad (8)$$

Но это не что иное, как полярное уравнение той ветви гиперболы, фокус которой не лежит в точке  $r = 0$ . Если сила отталкивательная, то относительная орбита одного из тел будет гиперболой, второй фокус которой находится в другом теле («Солнце»).

Для долготы в орбите  $v$  получим из (6\*) дифференциальное уравнение

$$dv = \frac{\sqrt{e^2 - 1} dw}{1 + e \operatorname{ch} w}, \quad (9^*)$$

которое дает

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - \pi) = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{th} \frac{w}{2}. \quad (9)$$

Формулы для вычисления относительных орбит двух тел, которые отталкиваются обратно пропорционально квадрату расстояния, таковы:

$$\left. \begin{aligned} w + e \operatorname{sh} w &= \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}} (t - t_0), \\ r &= a (1 + e \operatorname{ch} w), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - \pi) &= \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{th} \frac{w}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если рассмотреть пространственное движение, то координаты тоже можно выразить в конечном виде как функции вспомогательной величины  $w$ .

По гипотезе Бесселя хвосты комет образуются из мелких частиц, которые по указанному закону отталкиваются от ядра кометы. Мы кратко остановимся на этом вопросе.

В качестве орбиты ядра кометы примем параболу. Те величины, которые относятся к ядру кометы, будем обозначать прописными буквами, а соответствующие величины для отталкиваемой частицы — строчными. Например,  $R$  и  $V$  будут обозначать радиус-вектор и долготу ядра,  $r$  и  $v$  — соответствующие величины для отталкиваемой частицы. Справедливы следующие уравнения.

Для ядра:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} W^3 + W &= \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} Q^{3/2}} (t - T_0), \\ R &= Q (1 + W^2), \\ W &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (V - \Pi). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

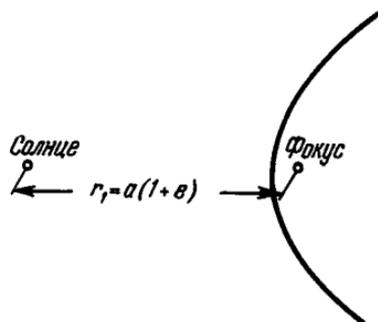


Рис. 16.

Для частицы:

$$\left. \begin{aligned} w + e \operatorname{sh} w &= \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}} (t - t_0), \\ r &= a(1 + e \operatorname{ch} w), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(v - \pi) &= \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{th} \frac{1}{2} w. \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Обозначая через  $S$  и  $s$  абсолютные скорости ядра и частицы, в соответствии с (2) § 1 имеем

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{R}, \quad (12)$$

и

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{2\mu_1}{r} + 2h_1. \quad (12^*)$$

Затем из интегралов площадей находим

$$\left. \begin{aligned} R^2 \frac{dV}{dt} &= H_2, \\ r^2 \frac{dv}{dt} &= h_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Постоянные  $H_2$ ,  $h_2$ ,  $h_1$  и элементы орбиты связаны следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= \sqrt{2\mu Q}, \\ h_2 &= \sqrt{\mu_1 a (e^2 - 1)}, \\ h_1 &= \frac{\mu_1}{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Сделаем теперь предположение, что в момент времени, когда частица отделяется от ядра кометы, абсолютные скорости ядра и частицы равны как по величине, так и по направлению. Следовательно,

$$\begin{aligned} r &= R, & v &= V, \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{dS}{dt}, & \frac{dv}{dt} &= \frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

Из уравнений (12), (12\*), (13) и (14) находим следующие соотношения между элементами орбиты частицы и координатами ядра на параболической орбите:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\mu}{R} &= -\frac{2\mu_1}{R} + \frac{\mu_1}{a}, \\ 2\mu Q &= \mu_1 a (e^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Отсюда можно получить для любого момента времени величину действительной полуоси и эксцентриситета гиперболы, описывае-

мой частицей. Для того чтобы получить остальные элементы, подставим вместо  $r$  и  $v$  в полярное уравнение гиперболы (8)  $R$  и  $V$  и тогда получим

$$\cos(V - \pi) = \frac{1}{e} \left[ 1 + \frac{a(e^2 - 1)}{R} \right]$$

или, по (15),

$$\cos(V - \pi) = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{2\mu Q}{\mu_1 R} \right), \quad (16)$$

откуда находится  $\pi$ . Если частица отделяется в момент  $t = T$ , то для определения момента прохождения частицы через перигелий (на гиперболе)  $t_0$  из (11\*) получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} w &= \frac{1}{e} \left( \frac{R}{a} - 1 \right), \\ w + e \operatorname{sh} w &= \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}} (T - t_0), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\operatorname{sh} w = \sqrt{\operatorname{ch}^2 w - 1}.$$

После некоторых преобразований приходим к формулам для определения элементов гиперболы, описываемой частицей:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{R}{2 \left( 1 + \frac{\mu}{\mu_1} \right)}, \quad e^2 = 1 + \frac{4\mu}{\mu_1} \left( 1 + \frac{\mu}{\mu_1} \right) \frac{Q}{R}, \\ \cos(V - \pi) &= \frac{1 + \frac{2\mu Q}{\mu_1 R}}{\sqrt{1 + \frac{4\mu}{\mu_1} \left( 1 + \frac{\mu}{\mu_1} \right) \frac{Q}{R}}}, \\ \operatorname{ch} w &= \frac{1 + \frac{2\mu}{\mu_1}}{\sqrt{1 + \frac{4\mu}{\mu_1} \left( 1 + \frac{\mu}{\mu_1} \right) \frac{Q}{R}}}, \\ w + e \operatorname{sh} w &= \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}} (T - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из этих формул можно сделать некоторые общие выводы. Действительная полуось описываемой частицей гиперболы имеет минимум при прохождении ядра кометы через перигелий и затем монотонно возрастает до бесконечности. Эксцентриситет в момент прохождения ядра через перигелий достигает максимального значения, а затем монотонно уменьшается до единицы.

В момент прохождения кометного ядра через перигелий имеем

$$a = \frac{Q}{2\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)}, \quad e^2 = \left(1 + 2\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2,$$

$$\pi = \Pi, \quad t_0 = T_0.$$

Итак, орбитой будет гипербола, касающаяся в вертексе описываемой ядром параболы, параметр которой принимает значение

$$a(e^2 - 1) = 2\frac{\mu}{\mu_1} Q.$$

Впрочем, это значение имеют все гиперболы. Долгота вершины гиперболы  $\pi$  при прохождении ядром перигелия равна  $\Pi$  и приближается к  $\pi = \bar{V}$  при возрастании расстояния.

Относительно момента прохождения частицы через вершину (перигелий) гиперболы следует заметить [это непосредственно из формул (18) не видно], что если частица отделится перед прохождением через перигелий, то  $T - t_0$  будет отрицательным, если же частица покинет ядро кометы после прохождения через перигелий, то  $T - t_0$  будет положительным. В первом случае частица после отделения проходит через вершину гиперболической орбиты,

в последнем случае она все более удаляется от нее. Это непосредственно обнаруживается по начальным условиям движения. В противном случае орбиты до и после прохождения через перигелий будут одинаковы.

При движении ядра кометы частицы постоянно отталкиваются ядром, и каждая описывает свою особую гиперболу. Все вместе частицы образуют хвост. Форму хвоста в различных точках орбиты и при различных предположениях о величине отталкивательной силы  $\mu_1$  можно определить по выведенным формулам. Мы, однако, ограничимся простым случаем, а именно, когда  $\mu_1 = 0$ , таким образом, движение частицы не зависит ни от

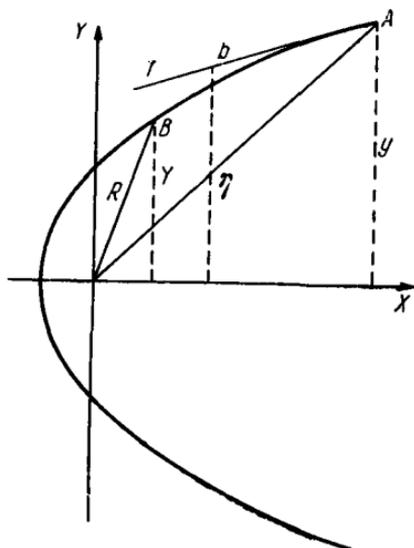


Рис. 17.

притяжения Солнца, ни от его отталкивания. Тогда орбиты будут прямыми линиями, которые огибают параболу. Согласно взглядам Цёлльнера, равно как и по другим теориям комет (например, Аррениуса), такие частицы должны оказываться в кометных хво-

стах, следовательно, соответствующее предположение не является пустой фикцией. Заметим, между прочим, что при любом законе отталкивания первую часть орбиты после отделения частицы можно рассматривать всегда как прямолинейную.

Рассмотрим орбиту частицы  $P$ , которая отделяется в момент  $t$ ; комета (и частица) находятся в точке  $A$  (рис. 17). В момент  $T$  комета находится в  $B$ , а частица движется вдоль касательной, проведенной в точке  $A$ , и находится в  $b$ . Поместим начало координат в фокусе параболы (Солнце), пусть ось  $X$  направлена вдоль оси параболы, положительное направление оси  $Y$  выбрано так, что ордината  $Y$  кометы перед прохождением через перигелий положительная. Если обозначить через  $x$  и  $y$  координаты кометы (и частицы) в момент  $t$ , через  $\xi$  и  $\eta$  координаты частицы в момент  $T$ , через  $\theta$  угол, который образует скорость кометы с отрицательным направлением оси  $X$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - \dot{s}(T-t) \cos \theta, \\ \eta &= y - \dot{s}(T-t) \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\dot{s}$  обозначает скорость.

По известному свойству параболы имеем

$$\theta = \frac{1}{2}(v - \pi) + 90^\circ, \quad (20)$$

и так как согласно (14) § 5

$$w = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(v - \pi),$$

то

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{w}{\sqrt{w^2 + 1}}, \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{w^2 + 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (20^*)$$

Далее, из (12)

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{q(w^2 + 1)}}. \quad (21)$$

Согласно (14\*) § 5 имеем

$$x = q(w^2 - 1), \quad y = -2qw. \quad (22)$$

Если подставить эти выражения в (19), то получим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q(w^2 - 1) + \sqrt{\frac{2\mu}{q}} \frac{w}{w^2 + 1} (T - t), \\ \eta &= -2qw - \sqrt{\frac{2\mu}{q}} \frac{1}{w^2 + 1} (T - t). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если обозначить через  $w$  значение вспомогательной величины в момент  $t$ , а через  $W$  — ее значение в момент  $T$ , то по (11)

$$\frac{1}{3} w^3 + w = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (t - t_0),$$

$$\frac{1}{3} W^3 + W = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (T - t_0);$$

тогда

$$T - t = \frac{\sqrt{2} q^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[ W - w + \frac{1}{3} (W^3 - w^3) \right]. \quad (24)$$

Подставляя это значение в (23), окончательно будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= q(w^2 - 1) + \frac{2qw}{w^2 + 1} \left[ W - w + \frac{1}{3} (W^3 - w^3) \right], \\ \eta &= -2qw - \frac{2q}{w^2 + 1} \left[ W - w + \frac{1}{3} (W^3 - w^3) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Отсюда получим уравнение касательной

$$\xi + w\eta + q(1 + w^2) = 0. \quad (25^*)$$

Пусть теперь  $W$  остается неизменным, а время  $t$  принимает все значения, меньшие  $T$ ; тогда мы получим значения  $\xi$  и  $\eta$  всех точек, которые в момент  $T$  образуют хвост. Мы получим уравнение кривой, ограничивающей хвост, если исключим  $w$  из обоих уравнений (25). Если  $X$  и  $Y$  — координаты кометы в момент  $T$ , то

$$\left. \begin{aligned} X &= q(W^2 - 1), \\ Y &= -2qW. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Введем затем обозначения

$$\Xi = \frac{1}{q} (\xi - X),$$

$$H = \frac{1}{q} (\eta - Y),$$

и тогда

$$\Xi = w^2 - W^2 + \frac{2w}{w^2 + 1} \left[ W - w + \frac{1}{3} (W^3 - w^3) \right],$$

$$H = -2(w - W) - \frac{2}{w^2 + 1} \left[ W - w + \frac{1}{3} (W^3 - w^3) \right]$$

или

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= (w - W) \left\{ w + W - \frac{2w}{w^2 + 1} \left[ 1 + \frac{1}{3} (w^2 + wW + W^2) \right] \right\}, \\ H &= (w - W) \left\{ -2 + \frac{2}{w^2 + 1} \left[ 1 + \frac{1}{3} (w^2 + wW + W^2) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Для тех частей хвоста, которые паходятся вблизи ядра,  $w - W$  малó. Поэтому введем величину  $u$ , которую выберем так, что

$$w = W + u, \quad (28)$$

и тогда в результате преобразований

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= u^2 \left[ -1 + \frac{2(W + u) \left( W + \frac{2}{3} u \right)}{1 + W^2 + 2Wu + u^2} \right] \\ \text{H} &= - \frac{2u^2 \left( W + \frac{2}{3} u \right)}{1 + W^2 + 2Wu + u^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Если из этих уравнений исключить  $u$ , то получим уравнение хвоста кометы. Если, в частности,  $u$  малó (рассматриваем ту часть хвоста, которая находится вблизи ядра), то\*)

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= u^2 \frac{W^2 - 1}{W^2 + 1}, \\ \text{H} &= -u^2 \frac{2W}{W^2 + 1}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

откуда получаем

$$(W^2 - 1) \text{H} + 2W\Xi = 0.$$

Но если принять во внимание соотношения (26), то это уравнение можно записать в форме

$$\text{XH} - Y\Xi = 0. \quad (31)$$

Таким образом, для малых значений  $u$  линия, ограничивающая хвост, будет прямой, которая располагается в направлении радиуса-вектора.

Отсюда следует, что огибающая (29) для головы кометы имеет точку возврата, касательная к которой направлена в сторону, противоположную Солнцу. В этом мы находим объяснение тому известному факту, что хвост кометы направлен в сторону, противоположную Солнцу. Следует отметить, что это утверждение сохраняет свою силу при любых значениях  $\mu_1$ .

Из (29) следует соотношение

$$\Xi + (W + u) \text{H} + u^2 = 0. \quad (32)$$

Исключая из этого уравнения и второго из уравнений (29)  $u$ , получим уравнение четвертой степени для координат. На рис. 18

\*) При этом пренебрегаем членами со степенями  $u$  выше второй. (Прим. ред.)

изображена форма, которую принял бы хвост при сделанных предположениях в случае удаления кометы от перигелия на  $90^\circ$ , как до прохождения через перигелий, так и после прохождения через него.

Пусть  $W = \pm 1$ . Достаточно подставить в (29) одно из этих значений. Тогда получим форму кометного хвоста как до прохождения кометы через перигелий, так и после его прохождения, когда  $u$  соответственно принимает отрицательные или положительные значения. Если положить  $W = -1$ , то будем иметь

$$H = -\frac{2u^2 \left(-1 + \frac{2}{3}u\right)}{2 - 2u + u^2},$$

$$E = (1 - u)H - u^2.$$

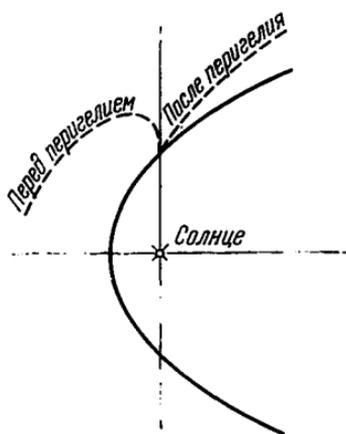


Рис. 18.

В исследованиях Бесселя о форме хвоста кометы координаты частицы разлагались в ряды по степеням времени. Этот метод затем был развит Бредихиным в его известных исследованиях о хвостах комет \*).

### § 8. Задача двух тел, как пример условно-периодических движений

В соответствии с (7) § 2 полярные координаты в задаче двух тел определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \int_{r_2}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} &= t + H_1, \\ h_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - h_2 \int_{r_2}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} &= H_2, \\ \theta - h_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}}} &= H_3. \end{aligned} \right\} (1)$$

Если  $r$  и  $\varphi$  для двух значений времени  $t$  принимают одни и те же

\*) Работы Бредихина продолжил С. В. Орлов и др. [20]. (Прим. перев.)

значения и соответствующие значения  $\theta$  отличаются на величину, кратную  $2\pi$ , то для этих двух моментов времени оба положения тела одинаковы. Если через  $\Theta$  обозначить произвольную периодическую функцию от  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , то согласно (1)  $r$ ,  $\varphi$  и  $\Theta$  будут условно-периодическими функциями от  $H_1 + i$ ,  $H_2$  и  $H_3$ . В соответствии с § 3 гл. II для элементарных периодов получим следующие значения:

$$\omega_{11} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{R}}, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{31} = 0,$$

$$\omega_{12} = -h_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{R}}, \quad \omega_{22} = \int_{-i}^i \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}, \quad \omega_{32} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = -\cos i \int_{\sqrt{\cos^2 \varphi}}^i \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}, \quad \omega_{33} = \pi,$$

где

$$R = \frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2},$$

$$\Phi = 1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}$$

и где вместо  $h_2$  и  $h_3$  следует подставить их значения из (23) § 4. Из (16\*) и (17) § 4 имеем

$$\omega_{11} = T = \frac{\pi}{n}, \quad (2)$$

где  $n$  обозначает среднее движение.

Согласно (5) § 4 зависимость между эксцентрической аномалией  $w$  и радиусом-вектором  $r$  выразится следующим образом:

$$\frac{dw}{\sqrt{2f}} = \frac{dr}{r \sqrt{R}}. \quad (3)$$

Подставляя из (3)  $dw$  вместо  $dr$  в  $\omega_{12}$ , получим для  $\omega_{12}$  выражение

$$\omega_{12} = -\frac{h_2}{a \sqrt{2f}} \int_0^\pi \frac{dw}{1 - e \cos w},$$

или на основании (23) § 4

$$\omega_{12} = -\int_0^\pi \frac{\sqrt{1 - e^2} dw}{1 - e \cos w}. \quad (4^*)$$

Подставим

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{w}{2}$$

и получим

$$dv = \frac{\sqrt{1 - e^2} dw}{1 - e \cos w}.$$

Следовательно, имеем

$$\omega_{12} = -\pi. \quad (4)$$

Далее,

$$\omega_{22} = \int_{-i}^i \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}}.$$

Если положить

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad (5^*)$$

то отсюда следует, что

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}},$$

и тогда получаем

$$\omega_{22} = \pi. \quad (5)$$

Для вычисления элементарного периода  $\omega_{23}$  введем опять при помощи соотношения (5\*) угол  $u$  и тогда получим

$$\omega_{23} = -\cos i \int_0^\pi \frac{du}{1 - \sin^2 i \sin^2 u},$$

или

$$\omega_{23} = -\frac{\cos i}{2} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{1 - \sin i \sin u} + \frac{1}{1 + \sin i \sin u} \right] du.$$

Заметим, однако, что этот интеграл имеет точно такую же форму, как и интеграл (4\*), и следовательно,

$$\omega_{23} = -\pi. \quad (6)$$

Наконец, имеем

$$\omega_{33} = \pi.$$

Объединяя результаты, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= \pi/n, & \omega_{21} &= 0, & \omega_{31} &= 0, \\ \omega_{12} &= -\pi, & \omega_{22} &= \pi, & \omega_{32} &= 0, \\ \omega_{13} &= 0, & \omega_{23} &= -\pi, & \omega_{33} &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Тогда для определителя  $|\omega_{ij}|$  получим следующее значение:

$$|\omega_{ij}| = \frac{\pi^3}{n}, \quad (8)$$

которое оказывается отличным от нуля. В соответствии с (21) § 3 гл. II можно ввести вспомогательные переменные  $u_i$ , полагая

$$\begin{aligned} \pi(t + H_1) &= \frac{\pi}{n} u_1, \\ \pi H_2 &= -\pi u_1 + \pi u_2, \\ \pi H_3 &= -\pi u_2 + \pi u_3. \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= n(t + H_1), \\ -u_1 + u_2 &= H_2, \\ -u_2 + u_3 &= H_3; \end{aligned} \right\} \quad (8^*)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= n(t + H_1), \\ u_2 &= n(t + H_1) + H_2, \\ u_3 &= n(t + H_1) + H_2 + H_3. \end{aligned} \right\} \quad (8^{**})$$

Отсюда видно, что в задаче двух тел координаты  $r$ ,  $\varphi$  и  $\Theta$  суть периодические функции от  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  с периодом  $2\pi$ , или, что то же самое, периодические функции трех величин

$$n(t + H_1), H_2, H_3$$

с периодом  $2\pi$  для каждой из них. Вспоминая теперь, что  $H_3$  равно долготе восходящего узла  $\Omega$ , а  $H_2$  равно разности между долготой перигелия  $\pi$  и долготой восходящего узла, найдем, что любая ограниченная функция  $\Psi$  от  $r$ ,  $\varphi$  и  $\Theta$  может быть записана в следующей форме:

$$\Psi(r, \varphi, \Theta) = \sum_{i, j, k=-\infty}^{\infty} A_{ijk} e^{[in(t+H_1)+j\Omega+k(\pi-\Omega)]\sqrt{-1}}. \quad (9)$$

Коэффициенты  $A_{ijk}$  могут быть вычислены по формулам (24\*) § 3 гл. II и будут зависеть только от значений большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты планеты.

В специальных случаях форма разложения (9) может быть упрощена. Из (1) непосредственно обнаруживаем, что  $r$  является периодической функцией  $u_1$ , которая не зависит от  $H_2$  и  $H_3$ . Далее,  $\varphi$  является периодической функцией от  $u_1$  и  $H_2$ , не зависящей от  $H_3$ . Очевидно, что это имеет место и для  $\theta - H_3$ .

Переменная  $u_1$  называется средней аномалией планеты. Обозначим ее через  $M$ ; тогда

$$M = n(t + H_1). \quad (10)$$

Приходим к следующей теореме: любая функция  $\Psi(r, \varphi, \theta - \Omega)$ , которая периодична по  $\theta - \Omega$  с периодом  $2\pi$ , может быть представлена как периодическая функция  $M$  и  $\pi - \Omega$ .

Если ось  $X$  направлена вдоль линии узлов, то прямоугольные координаты планеты будут иметь указанную структуру. Соответствующие разложения этих функций исследуем в следующем параграфе.

Так как элементарные периоды связаны соотношениями

$$\omega_{12} + \omega_{22} + \omega_{32} = 0,$$

$$\omega_{13} + \omega_{23} + \omega_{33} = 0,$$

то в задаче двух тел выполняются те условия, которые необходимы согласно § 3 гл. II для периодичности движения во времени. Период равен  $2\omega_{11}$  или  $\frac{2\pi}{n}$ , что уже известно из предыдущих параграфов.

### § 9. Представление координат как функций времени

Прежде чем переходить к прямоугольным координатам, представим сначала радиус-вектор как функцию времени. Так как радиус-вектор определяется уравнением

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{h_2^2}{r^2}, \quad (1)$$

то, как известно из § 2 гл. II,  $r$  является периодической функцией времени с периодом  $\frac{2\pi}{n}$ , для которой согласно (16\*) § 4 имеем

$$\frac{\pi}{n} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}. \quad (2)$$

Если ввести среднюю аномалию  $M$ :

$$M = n(t + H_1) = n(t - t_\pi), \quad (3)$$

где  $t_\pi$  обозначает время прохождения планеты через перигелий, то  $r$  будет четной функцией  $M$ , которая может быть разложена по косинусам кратных  $M$ . Положим теперь

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos M + B_2 \cos 2M + \dots, \quad (3^*)$$

причем для коэффициентов по теореме Фурье имеем значения

$$B_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{r}{a} \cos iM dM. \quad (4)$$

Для вычисления этих интегралов введем вспомогательную величину  $w$  из § 4. В соответствии с формулами (13) и (18) указанного параграфа имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos w, \\ M &= w - e \sin w, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

следовательно,

$$dM = (1 - e \cos w) dw. \quad (5^*)$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание первое из уравнений (5), получим

$$B_i = -\frac{2e}{\pi i} \int_0^\pi \sin iM \sin w dw,$$

или

$$B_i = \frac{e}{\pi i} \int_0^\pi \cos [(i+1)w - ie \sin w] dw - \\ - \frac{e}{\pi i} \int_0^\pi \cos [(i-1)w - ie \sin w] dw.$$

Введем в рассмотрение интегралы следующего вида:

$$J_k^i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (iw - k \sin w) dw, \quad (6)$$

и в этих обозначениях получим

$$B_i = \frac{e}{i} (J_{ie}^{i+1} - J_{ie}^{i-1}). \quad (7)$$

Интегралы вида (6) называются бесселевыми интегралами или бесселевыми функциями.

Если под  $\xi$  понимать значение  $w$ , которое лежит между пределами интегрирования 0 и  $\pi$ , то

$$J_k^i = \cos (i\xi - k \sin \xi). \quad (8)$$

Из этого выражения следует, что

1)  $J_k^i$  непрерывно и при действительных значениях  $i$  и  $k$  заключено между  $-1$  и  $+1$ ;

2)  $J_k^i$  ни при каких значениях  $k$  (действительных или комплексных) не может обратиться в бесконечность. Поэтому функции Бесселя могут быть разложены в абсолютно сходящиеся ряды по

степеням  $k$ . Это разложение имеет вид

$$J_k^i = \frac{1}{i!} \left(\frac{k}{2}\right)^i \left\{ 1 - \frac{1}{1(i+1)} \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(i+1)(i+2)} \left(\frac{k}{2}\right)^4 - \dots \right\}. \quad (9)$$

Функции Бесселя связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями:

$$kJ_k^{i-1} - 2iJ_k^i + kJ_k^{i+1} = 0, \quad (10)$$

при помощи которых, если известны  $J^0$  и  $J^1$ , могут быть вычислены любые функции. Функции  $J^0$  и  $J^1$  были затабулированы еще Бесселем. Для вычисления бесселевых функций с большими значениями  $i$  следует рекомендовать данные Ганзеном разложения при помощи непрерывных дробей.

Бесселевы функции удовлетворяют следующему однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка\*):

$$\frac{d^2 J}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{dJ}{dk} + \left(1 - \frac{i^2}{k^2}\right) J = 0. \quad (11)$$

При  $i = 0$  формулы (7) для  $B_i$  непригодны. Возвращаясь к формуле (4), легко получим

$$\frac{1}{2} B_0 = 1 + \frac{1}{2} e^2. \quad (12)$$

Перейдем теперь к представлению прямоугольных координат как функций времени.

Если ось  $X$  направить по линии узлов, то для координат  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  согласно § 4 имеем следующие выражения через эксцентрическую аномалию:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_0}{a} &= (\cos w - e) \cos(\pi - \Omega) - \sqrt{1 - e^2} \sin w \sin(\pi - \Omega), \\ \frac{y_0}{a} &= \cos i [\sqrt{1 - e^2} \sin w \cos(\pi - \Omega) + (\cos w - e) \sin(\pi - \Omega)], \\ \frac{z_0}{a} &= \sin i [\sqrt{1 - e^2} \sin w \cos(\pi - \Omega) + (\cos w - e) \sin(\pi - \Omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Коэффициенты в разложениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  по кратным средней аномалии зависят от вычисления следующих интегралов:

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos w - e) \cos iM \, dM, \\ D_i &= \frac{2\sqrt{1 - e^2}}{\pi} \int_0^\pi \sin w \sin iM \, dM. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

\*) Теорию бесселевых функций см. в [21]. (Прим. перес.)

Теперь найдем

$$C_i = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\pi} (\cos w - e) \frac{d(\sin iM)}{dM} dM$$

или

$$C_i = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\pi} \sin iM \sin w dw. \quad (15)$$

Подобным же образом получим

$$D_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi i} \int_0^{\pi} \cos iM \cos w dw. \quad (16)$$

Подставляя вместо  $M$  выражение (5) и принимая во внимание (6), получим

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \frac{1}{i} (J_{ie}^{i-1} - J_{ie}^{i+1}), \\ D_i &= \frac{1}{i} \sqrt{1-e^2} (J_{ie}^{i-1} + J_{ie}^{i+1}). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Согласно (14) для  $i = 0$  получим

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos w (1 - e \cos w) dw - 2e = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \cos^2 w dw - 2e = -3e. \\ D_0 &= 0. \end{aligned}$$

Если принять во внимание непосредственно получающееся соотношение

$$J_{-k}^{-1} = J_k^1, \quad (18)$$

то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \cos w - e &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \cos iM, \\ \sqrt{1-e^2} \sin w &= \sqrt{1-e^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \sin iM, \end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

где член, соответствующий  $i = 0$ , в первом ряде следует положить равным  $-\frac{3}{2}e$ , а в последнем — нулю.

Если ввести в орбитальной плоскости прямоугольную систему координат, ось  $X$  которой направлена от Солнца к перигелию, и обозначить координаты через  $\xi$  и  $\eta$ , то, как непосредственно видно из (13), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(\cos w - e), \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin w, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и, значит, можно написать

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \xi \cos(\pi - \Omega) - \eta \sin(\pi - \Omega), \\ y_0 &= [\xi \sin(\pi - \Omega) + \eta \cos(\pi - \Omega)] \cos i, \\ z_0 &= y_0 \operatorname{tg} i. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \cos iM, \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \sin iM, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

откуда и вытекают разложения для  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Итак, эти координаты представлены как периодические функции времени, причем коэффициенты являются периодическими функциями от  $\pi - \Omega$ , как это *a priori* было доказано в предыдущем параграфе. Ряды (21) сходятся при любом значении времени и для любого значения эксцентриситета  $< 1$ .

При помощи (9) координаты можно разложить в ряды по положительным степеням эксцентриситета. Полученные таким образом ряды, расположенные по возрастающим степеням эксцентриситета, сходятся не для всех значений эксцентриситета, меньших единицы. Величину круга сходимости этих рядов мы исследуем в одной из следующих глав.

Если перейти теперь к произвольной системе координат, ось  $X$  которой образует с линией узлов угол  $\Omega$ , и обозначить в этой системе координаты через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos \Omega - y_0 \sin \Omega, \\ y &= x_0 \sin \Omega + y_0 \cos \Omega, \\ z &= z_0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

и, следовательно, согласно (20) эти координаты можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= A\xi + B\eta, \\ y &= A_1\xi + B_1\eta, \\ z &= A_2\xi + B_2\eta, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos(\pi - \Omega) \cos \Omega - \sin(\pi - \Omega) \sin \Omega \cos i, \\ B &= -\sin(\pi - \Omega) \cos \Omega - \cos(\pi - \Omega) \sin \Omega \cos i, \\ A_1 &= \cos(\pi - \Omega) \sin \Omega + \sin(\pi - \Omega) \cos \Omega \cos i, \\ B_1 &= -\sin(\pi - \Omega) \sin \Omega + \cos(\pi - \Omega) \cos \Omega \cos i, \\ A_2 &= \sin(\pi - \Omega) \sin i, \\ B_2 &= \cos(\pi - \Omega) \sin i. \end{aligned} \right\} (23^*)$$

Общие выражения для координат в задаче двух тел как функции времени даются при помощи (23) и (21).

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Первые интегралы задачи трех тел

Обозначая через  $x_i, y_i, z_i$  абсолютные координаты массы  $m_i$ , для силовой функции  $V$  имеем выражение

$$V = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^3 \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (1)$$

где  $k^2$  обозначает постоянную тяготения, а

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2. \quad (1^*)$$

Тогда дифференциальные уравнения движения будут

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z_i}, \\ (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В ряде исследований удобно все три координаты обозначать одними и теми же буквами. Пусть

$x_1, x_2, x_3$  — абсолютные координаты первого тела,  
 $x_4, x_5, x_6$  — » » второго » ,  
 $x_7, x_8, x_9$  — » » третьего » .

Для симметрии условимся обозначать массу первого тела через  $m_1$  или  $m_2$ , или  $m_3$ , массу второго тела — через  $m_4$  или  $m_5$ , или  $m_6$  и т. д. Положим далее

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, 9), \quad (3)$$

тогда для живой силы  $T$  получим выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{y_i^2}{m_i}. \quad (4)$$

Так как силовая функция зависит только от координат (и явно не зависит от времени), то

$$H = T - V, \quad (5)$$

и канонические дифференциальные уравнения запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 9). \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения (2) или (6) обладают десятью алгебраическими интегралами. Существование этих интегралов обусловлено определенными свойствами характеристической функции, а именно:

1. Если  $H$  не зависит явно от времени, то имеет место интеграл живых сил.

2.  $H$  не зависит от положения начала координат, так как изменение его положения не влияет на значения скоростей и расстояний. Отсюда вытекает шесть интегралов центра масс.

3.  $H$  не изменяется при повороте системы координат, и, следовательно, существуют три интеграла площадей.

Разберем эти вопросы более подробно. Так как  $H$  не содержит явно времени, то согласно § 8 гл. I существует интеграл

$$H = h = \text{const}, \quad (7)$$

который называется интегралом живых сил.

Подставляя в  $H$  значения  $T$  и  $V$ , получим этот интеграл в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \frac{y_i^2}{m_i} = \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h \quad (7^*)$$

или

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h. \quad (7^{**})$$

Если выполнить перенос начала координат на величину  $-\alpha$  в направлении оси  $X$ , то при этом  $x_1$ ,  $x_4$  и  $x_7$  увеличатся на величину  $\alpha$ , а остальные координаты останутся неизменными, и так как при таком переносе  $H$  изменяться не будет, то имеем

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\partial H}{\partial x_{3i+1}} = 0,$$

а также

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\partial H}{\partial x_{3i+2}} = \sum_{i=0}^2 \frac{\partial H}{\partial x_{3i+3}} = 0.$$

Поэтому, в соответствии с (6), имеем уравнения

$$\sum_{i=0}^2 \frac{dy_{3i+1}}{dt} = \sum_{i=0}^2 \frac{dy_{3i+2}}{dt} = \sum_{i=0}^2 \frac{dy_{3i+3}}{dt} = 0,$$

из которых после выполнения интегрирования находим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^2 y_{3i+1} &= a_1, \\ \sum_{i=0}^2 y_{3i+2} &= a_2, \\ \sum_{i=0}^2 y_{3i+3} &= a_3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  обозначают три произвольные постоянные интегрирования.

Принимая во внимание соотношения (3) и обозначая через  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  три новые постоянные интегрирования, в результате еще одного интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^2 m_{3i+1} x_{3i+1} &= a_1 t + b_1, \\ \sum_{i=0}^2 m_{3i+2} x_{3i+2} &= a_2 t + b_2, \\ \sum_{i=0}^2 m_{3i+3} x_{3i+3} &= a_3 t + b_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) называются интегралами центра масс. Если обозначить сумму трех масс через  $M$ , а координаты центра масс через  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , то

$$\left. \begin{aligned} M X_1 &= \sum_{i=0}^2 m_{3i+1} x_{3i+1}, \\ M X_2 &= \sum_{i=0}^2 m_{3i+2} x_{3i+2}, \\ M X_3 &= \sum_{i=0}^2 m_{3i+3} x_{3i+3}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и, следовательно, согласно (9) имеем

$$MX_i = a_i t + b_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10^*)$$

а из (8)

$$Y_i = a_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$Y_i = M \frac{dX_i}{dt}. \quad (10^{**})$$

Итак, центр масс движется прямолинейно и с неизменной скоростью. Так как силовая функция зависит только от взаимных расстояний тел, то она остается неизменной при повороте системы координат. Полагая

$$\begin{aligned} x'_{3i+1} &= x_{3i+1}, \\ x'_{3i+2} &= x_{3i+2} \cos \varphi - x_{3i+3} \sin \varphi, \\ x'_{3i+3} &= x_{3i+2} \sin \varphi + x_{3i+3} \cos \varphi \\ &\quad (i = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

и выражая силовую функцию через новые координаты  $x'_i$ , получим [22]:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} (x'_1, x'_2, \dots, x'_9) = 0$$

или

$$\sum \left( - \frac{\partial V}{\partial x'_{3i+2}} x'_{3i+3} + \frac{\partial V}{\partial x'_{3i+3}} x'_{3i+2} \right) = 0.$$

Последнее уравнение остается справедливым, если вместо координат со штрихами подставить прежние координаты  $x_i$ . Но по (5)

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

поэтому

$$\sum \left( \frac{\partial H}{\partial x_{3i+2}} x_{3i+3} - \frac{\partial H}{\partial x_{3i+3}} x_{3i+2} \right) = 0.$$

Теперь, принимая во внимание уравнения (6), имеем

$$\sum (x_{3i+2} \dot{y}_{3i+3} - x_{3i+3} \dot{y}_{3i+2}) = 0. \quad (11)$$

Циклической перестановкой индексов получим два аналогичных уравнения. Если проинтегрировать эти уравнения, то получим

три интеграла площадей:

$$\left. \begin{aligned} \sum (x_{3i+2}y_{3i+3} - x_{3i+3}y_{3i+2}) &= c_1, \\ \sum (x_{3i+3}y_{3i+1} - x_{3i+1}y_{3i+3}) &= c_2, \\ \sum (x_{3i+1}y_{3i+2} - x_{3i+2}y_{3i+1}) &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  обозначают постоянные интегрирования. Вводя вновь для прямоугольных координат обозначения  $x_i, y_i, z_i$ , выразим интегралы площадей следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) &= c_1, \\ \sum m_i \left( z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) &= c_2, \\ \sum m_i \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

Если изменить направление координатных осей, то постоянные  $c_1, c_2, c_3$  также изменятся, однако сумма

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

останется неизменной. Направление координатных осей можно выбрать так, что  $c_1 = c_2 = 0$ . Определенная таким образом плоскость была названа Лапласом неизменяемой плоскостью. Учитывая то значение, которое эта плоскость имеет в ряде исследований в теории возмущений, получим формулы для определения положения этой плоскости.

При повороте координатной системы координаты  $x, y, z$  преобразуются в новые координаты  $x', y', z'$ , которые связаны с предыдущими при помощи ортогональной подстановки. Пусть она имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и между коэффициентами имеют место шесть соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

Отсюда получаем

$$y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} = (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + \\ + (\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2) \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \quad (14)$$

В новых координатах  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  интегралы площадей имеют форму

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i \left( y'_i \frac{dz'_i}{dt} - z'_i \frac{dy'_i}{dt} \right) &= c'_1, \\ \sum m_i \left( z'_i \frac{dx'_i}{dt} - x'_i \frac{dz'_i}{dt} \right) &= c'_2, \\ \sum m_i \left( x'_i \frac{dy'_i}{dt} - y'_i \frac{dx'_i}{dt} \right) &= c'_3. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Умножая (14) на  $m_i$  и суммируя эти выражения для всех тел, получим

$$c'_1 = (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) c_1 + (\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2) c_2 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) c_3$$

и отсюда посредством перестановки индексов получим еще

$$\left. \begin{aligned} c'_1 &= (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) c_1 + (\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2) c_2 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) c_3, \\ c'_2 &= (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) c_1 + (\gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3) c_2 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) c_3, \\ c'_3 &= (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) c_1 + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) c_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) c_3. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Эти формулы можно записать проще. Действительно,

$$(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2)^2 + (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3)^2 + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^2 = \\ = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3)^2 = 1,$$

и тогда имеют место тождества

$$\beta_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \beta_2 (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \beta_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = 0, \\ \gamma_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \gamma_2 (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \gamma_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = 0.$$

Сопоставляя эти равенства с тремя следующими,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = 0,$$

находим, что

$$\pm \alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2, \\ \pm \alpha_2 = \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3, \\ \pm \alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1.$$

где в левых частях необходимо одновременно брать либо знак плюс, либо знак минус. Если обе координатные системы должны совпасть, то коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  должны принимать следующие значения:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1, & \beta_1 &= 0, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= 1, & \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_3 &= 0, & \beta_3 &= 0, & \gamma_3 &= 1.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в указанных выше соотношениях единственно возможным является знак плюс, и поэтому имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \\ \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, \\ \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

из которых путем перестановки индексов получаются шесть аналогичных зависимостей. Следовательно, уравнения (16) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned}c'_1 &= \alpha_1c_1 + \beta_1c_2 + \gamma_1c_3, \\ c'_2 &= \alpha_2c_1 + \beta_2c_2 + \gamma_2c_3, \\ c'_3 &= \alpha_3c_1 + \beta_3c_2 + \gamma_3c_3.\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Сравнивая эти соотношения с (13), приходим к заключению, что при повороте координатной системы постоянные площадей преобразуются таким же образом, как и координаты. Из (18) следует, что

$$c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c^2, \quad (19)$$

где  $c$  обозначает постоянную, не зависящую от положения координатной системы. В частности, координатную систему можно повернуть таким образом, чтобы  $c'_1 = c'_2 = 0$ . Умножая уравнения (18) на  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и складывая результаты, а затем выполняя то же самое с  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и т. д., получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned}c_1 &= \alpha_1c'_1 + \alpha_2c'_2 + \alpha_3c'_3, \\ c_2 &= \beta_1c'_1 + \beta_2c'_2 + \beta_3c'_3, \\ c_3 &= \gamma_1c'_1 + \gamma_2c'_2 + \gamma_3c'_3,\end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

которые при  $c'_1 = c'_2 = 0$  переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \\ \beta_3 &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \\ \gamma_3 &= \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}. \end{aligned} \right\} (19^*)$$

При помощи этих уравнений определяются косинусы углов, которые нормаль к неизменяемой плоскости образует с первоначальными координатными осями.

Если через  $\gamma$  обозначить наклон неизменяемой плоскости к плоскости  $XU$ , а через  $\Pi$  угол, который образует с осью  $X$  направление на восходящий узел неизменяемой плоскости, то из рис. 19 непосредственно получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \sin \gamma \sin \Pi, \\ \beta_3 &= -\sin \gamma \cos \Pi, \\ \gamma_3 &= \cos \gamma \end{aligned} \right\} (19^{**})$$

и для определения  $\gamma$  и  $\Pi$  имеем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Pi &= -\frac{c_1}{c_2}, \\ \operatorname{tg} \gamma \sin \Pi &= \frac{c_1}{c_3}, \\ \operatorname{tg} \gamma \cos \Pi &= -\frac{c_2}{c_3}. \end{aligned} \right\} (20)$$

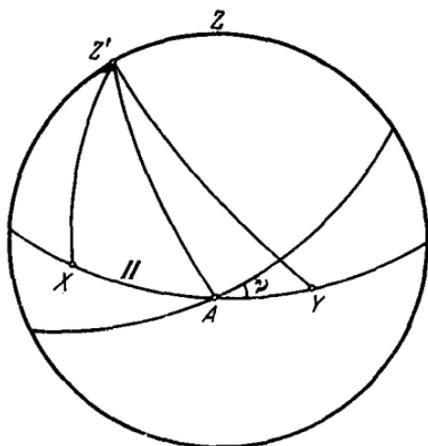


Рис. 19.

Полученные в этом параграфе заключения остаются справедливыми и в случае, если вместо трех масс рассматривается произвольное число масс, притягивающихся по закону Ньютона. Действительно, необходимо только распространить суммирование в формулах (7\*\*), (9) и (12\*) на все тела системы.

Если в нашей планетной системе плоскость эклиптики принять в качестве основной плоскости  $XU$ , то, как известно, координаты  $z$  всех больших планет будут малы. Отсюда согласно (12\*) следует, что в планетной системе постоянные  $c_1$  и  $c_2$  имеют малые значения, и поэтому из (20) находим, что наклон  $\gamma$  неизменяемой плоскости к плоскости эклиптики должен быть мал. Для определения положения неизменяемой плоскости следовало бы подставить в (12\*) значения координат и скоростей планет в определенный

момент времени  $t$ , принимая во внимание значения масс, вычислить постоянные  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$ .

Так как массы планет известны недостаточно точно, то определение положения неизменяемой плоскости выполняется неуверенно. Эта неточность, однако, так незначительна, что для практических нужд положение неизменяемой плоскости можно определить достаточно строго. В дальнейшем мы обнаружим, что использование определенной таким образом плоскости в качестве плоскости  $XU$  при исследовании движения тел в планетной системе приносит определенную пользу.

## § 2. Уравнения движения в относительных координатах

При помощи известных 10 первых интегралов проблемы трех тел (интеграла живых сил, шести интегралов центра масс и трех интегралов площадей) можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения с 18 до 8. Итак, подходящим выбором координат дифференциальные уравнения движения можно свести к системе с четырьмя степенями свободы; позже это понижение порядка мы фактически выполним\*).

Обычно система дифференциальных уравнений минимального порядка не используется. В большинстве случаев довольствуются использованием 6 интегралов центра масс и с их помощью понижают порядок системы с 18 до 12.

Если обозначить через  $\xi_i$  барицентрические координаты, т. е. координаты относительно центра масс, так что

$$\left. \begin{aligned} x_{3i+1} &= X_1 + \xi_{3i+1}, \\ x_{3i+2} &= X_2 + \xi_{3i+2}, \\ x_{3i+3} &= X_3 + \xi_{3i+3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$(i = 0, 1, 2),$$

то согласно (10) § 1

$$\sum_{i=0}^2 m_{3i+s} \xi_{3i+s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad (2)$$

а, значит, также

$$\sum m_{3i+s} \dot{\xi}_{3i+s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3),$$

или

$$\sum \eta_{3i+s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad (3)$$

\*) Если использовать каноническую форму, то порядок системы можно понизить даже до 7. Ср. § 10.

если положить

$$\eta_i = m_i \frac{d\xi_i}{dt}. \quad (3^*)$$

В силу (3\*) и уравнений (3) и (10\*) предыдущего параграфа из (1) получаем

$$y_{3i+s} = \frac{m_{3i+s}}{M} Y_s + \eta_{3i+s} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Если это значение подставить в выражение (4) § 1 для живой силы, то, принимая во внимание (3), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{M} Y_i^2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\eta_i^2}{m_i}. \quad (4^*)$$

Итак, полагая

$$H = \frac{1}{2} \sum \frac{\eta_i^2}{m_i} - V, \quad (5^*)$$

будем иметь

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 9). \quad (5)$$

Следовательно, если начало координат находится в центре масс, то дифференциальные уравнения имеют ту же самую форму, что и для абсолютных координат.

Необходимо заметить, что новые координаты связаны соотношениями (2) и (3), так что среди новых координат независимыми будут только шесть. Следовательно, координаты  $\xi_i$  можно заменить через шесть других координат. Обычно в качестве таких координат выбираются координаты, отнесенные к системе с началом в одной из масс. Такие координаты называются относительными.

Обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$  три тела и примем  $C$  в качестве начала координат; при этом в качестве барицентрических координат  $C$  будут приняты  $\xi_7$ ,  $\xi_8$  и  $\xi_9$ . Тогда относительные координаты будут

$$\text{для } A: \xi_1 - \xi_7, \xi_2 - \xi_8, \xi_3 - \xi_9,$$

$$\text{для } B: \xi_4 - \xi_7, \xi_5 - \xi_8, \xi_6 - \xi_9.$$

Если эти относительные координаты будут определены, то будут также известны и значения барицентрических координат. А именно, из (2) имеем

$$\begin{aligned} m_1 \xi_1 + m_4 \xi_4 + m_7 \xi_7 &= 0, \\ m_1 (\xi_1 - \xi_7) + m_4 (\xi_4 - \xi_7) + M \xi_7 &= 0, \end{aligned}$$

так что барицентрические координаты можно вычислить по относительным координатам при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} M\xi_7 &= -m_1(\xi_1 - \xi_7) - m_4(\xi_4 - \xi_7), \\ M\xi_8 &= -m_2(\xi_2 - \xi_8) - m_5(\xi_5 - \xi_8), \\ M\xi_9 &= -m_3(\xi_3 - \xi_9) - m_6(\xi_6 - \xi_9). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При выводе дифференциальных уравнений для относительных координат будем исходить из уравнений

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 9), \quad (7)$$

которые тождественны с уравнениями (5). Обозначая массы  $A$ ,  $B$  и  $C$  через  $m_a$ ,  $m_b$  и  $m_c$ , из (7) получим:

$$\left. \begin{aligned} m_a \frac{d^2 (\xi_1 - \xi_7)}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7}, \\ m_a \frac{d^2 (\xi_2 - \xi_8)}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_2} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_8}, \\ m_a \frac{d^2 (\xi_3 - \xi_9)}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_3} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_9} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и

$$\left. \begin{aligned} m_b \frac{d^2 (\xi_4 - \xi_7)}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_4} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7}, \\ m_b \frac{d^2 (\xi_5 - \xi_8)}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_5} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_8}, \\ m_b \frac{d^2 (\xi_6 - \xi_9)}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_6} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_9} \end{aligned} \right\} \quad (8^*)$$

Очевидно, что в уравнения (8) и (8\*) входят только относительные координаты, так как расстояния между телами, а следовательно и  $V$ , зависят только от этих координат. Эти уравнения могут быть представлены в канонической форме. Если в соответствии с рассуждениями § 8 гл. I положить

$$q_1 = \xi_1 - \xi_7, \quad q_2 = \xi_2 - \xi_8$$

и т. д., то живая сила  $T$  выразится через величины  $q_i$  и соответствующие канонические переменные  $p_i$ , определяемые уравнением

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

после чего будем иметь

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Мы будем искать эти канонические относительные координаты в следующем параграфе. Обычно используют только относительные координаты, которые не являются каноническими. Если положить

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \xi_1 - \xi_7, & q_4 &= \xi_4 - \xi_7, \\ q_2 &= \xi_2 - \xi_8, & q_5 &= \xi_5 - \xi_8, \\ q_3 &= \xi_3 - \xi_9, & q_6 &= \xi_6 - \xi_9 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и комбинировать с этими координатами шесть величин  $p_i$ , определенных так, что

$$p_i = m_i \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (10)$$

то можно получить дифференциальные уравнения для  $p_i$  и  $q_i$ , хотя и не в канонической форме. Они могут быть приведены к форме, которая имеет некоторое сходство с канонической, и поэтому она была названа Пуанкаре полуканонической [23].

Имеем

$$V = \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} + \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} + \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}}, \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_{bc}^2 &= (\xi_4 - \xi_7)^2 + (\xi_5 - \xi_8)^2 + (\xi_6 - \xi_9)^2, \\ r_{ca}^2 &= (\xi_1 - \xi_7)^2 + (\xi_2 - \xi_8)^2 + (\xi_3 - \xi_9)^2, \\ r_{ab}^2 &= (\xi_1 - \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_5)^2 + (\xi_3 - \xi_6)^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти уравнения могут быть записаны также в форме

$$\left. \begin{aligned} r_{bc}^2 &= q_4^2 + q_5^2 + q_6^2, \\ r_{ca}^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ r_{ab}^2 &= (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2. \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

Для получения входящих в (8) и (8\*) частных производных от  $V$  сначала заметим, что

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

при  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Таким образом, уравнения (8) и (8\*) имеют

форму

$$\left. \begin{aligned} m_a \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_{i+6}} & (i = 1, 2, 3), \\ m_b \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_{i+6}} & (i = 4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Но

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_7} = \frac{k^2 m_b m_c (\xi_4 - \xi_7)}{r_{bc}^3} + \frac{k^2 m_c m_a (\xi_1 - \xi_7)}{r_{ca}^3},$$

следовательно,

$$\frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7} = \frac{k^2 m_a m_b q_4}{r_{bc}^3} + \frac{k^2 m_a^2 q_1}{r_{ca}^3},$$

а также

$$\frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7} = \frac{k^2 m_b m_a q_1}{r_{ac}^3} + \frac{k^2 m_b^2 q_4}{r_{cb}^3}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{r_{ca}} \right) &= - \frac{q_1}{r_{ca}^3}, & \frac{\partial}{\partial q_4} \left( \frac{1}{r_{ca}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{r_{bc}} \right) &= 0, & \frac{\partial}{\partial q_4} \left( \frac{1}{r_{bc}} \right) &= - \frac{q_4}{r_{bc}^3}. \end{aligned}$$

Если положить

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V + \frac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} + \frac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{bc}^3} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \\ V_2 &= V + \frac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} + \frac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ac}^3} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

то уравнения (13) примут вид

$$\left. \begin{aligned} m_a \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= \frac{\partial V_1}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ m_b \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= \frac{\partial V_2}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Вводя теперь величины

$$p_i = m_i \frac{dq_i}{dt}$$

и полагая

$$\left. \begin{aligned} H_a &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{m_i} - V - \frac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} - \frac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} + \\ &\quad + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{bc}^3} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \\ H_b &= \frac{1}{2} \sum_{i=4}^6 \frac{p_i^2}{m_i} - V - \frac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} - \frac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} + \\ &\quad + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{bc}^3} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

получим полуканонические уравнения движения для относительных координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Каждое тело системы обладает своей собственной характеристической функцией. Это дифференциальные уравнения, которые обычно кладутся в основу исследований в так называемой теории возмущений. Они обладают определенными преимуществами в вычислительных задачах, но эти преимущества теряются, когда рассматриваются общие свойства движения. Здесь выгодно использовать канонические переменные.

### § 3. Канонические относительные координаты

Чтобы установить каноническую систему переменных, в которой в качестве  $q$ -координат были бы относительные координаты, необходимо в соответствии с § 8 гл. I выразить живую силу  $T$  через  $q$ -координаты и их производные, а затем получить соответствующие импульсы  $p$  при помощи формул

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1)$$

Тогда по (4\*) § 2 имеем

$$2T = M \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dX_i}{dt} \right)^2 + \sum_{i=1}^9 m_i \left( \frac{d\xi_i}{dt} \right)^2.$$

Первый член в этом выражении согласно (10\*) § 1 равен постоянной величине и поэтому не должен приниматься во внимание. Итак, если положить

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 m_i \left( \frac{d\xi_i}{dt} \right)^2, \quad (2)$$

то прежде всего следует выразить правую часть этого уравнения через относительные координаты.

Имеем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= q_1 + \xi_7, & \xi_4 &= q_4 + \xi_7, \\ \xi_2 &= q_2 + \xi_8, & \xi_5 &= q_5 + \xi_8, \\ \xi_3 &= q_3 + \xi_9, & \xi_6 &= q_6 + \xi_9, \end{aligned}$$

и согласно (6) § 2

$$\left. \begin{aligned} M\xi_7 &= -m_1q_1 - m_4q_4, \\ M\xi_8 &= -m_2q_2 - m_5q_5, \\ M\xi_9 &= -m_3q_3 - m_6q_6. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} M\xi_1 &= (m_b + m_c)q_1 - m_bq_4, \\ M\xi_2 &= (m_b + m_c)q_2 - m_bq_5, \\ M\xi_3 &= (m_b + m_c)q_3 - m_bq_6, \\ M\xi_4 &= -m_aq_1 + (m_a + m_c)q_4, \\ M\xi_5 &= -m_aq_2 + (m_a + m_c)q_5, \\ M\xi_6 &= -m_aq_3 + (m_a + m_c)q_6. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При помощи (3) и (4) барицентрические координаты выражаются через относительные координаты. Подобные формулы имеют место и для скоростей  $\dot{\xi}_i$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2M} [m_a(m_b + m_c)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \\ &+ m_b(m_a + m_c)(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - 2m_a m_b (\dot{q}_1 \dot{q}_4 + \dot{q}_2 \dot{q}_5 + \dot{q}_3 \dot{q}_6)]. \quad (5) \end{aligned}$$

Далее, согласно (1), получим

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{M} [m_a(m_b + m_c) \dot{q}_1 - m_a m_b \dot{q}_4], \\ p_4 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} = \frac{1}{M} [m_b(m_a + m_c) \dot{q}_4 - m_a m_b \dot{q}_1]. \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

Принимая во внимание соотношения (4), эти уравнения можно записать в форме

$$p_i = m_i \dot{\xi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (6^*)$$

Итак, относительные координаты и произведения абсолютных скоростей на массы в совокупности образуют систему канонических переменных для задачи трех тел.

Из (2) § 2 имеем

$$m_7 \dot{\xi}_7 = -m_1 \dot{\xi}_1 - m_4 \dot{\xi}_4,$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_7 &= -\frac{1}{m_c} (p_1 + p_4), \\ \dot{\xi}_8 &= -\frac{1}{m_c} (p_2 + p_5), \\ \dot{\xi}_9 &= -\frac{1}{m_c} (p_3 + p_6). \end{aligned} \right\} \quad (6^{**})$$

Таким образом, живую силу можно записать в форме

$$T' = \frac{1}{2} S \left[ \frac{p_1^2}{m_a} + \frac{p_4^2}{m_b} + \frac{(p_1 + p_4)^2}{m_c} \right], \quad (6)$$

где знак  $S$  означает, что суммирование должно быть распространено на все три координатные оси. Можно также воспользоваться формой

$$T' = \frac{1}{2} S \left[ \frac{p_1^2}{m'_a} + \frac{p_4^2}{m'_b} + \frac{2p_1 p_4}{m'_c} \right], \quad (7)$$

где положено

$$\frac{1}{m'_a} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_c}, \quad \frac{1}{m'_b} = \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}, \quad \frac{1}{m'_c} = \frac{1}{m_c}. \quad (7^*)$$

Канонические относительные координаты, на которые впервые обратил внимание Пуанкаре, представляют большой интерес благодаря своей простоте. В следующем параграфе мы обнаружим, что они обладают некоторыми недостатками, которые можно уменьшить при применении введенных Якоби канонических координат.

#### § 4. Якобиевы канонические координаты

В своем знаменитом трактате «Об исключении узлов в задаче трех тел» Якоби [24] использовал систему координат, в которой дифференциальные уравнения приобретают каноническую форму, без изменения формы живой силы. Его результат был распространен Аллегре на задачу  $n$  тел [25]. Ход этого исследования примерно следующий.



дают следующие  $n - 1$  соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i \alpha_{i1} &= 0, \\ \sum m_i \alpha_{i2} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum m_i \alpha_{i, n-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если поставить еще условие, чтобы живая сила сохраняла свою форму (1), т. е., будучи выражена в новых переменных,  $T$  имела бы вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (6)$$

где через  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  обозначены постоянные множители, то получим следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ir} \alpha_{is} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n-1; r < s), \quad (7)$$

т. е.  $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$  соотношений.

Для коэффициентов  $\mu_i$  получаются значения

$$\mu_i = \sum_{s=1}^n m_s \alpha_{si}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8)$$

Так как теперь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \mu_i \dot{x}_i, \quad (9)$$

то  $x_i, y_i, z_i$  образуют вместе с  $\mu_i \dot{x}_i, \mu_i \dot{y}_i, \mu_i \dot{z}_i$  каноническую систему переменных.

На коэффициенты  $\alpha_{ij}$  наложено

$$n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

условий, и, следовательно, мы имеем в своем распоряжении еще

$$n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

условий. Этим произволом можно воспользоваться так, чтобы новые координаты имели простой геометрический смысл.

Пусть  $G_1$  — центр инерции двух масс,  $m_1$  и  $m_2$ ,  $G_2$  — центр инерции трех масс,  $m_1$ ,  $m_2$ , и  $m_3$ , и т. д., так что  $G_{n-1}$  обозначает центр инерции всей системы  $n$  тел (рис. 20). Пусть, далее,  $x_1, y_1, z_1$  обозначают проекции отрезка  $m_1 m_2$  на координатные оси,  $x_2, y_2, z_2$  — проекции отрезка  $G_1 m_3$  и т. д. и, наконец,  $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$  обозначают проекции отрезка  $G_{n-2} m_n$  на координатные оси. Если теперь положить

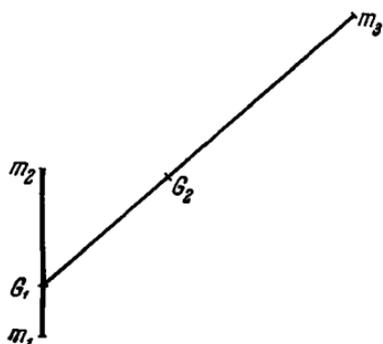


Рис. 20.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= m_1, \\ \sigma_2 &= m_1 + m_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \sigma_s &= \sum_{i=1}^s m_i, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

то для координат в системе с началом в центре масс получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{m_2}{\sigma_2} x_1 - \frac{m_3}{\sigma_3} x_2 - \dots - \frac{m_n}{\sigma_n} x_{n-1}, \\ \xi_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1 - \frac{m_3}{\sigma_3} x_2 - \dots - \frac{m_n}{\sigma_n} x_{n-1}, \\ \xi_3 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3} x_2 - \dots - \frac{m_n}{\sigma_n} x_{n-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_{n-1} &= \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} x_{n-2} - \frac{m_n}{\sigma_n} x_{n-1}, \\ \xi_n &= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} x_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

После простых вычислений находим, что условия (5) и (7) здесь выполнены. Для коэффициентов  $\mu_i$  получим значения:

$$\mu_1 = \sigma_1 \frac{m_2}{\sigma_2}, \quad \mu_2 = \sigma_2 \frac{m_3}{\sigma_3}, \quad \dots, \quad \mu_{n-1} = \sigma_{n-1} \frac{m_n}{\sigma_n}. \quad (12)$$

Уравнения движения в координатах Якоби имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial y_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ );

они могут быть записаны и в канонической форме. С этой целью положим

$$\left. \begin{aligned} x_i &= q_{3i-2}, \\ y_i &= q_{3i-1}, \\ z_i &= q_{3i} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$$\left. \begin{aligned} p_{3i-2} &= \mu_i \dot{q}_{3i-2}, \\ p_{3i-1} &= \mu_i \dot{q}_{3i-1}, \\ p_{3i} &= \mu_i \dot{q}_{3i} \end{aligned} \right\} \quad (14^*)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ );

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),

где

$$H = T - V,$$

или

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} (p_{3i-2}^2 + p_{3i-1}^2 + p_{3i}^2) - \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (16)$$

## § 5. Вариация постоянных. Канонические элементы

Если в проблеме  $n$  тел одна из масс весьма велика по сравнению с другими, то влияние последних друг на друга, по крайней мере на малых интервалах времени, сравнительно мало и можно получить приближенное представление о движении, по крайней

мере на малых интервалах времени, если принимать во внимание только притяжение остальных большей массой, в последующем для краткости именуемой Солнцем, и пренебречь сначала взаимным притяжением малых масс. Орбиты малых масс в первом приближении будут коническими сечениями, в одном из фокусов которых находится Солнце. Если принять во внимание также притяжение малыми телами друг друга и Солнца, то элементы конических сечений, которые получаются в первом приближении, можно рассматривать как переменные и их изменение определить так, чтобы задать истинное движение тел.

Формулируя в общем виде, мы можем этот принцип, который был введен в астрономию Лагранжем и именуется методом вариации постоянных, выразить так, что для интегрирования дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

сначала выделяем часть характеристической функции  $H'$  и интегрируем дифференциальные уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2)$$

При этом координаты  $q_i$  и  $p_i$  получим выраженными через время и  $2(n-1)$  постоянных интегрирования — параметров. Эта орбита, по Гильдену, называется промежуточной орбитой. Если параметры этой орбиты считать переменными, то можно вывести для них дифференциальные уравнения первого порядка, которые полностью соответствуют общим уравнениям движения (1).

Если, в частности, уравнения (2) интегрировать при помощи метода Гамильтона — Якоби и получающиеся при этом постоянные интегрирования рассматривать как переменные параметры, то согласно § 1 гл. I дифференциальные уравнения для этих параметров получаются в канонической форме и могут быть непосредственно записаны. Упомянутые параметры называются каноническими элементами.

Если мы рассматриваем задачу трех тел и в качестве координат выберем якобиевы координаты, то

$$H = \frac{1}{2\mu_b} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu_a} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} - \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}, \quad (3)$$

где согласно (12) § 4

$$\mu_b = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \quad \mu_a = \frac{m_a (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}. \quad (4)$$

Если абсолютные координаты (или барицентрические координаты) массы  $m_i$  обозначить через  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ , а абсолютные координаты центра инерции  $g$  обеих масс  $m_b$  и  $m_c$  — через  $\xi_g, \eta_g, \zeta_g$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \xi_b - \xi_c, & q_2 &= \eta_b - \eta_c, & q_3 &= \zeta_b - \zeta_c, \\ q_4 &= \xi_a - \xi_g, & q_5 &= \eta_a - \eta_g, & q_6 &= \zeta_a - \zeta_g, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

так что  $q_1, q_2, q_3$  являются относительными координатами  $m_b$  в системе отсчета с началом в  $m_c$ , а  $q_4, q_5, q_6$  — относительными координатами  $m_a$  в системе отсчета с началом в  $g$ .

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} r_{bc}^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ r_{ga}^2 &= q_4^2 + q_5^2 + q_6^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} r_{ca}^2 &= r_{ga}^2 + r_{gc}^2 + 2r_{ga}r_{gc} \cos \varphi, \\ r_{ab}^2 &= r_{ga}^2 + r_{gb}^2 - 2r_{ga}r_{gb} \cos \varphi, \end{aligned}$$

где

$$\cos \varphi = \frac{q_1}{r_{bc}} \frac{q_4}{r_{ga}} + \frac{q_2}{r_{bc}} \frac{q_5}{r_{ga}} + \frac{q_3}{r_{bc}} \frac{q_6}{r_{ga}}$$

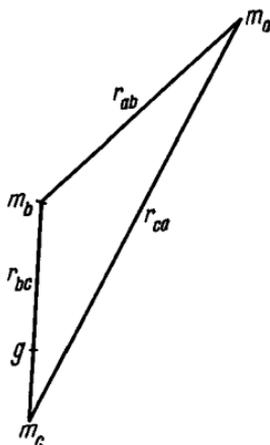


Рис. 21.

и, кроме того,

$$r_{gb} = \frac{m_c}{m_b + m_c} r_{bc}, \quad r_{gc} = \frac{m_b}{m_b + m_c} r_{bc}, \quad (6^*)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} r_{ca}^2 &= \frac{m_b^2}{(m_b + m_c)^2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + \\ &\quad + \frac{2m_b}{m_b + m_c} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \\ r_{ab}^2 &= \frac{m_c^2}{(m_b + m_c)^2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 - \\ &\quad - \frac{2m_c}{m_b + m_c} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6). \end{aligned} \right\} \quad (6^{**})$$

Если одна из масс, например,  $m_c$ , весьма велика по сравнению с двумя другими, то находим, что приближенно

$$r_{ca}^2 = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 = r_{ga}^2,$$

и этим обосновываем введение обычной формы промежуточной орбиты, так называемого кеплеровского эллипса. С этой целью положим

$$H = H' + H'', \quad (7)$$

где  $H'$  выбирается так, что

$$H' = \frac{1}{2\mu_b} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu_a} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} - \frac{k^2 m_a m_c}{\sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}}, \quad (8)$$

и, следовательно,

$$H'' = \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ga}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}. \quad (8^*)$$

Промежуточная орбита определится дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).

Эти дифференциальные уравнения распадаются на две отдельные системы. Одна получается, когда индекс  $i$  принимает значения 1, 2, 3, другая — при  $i = 4, 5, 6$ . Уравнения для определения  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ , с одной стороны, и для  $q_4, q_5, q_6, p_4, p_5, p_6$ , — с другой, будут иметь одну и ту же форму. Если рассмотреть уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

( $i = 1, 2, 3$ ),

где

$$H_b = \frac{1}{2\mu_b} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad (10^*)$$

то согласно § 9 гл. I можно получить их решение из уравнения в частных производных:

$$\frac{1}{2\mu_b} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_3} \right)^2 \right] = \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + h_1. \quad (11)$$

Если  $W$  — функция от  $q_1, q_2$  и  $q_3$ , которая удовлетворяет этому уравнению и, кроме постоянной  $h_1$ , содержит два независимых параметра  $h_2$  и  $h_3$ , то имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h_1} &= t + \gamma_1, \\ \frac{\partial W}{\partial h_2} &= \gamma_2, \\ \frac{\partial W}{\partial h_3} &= \gamma_3, \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  обозначают новые постоянные интегрирования. Кроме того,

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11^{**})$$

Теперь положим

$$\beta_b^2 = k^2 m_b m_c \mu_b = \frac{k^2 m_b^2 m_c^2}{m_b + m_c},$$

тогда уравнение (11) примет вид

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_3} \right)^2 \right] = \frac{\beta_b^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \mu_b h_1. \quad (12)$$

Интегрирование этого уравнения выполняется при помощи теоремы Штеккеля, как показано в § 2 гл. IV. Обычный способ интегрирования этого уравнения состоит в следующем.

Сначала вводим вместо прямоугольных координат полярные координаты, полагая

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= r \cos \varphi \cos \theta, \\ q_2 &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ q_3 &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $r^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ , и получим затем вместо (12), записывая  $\beta$  и  $\mu$  вместо  $\beta_b$  и  $\mu_b$ ,

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \frac{\beta^2}{r} + \mu h_1. \quad (14)$$

Если записать это уравнение в форме

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = r^2 \left[ -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1 \right],$$

то найдем, что переменные можно разделить и записать

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\theta).$$

Именно, если через  $h_2$  и  $h_3$  обозначить две произвольные постоянные, то непосредственно находим следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 \left[ -\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1 \right] &= h_2^2, \\ \cos^2 \varphi \left[ -\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + h_2^2 \right] &= h_3^2, \\ \left(\frac{\partial W_3}{\partial \theta}\right)^2 &= h_3^2, \end{aligned}$$

так что

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \int \sqrt{\frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}} dr, \\ W_2 &= \int \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi, \\ W_3 &= h_3 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Постоянные интегрирования обозначим через  $h_2^2$  и  $h_3^2$ , так как они, как было показано в § 4 гл. IV, должны быть положительны. Нижние пределы интегрирования могут быть выбраны произвольно. Тогда согласно (11\*) получим

$$\left. \begin{aligned} \mu \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{R}} &= t + \gamma_1, \\ -h_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{R}} + h_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} &= \gamma_2, \\ \theta - h_3 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\Phi}} &= \gamma_3, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}, \\ \Phi &= h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

Промежуточные интегралы будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{dr}{dt} &= \sqrt{R}, \\ \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} &= \sqrt{\Phi}, \\ \mu r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} &= h_3. \end{aligned} \right\} \quad (16^{**})$$

Как и в § 4 гл. IV, отсюда заключаем, что  $r$  должно иметь минимальное значение  $r_2 = a(1 - e)$  и максимальное значение  $r_1 = a(1 + e)$  и периодически колебаться в этих границах. Для периода получим значение

$$2T = 2\mu \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{R}},$$

или, после выполнения интегрирования,

$$T = \frac{\pi \mu a}{\sqrt{-2\mu h_1}} = \frac{\pi a^{3/2}}{\beta}. \quad (17)$$

Для среднего движения  $n$  получим следующее значение:

$$n = \frac{\pi}{T} = \frac{\beta}{\mu a^{3/2}}. \quad (17^*)$$

Орбиты, которые определяются уравнениями

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

где  $H'$  задана формулой (8), суть конические сечения (в тех случаях, которые нас особенно интересуют, эти конические сечения всегда эллипсы), и  $m_b$  будет описывать эллипс с фокусом в  $m_c$ , а  $m_a$  — эллипс, фокус которого находится в центре инерции масс  $m_b$  и  $m_c$ .

Сопоставляя уравнения (16) с соответствующими уравнениями (21) § 4 гл. IV, находим, что в последних уравнениях всегда стоит  $\mu$  вместо величины  $\beta^2$ , фигурирующей в (16). Поэтому выражения для канонических элементов  $h_2$ ,  $h_3$  и т. д. легко вывести из (23) § 4 гл. IV. Получим

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{\beta^2}{2\mu a}, & h_2 &= \beta \sqrt{a(1 - e^2)}, & h_3 &= \beta \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i, \\ \gamma_1 &= -t_\pi, & \gamma_2 &= \pi - \Omega, & \gamma_3 &= \Omega. \end{aligned} \right\} (18)$$

Приведенное значение  $h_1$  получено исходя из того, что сумма обеих корней  $r_1$  и  $r_2$  уравнения  $R = 0$  должна быть равна  $2a$ , а с другой стороны,

$$r_1 + r_2 = -\frac{\beta^2}{\mu h_1},$$

откуда и следует указанное значение.

Содержащиеся в (18) постоянные  $\beta$  и  $\mu$  получают различные значения в зависимости от того, рассматривается ли масса  $A$  или масса  $B$ . А именно, для массы  $A$

$$\left. \begin{aligned} \mu_a &= \frac{m_a(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}, \\ \beta_a^2 &= k^2 m_a m_c \mu_a = \frac{k^2 m_a^2 m_c (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и, значит,

$$\left. \begin{aligned} h_{1a} &= -\frac{k^2 m_a m_c}{2a}, \\ n_a &= \sqrt{\frac{m_c(m_a + m_b + m_c)}{m_b + m_c}} \frac{k}{a^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$

Для массы  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu_b &= \frac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \\ \beta_b^2 &= k^2 m_b m_c \mu_b = \frac{k^2 m_b^2 m_c^2}{m_b + m_c}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} h_{1b} &= -\frac{k^2 m_b m_c}{2a}, \\ n_b &= \frac{k \sqrt{m_b + m_c}}{a^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (20^*)$$

В этом приближении среднее движение тела  $B$  имеет ту же форму, которую оно имело бы, если бы отсутствовало тело  $A$ .

Эллиптические орбиты, которые мы нашли для обоих тел  $A$  и  $B$ , можно использовать в качестве первого приближения к истинным орбитам вследствие большой величины массы  $C$  и вытекающей отсюда малости разности  $H - H'$  при постоянных значениях элементов, если рассматриваемые интервалы времени малы. Если элементы считать переменными, то их изменения можно определить так, чтобы удовлетворялись точные уравнения (1) задачи трех тел. Дифференциальные уравнения для этих из-

менений, как было показано в § 10 гл. I, получаются очень просто, если возникающие при интегрировании дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби постоянные, которые были названы каноническими элементами, принять в качестве переменных элементов. Положим

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{1b}, & h_2 &= h_{2b}, & h_3 &= h_{3b}, \\ \gamma_1 &= \gamma_{1b}, & \gamma_2 &= \gamma_{2b}, & \gamma_3 &= \gamma_{3b} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h_4 &= h_{1a}, & h_5 &= h_{2a}, & h_6 &= h_{3a}, \\ \gamma_4 &= \gamma_{1a}, & \gamma_5 &= \gamma_{2a}, & \gamma_6 &= \gamma_{3a}, \end{aligned}$$

где  $h_{1a}$ ,  $h_{2a}$  и т. д. обозначают определяемые формулами (18) канонические элементы массы  $A$ ,  $h_{1b}$ ,  $h_{2b}$  и т. д. — канонические элементы массы  $B$ ; тогда изменение элементов  $h_i$  и  $\gamma_i$  согласно § 10 гл. I определяется при помощи уравнений

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial h_i}, \quad \frac{dh_i}{dt} = - \frac{\partial H''}{\partial \gamma_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (21)$$

где  $H'' = H - H'$ , причем эти уравнения вполне заменяют общие уравнения (1).

Если эллиптические элементы тела  $B$  обозначить через  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $t_\pi$ ,  $\pi$ ,  $\Omega$ , а соответствующие элементы тела  $A$  — через  $a'$ ,  $e'$ ,  $i'$ ,  $t'_\pi$ ,  $\pi'$ ,  $\Omega'$ , то канонические элементы  $h_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) будут связаны с эллиптическими элементами следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{\beta^2}{2\mu a}, & h_2 &= \beta \sqrt{a(1-e^2)}, & h_3 &= \beta \sqrt{a(1-e^2)} \cos i, \\ \gamma_1 &= -t_\pi, & \gamma_2 &= \pi - \Omega, & \gamma_3 &= \Omega \end{aligned} \right\} (21^*)$$

и

$$\left. \begin{aligned} h_4 &= -\frac{\beta'^2}{2\mu' a'}, & h_5 &= \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}, & h_6 &= \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos i', \\ \gamma_4 &= -t'_\pi, & \gamma_5 &= \pi' - \Omega', & \gamma_6 &= \Omega', \end{aligned} \right\} (21^{**})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_b, & \mu &= \mu_b, \\ \beta' &= \beta_a, & \mu' &= \mu_a \end{aligned} \right\} (21^{***})$$

и  $\beta_b$ ,  $\mu_b$  и т. д. определяются при помощи формул (19) и (20). Дифференциальные уравнения эллиптических элементов промежуточной орбиты нетрудно получить, если принять во внимание определяемую формулами (21\*) и (21\*\*) зависимость между

эллиптическими и каноническими элементами. Выгоднее сохранить канонические элементы, так как для них дифференциальные уравнения имеют каноническую форму. Целесообразно заменить две пары канонических элементов другими, также каноническими. Пусть ими являются элементы  $h_1, \gamma_1$  и  $h_4, \gamma_4$ . Имеем

$$n = \frac{\beta}{\mu a^{3/2}}, \quad a = -\frac{\beta^2}{2\mu h},$$

где под  $h$  будет пониматься либо  $h_1$ , либо  $h_4$ . Следовательно, имеем

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\beta^2} (-2h)^{3/2}.$$

Но тогда координаты тел  $A$  и  $B$ , как было показано в § 9 гл. IV, будут периодическими функциями величины  $n(t + \gamma)$  и могут быть разложены в тригонометрические ряды по синусам и косинусам этого угла. Очевидно, что в правых частях уравнений

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial h_i}$$

при  $i = 1$  и  $i = 4$  будут содержаться члены, которые умножаются на время (так как в  $n$  входит либо  $h_1$ , либо  $h_4$ ). Но такие члены неудобны с различных точек зрения, и их в этом случае легко избежать. Уже Лаплас и Лагранж ввели в связи с этим другие элементы, для которых такие члены не встречаются. Для канонических дифференциальных уравнений (21) эта замена элементов была впервые выполнена Делоне [26].

Положим

$$l = n(t + \gamma_1). \quad (22)$$

Если теперь рассмотреть уравнения

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial \gamma_1}, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial h_1},$$

то, очевидно,

$$\frac{\partial H''}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial H''}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \gamma_1} = n \frac{\partial H''}{\partial l},$$

и, следовательно,

$$\frac{dh_1}{dt} = -n \frac{\partial H''}{\partial l}. \quad (23)$$

Далее имеем

$$\frac{dl}{dt} = n \left( 1 + \frac{d\gamma_1}{dt} \right) + (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} \frac{dh_1}{dt}. \quad (24)$$

Если обозначить через  $\left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right)$  производную от  $H''$  по явно входящему  $h_1$ , то

$$\frac{\partial H''}{\partial h_1} = \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial H''}{\partial t} (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1}.$$

Так как теперь

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial h_1},$$

то из (24) получим

$$\frac{dl}{dt} = n + n \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right) + n \frac{\partial H''}{\partial t} (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} + (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} \frac{dh_1}{dt},$$

или, согласно (23),

$$\frac{dl}{dt} = n + n \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right). \quad (25)$$

Формулы (23) и (25) решают задачу.

Вводя величину

$$L = \beta \sqrt{a}, \quad (26)$$

можно несколько упростить уравнения и одновременно придать им более симметричную форму. Имеем теперь

$$L = \frac{\beta^2}{\sqrt{-2\mu h_1}},$$

или

$$h_1 = -\frac{\beta^4}{2\mu L^2}, \quad (24^*)$$

так что

$$n = \frac{\beta^4}{\mu L^3}. \quad (27)$$

Таким образом, имеем

$$-n \frac{\partial H''}{\partial l} = \frac{dh_1}{dt} = \frac{\beta^4}{\mu L^3} \frac{dL}{dt} = n \frac{dL}{dt},$$

и поэтому

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial l}. \quad (28)$$

Далее имеем

$$\left(\frac{\partial H''}{\partial L}\right) = \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right) \frac{\partial h_1}{\partial L} = n \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right);$$

тогда вместо (23) и (25) получим

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = \left(\frac{\partial H''}{\partial L}\right) + n, \quad (29)$$

где скобки около  $\frac{\partial H''}{\partial L}$  могут быть опущены, если дифференцировать только по явно входящему  $L$ , считая  $n$  не зависящим от этой величины.

Если несколько изменить характеристическую функцию, то уравнения (29) можно записать в канонической форме. Положим

$$H'' - \frac{\beta^4}{2\mu L^2} = -F; \quad (30)$$

в таком случае

$$-\frac{\partial F}{\partial L} = n + \frac{\partial H''}{\partial L};$$

тогда вместо (29) получим уравнения

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}. \quad (31)$$

Точно таким же путем элементы  $h_4$  и  $\gamma_4$  замещаются новыми каноническими элементами. Итак, введем характеристическую функцию следующего вида:

$$F = \frac{\beta_a^4}{2\mu_a L^2} + \frac{\beta_b^4}{2\mu_b L^2} - H''.$$

Обозначая элементы орбиты  $B$  через  $L, G, H, l, g, h$ , а соответствующие элементы орбиты  $A$  через  $L', G', H', l', g', h'$ , получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H'}, \end{aligned} \right\} \quad (32^*)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L &= \beta \sqrt{a}, & l &= n(t + \gamma), \\ G &= \beta \sqrt{a(1 - e^2)}, & g &= \pi - \Omega, \\ H &= \beta \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i, & h &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (32^{**})$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} L' &= \beta' \sqrt{a'}, & l' &= n'(t + \gamma'), \\ G' &= \beta' \sqrt{a'(1 - e'^2)}, & g' &= \pi' - \Omega', \\ H' &= \beta' \sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos i', & h' &= \Omega'. \end{aligned} \right\} (32^{***})$$

Приведем еще значения  $\beta$  и  $\beta'$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{km_b m_c}{\sqrt{m_b + m_c}}, \\ \beta' &= km_a \sqrt{\frac{m_c(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}}. \end{aligned} \right\} (33)$$

Средние движения даются формулами (19\*) и (20\*) \*).

Для характеристической функции  $F$ , входящей в (32) и (32\*), из (3) и (8\*) получим следующее выражение:

$$H = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} + \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ga}}. \quad (34)$$

Функция  $F$  обычно называется возмущающей или пертурбационной функцией. Два первых члена в приведенном выше выражении согласно (33) и (4) имеют порядок возмущающих масс, а последующие члены — порядок квадрата малых масс  $m_a$  и  $m_b$ .

## § 6. Вариация постоянных для относительных координат

Кеплеровские эллипсы могут быть использованы в качестве промежуточных орбит не только для якобиевых координат, но и для обыкновенных или относительных канонических координат. Геометрический смысл этих орбит различен, хотя различие между ними всегда имеет порядок возмущающей массы. С формальной точки зрения отличие связано с различными значениями постоянных  $\beta$  и  $\beta'$  и функции  $F$ . Это значит, что для вычисления возмущений элементов можно использовать формулы (32) и (32\*); нужно только задать другие значения входящим в формулы (32\*) и (32\*\*\*) постоянным  $\beta$  и  $\beta'$  и возмущающей функции. В частности, при обыкновенных относительных координатах для каждого тела имеется особая возмущающая функция.

Сначала рассмотрим обыкновенные относительные координаты. Для них согласно (17) § 2 справедливы полуканонические

\* ) Едва ли нужно отмечать, что не следует смешивать элементы  $H$  и  $H'$  с такими же обозначениями для характеристической функции.

дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где выражения для  $H_a$  и  $H_b$  задаются формулой (16) § 2. Полагая теперь

$$H_a = H'_a + H''_a, \quad H_b = H'_b + H''_b, \quad (2)$$

выберем функции  $H'_a$  и  $H'_b$  таким образом, что

$$\left. \begin{aligned} H'_a &= \frac{1}{2m_a} \sum_{i=1}^3 p_i^2 - \frac{k^2 m_a (m_a + m_c)}{r_{ac}}, \\ H'_b &= \frac{1}{2m_b} \sum_{i=4}^6 p_i^2 - \frac{k^2 m_b (m_b + m_c)}{r_{bc}}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} r_{ac}^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ r_{bc}^2 &= q_4^2 + q_5^2 + q_6^2. \end{aligned}$$

Интегрирование дифференциальных уравнений, определяющих кеплеровские эллипсы,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'_a}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'_a}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'_b}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'_b}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

по методу Гамильтона — Якоби сводится к интегрированию уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_3} \right)^2 \right\} = \frac{\beta^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \mu^2 l_1, \quad (5)$$

которое полностью совпадает с уравнением (14) предыдущего параграфа. Здесь постоянные  $\beta^2$  и  $\mu$  имеют следующие значения: для массы  $A$ :

$$\mu = m_a, \quad \beta^2 = k^2 m_a^2 (m_a + m_c), \quad (6)$$

для массы  $B$ :

$$\mu = m_b, \quad \beta^2 = k^2 m_b^2 (m_b + m_c). \quad (6^*)$$

Возникающие при интегрировании (5) канонические элементы выразим по формулам (21\*) § 5 через эллиптические элементы, а затем введем элементы Делоне; тогда получим дифференциальные уравнения (32) и (32\*) § 5. Для массы  $A$  возмущающая функция имеет следующую форму:

$$F_a = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{bc}^3} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \quad (7)$$

а для массы  $B$ :

$$F_b = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ac}^3} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6). \quad (7^*)$$

Для среднего движения имеем выражение (17\*) § 5:

$$n = \frac{\beta}{\mu a^{3/2}} = \frac{\beta^4}{\mu L^3}$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} n_a &= \frac{k \sqrt{m_a + m_c}}{a^{3/2}}, \\ n_b &= \frac{k \sqrt{m_b + m_c}}{a^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Рассматривая канонические относительные координаты, для характеристической функции в соответствии с § 3 будем иметь выражение

$$H = \frac{1}{2} S \left( \frac{p_1^2}{m_a'} + \frac{p_4^2}{m_b'} + \frac{2p_1 p_4}{m_c'} \right) - V, \quad (9)$$

где  $m_a'$ ,  $m_b'$  и  $m_c'$  даются формулами (7\*) § 3. Словая функция  $V$  согласно (1) § 1 имеет вид

$$V = \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} + \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}. \quad (9^*)$$

Положим теперь

$$H = H'_a + H'_b + H'', \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H'_a &= \frac{1}{2} S \left( \frac{p_1^2}{m_a'} - \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} \right), \\ H'_b &= \frac{1}{2} S \left( \frac{p_4^2}{m_b'} - \frac{k^2 m_b m_a}{r_{bc}} \right); \end{aligned} \right\} \quad (10^*)$$

тогда

$$H'' = S \frac{r_1 p_4}{m_c'} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}. \quad (10^{**})$$

Поэтому кеплеровские эллипсы в этом случае будут определяться дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'_a}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'_a}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'_b}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'_b}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и мы опять сведем задачу к рассмотрению уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial q_3} \right)^2 \right\} = \frac{\beta^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \mu h_1, \quad (11^*)$$

где теперь постоянные  $\beta^2$  и  $\mu$  для массы  $A$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu_a &= m'_a = \frac{m_a m_c}{m_a + m_c}, \\ \beta_a^2 &= k^2 m'_a m_a m_c = \frac{k^2 m_a^2 m_c^2}{m_a + m_c}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

для массы  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu_b &= \frac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \\ \beta_b^2 &= k^2 m'_b m_b m_c = \frac{k^2 m_b^2 m_c^2}{m_b + m_c}. \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

Дифференциальные уравнения в переменных Делоне принимают форму (32) и (32\*) § 5, а средние движения будут выражаться следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} n_a &= \frac{k \sqrt{m_a + m_c}}{a^{3/2}}, \\ n_b &= \frac{k \sqrt{m_b + m_c}}{a^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

т. е. точно так же, как и для случая обыкновенных относительных координат. Однако кеплеровские эллипсы в обоих случаях не будут одинаковыми, как это видно из значений (6) и (12) постоянных  $\beta$  и  $\mu$ . Они отличаются на величину порядка возмущающей массы. В одном из следующих параграфов мы сформулируем более точно различие между каноническими и обычными координатами.

### § 7. Интеграл живых сил и интегралы площадей в различных координатах

Дифференциальные уравнения для канонических относительных координат и для якобиевых координат имели форму

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (1)$$

Так как в обоих случаях  $H$  явно не содержит времени и характеристическая функция зависит только от переменных  $p_i$  и  $q_i$ , то из (1), умножая уравнения на  $\frac{dp_i}{dt}$  и  $-\frac{dq_i}{dt}$  и складывая результаты, получим интеграл

$$H = \text{const}, \quad (2)$$

который называется интегралом живых сил и по (16) § 4 и (7) § 3 имеет форму — в якобиевых координатах:

$$\frac{1}{2} S \left( \frac{P_1^2}{\mu_b} + \frac{P_4^2}{\mu_a} \right) - V = h_1, \quad (3)$$

в канонических относительных координатах:

$$\frac{1}{2} S \left( \frac{p_1^2}{m_a} + \frac{p_4^2}{m_b} + \frac{2p_1 p_4}{m_c} \right) - V = h_1,$$

где суммирование распространяется на все три координаты. Для якобиевых координат согласно (14\*) § 4 имеем

$$p_1 = \mu_a \dot{q}_1, \quad p_4 = \mu_b \dot{q}_4, \quad (4)$$

тогда, следовательно, вместо (3) можно записать

$$\frac{1}{2} [\mu_a (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \mu_b (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2)] = V + h, \quad (3^*)$$

т. е. интеграл живых сил имеет здесь то же самое выражение, что и в случае абсолютных координат, но множители, зависящие от масс, имеют другое значение.

Чтобы выразить интеграл живых сил в обыкновенных относительных координатах, необходимо подставить в (4) выражения (5\*) § 3

$$\left. \begin{aligned} M p_1 &= m_a (m_b + m_c) \dot{q}_1 - m_a m_b \dot{q}_4, \\ M p_4 &= -m_a m_b \dot{q}_1 + m_b (m_a + m_c) \dot{q}_4, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$M = m_a + m_b + m_c,$$

и тогда вместо (4) получим

$$\frac{1}{2} S \frac{1}{M} [m_a(m_b + m_c) \dot{q}_1^2 + m_b(m_a + m_c) \dot{q}_4^2 - 2m_a m_b \dot{q}_1 \dot{q}_4] = V + h. \quad (6)$$

Такую форму принимает интеграл живых сил, будучи выраженным через относительные координаты.

Перейдем теперь к интегралам площадей, которые по (12) § 1 в абсолютных координатах выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum (x_{3i+2} y_{3i+3} - x_{3i+3} y_{3i+2}) &= c_1, \\ \sum (x_{3i+3} y_{3i+1} - x_{3i+1} y_{3i+3}) &= c_2, \\ \sum (x_{3i+1} y_{3i+2} - x_{3i+2} y_{3i+1}) &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  суть прямоугольные координаты массы  $A$ ,  $x_4, x_5, x_6$  — координаты массы  $B$  и  $x_7, x_8, x_9$  — координаты массы  $C$ . Кроме того,

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}. \quad (7^*)$$

При помощи интегралов центра инерции находим, что интегралы (7) сохраняют свою форму, если начало координат поместить в центр масс, следовательно, интегралы площадей можно выразить в форме

$$\left. \begin{aligned} \sum (\xi_{3i+2} \eta_{3i+3} - \xi_{3i+3} \eta_{3i+2}) &= c'_1, \\ \sum (\xi_{3i+3} \eta_{3i+1} - \xi_{3i+1} \eta_{3i+3}) &= c'_2, \\ \sum (\xi_{3i+1} \eta_{3i+2} - \xi_{3i+2} \eta_{3i+1}) &= c'_3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где постоянные в правых частях, вообще говоря, отличны от постоянных  $c_1, c_2, c_3$ .

Для получения выражений для интегралов площадей в канонических относительных координатах необходимо использовать формулы (3), (4), (6\*) и (6\*\*) § 3, которые дают

$$\left. \begin{aligned} M\xi_1 &= (m_b + m_c) q_1 - m_b q_4, \\ M\xi_4 &= -m_a q_1 + (m_a + m_c) q_4, \\ M\xi_7 &= -m_a q_1 - m_b q_4, \\ \eta_i &= p_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \\ \eta_7 &= -(p_1 + p_4), \\ \eta_8 &= -(p_2 + p_5), \\ \eta_9 &= -(p_3 + p_6), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

если под  $q_1, q_2, \dots, q_6, p_1, p_2, \dots, p_6$  понимать канонические координаты. Разрешая эти уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \xi_1 - \xi_7, \\ q_4 &= \xi_4 - \xi_7, \\ p_i &= \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

Но отсюда следует

$$\begin{aligned} q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 &= \\ &= (\xi_2 - \xi_8) \eta_3 - (\xi_3 - \xi_9) \eta_2 + (\xi_5 - \xi_8) \eta_6 - (\xi_6 - \xi_9) \eta_5 = \\ &= \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 + \xi_5 \eta_6 - \xi_6 \eta_5 - \xi_8 (\eta_3 + \eta_6) + \xi_9 (\eta_2 + \eta_5) = \\ &= \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 + \xi_5 \eta_6 - \xi_6 \eta_5 + \xi_8 \eta_9 - \xi_9 \eta_8 = c_1', \end{aligned}$$

и для интегралов площадей получим выражения

$$\left. \begin{aligned} q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 &= c_1', \\ q_3 p_4 - q_4 p_3 + q_6 p_1 - q_1 p_6 &= c_2', \\ q_4 p_5 - q_5 p_4 + q_1 p_2 - q_2 p_1 &= c_3'. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, форма интегралов площадей остается неизменной при переходе от абсолютных координат к каноническим относительным.

То же самое имеет место, если воспользоваться преобразованием Якоби. А именно, применяя координаты Якоби, по (15) § 4 будем иметь

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (11)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \sum \frac{p_i^2}{\mu_i} - V.$$

Но поскольку

$$p_i = \mu_i \frac{dq_i}{dt},$$

то вместо (11) можно написать

$$\mu_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (11^*)$$

и так как  $V$  не изменяется при повороте системы координат, то точно таким же путем, как это было сделано в § 1 при рассмотрении абсолютных координат, получим

$$-\frac{\partial V}{\partial q_2} q_3 + \frac{\partial V}{\partial q_3} q_2 - \frac{\partial V}{\partial q_5} q_6 + \frac{\partial V}{\partial q_6} q_5 = 0.$$

Если подставить выражение (11\*) и выполнить интегрирование, замечая при этом, что

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_b, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_a,$$

то получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \left( q_2 \frac{dq_3}{dt} - q_3 \frac{dq_2}{dt} \right) + \mu_a \left( q_5 \frac{dq_6}{dt} - q_6 \frac{dq_5}{dt} \right) &= c_1'', \\ \mu_b \left( q_3 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_3}{dt} \right) + \mu_a \left( q_6 \frac{dq_4}{dt} - q_4 \frac{dq_6}{dt} \right) &= c_2'', \\ \mu_b \left( q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt} \right) + \mu_a \left( q_4 \frac{dq_5}{dt} - q_5 \frac{dq_4}{dt} \right) &= c_3'', \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

которые могут быть записаны также в форме (10).

Если интегралы площадей в каких-либо координатах принимают форму (12), то говорят, что в этих координатах интегралы площадей остаются справедливыми. Само собой разумеется, что интегралы, которые соответствуют интегралам площадей, должны существовать при любом выборе координат. Но позже мы увидим, что форма (12) весьма выгодна в ряде общих рассуждений, имеющих важное значение для задачи трех тел.

Если использовать обыкновенные относительные координаты, то форма интегралов площадей окажется более сложной. Ее можно получить из (10) и (9). Если первые два из соотношений (9) умножить соответственно на  $m_1 = m_a$  и  $m_4 = m_b$  и принять во внимание четвертое соотношение, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} M p_1 &= m_a (m_b + m_c) \dot{q}_1 - m_a m_b \dot{q}_4, \\ M p_4 &= -m_a m_b \dot{q}_1 + m_b (m_a + m_c) \dot{q}_4; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

подставляя эти соотношения в (10), получим первый из интегралов площадей в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{m_a (m_b + m_c)}{M} (q_2 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_2) + \frac{m_b (m_a + m_c)}{M} (q_5 \dot{q}_6 - q_6 \dot{q}_5) &= \\ = c_1' + \frac{m_a m_b}{M} (q_2 \dot{q}_6 - q_6 \dot{q}_2 + q_5 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_5). \end{aligned} \quad (14)$$

Другие интегралы площадей получаются в результате циклической перестановки индексов. Следует заметить, что члены в правой части (после  $c_1'$ ) будут второго порядка относительно масс.

## § 8. Оскулирующие элементы

Если координаты и скорости тела будут выражены через определенные параметры

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \Phi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \dot{q}_i &= \Psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ (i &= 1, 2, \dots, 6), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  суть параметры или элементы орбиты, то может случиться, что функции  $\Phi_i$  и  $\Psi_i$  таковы, что

$$\Psi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad (2)$$

или

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t}; \quad (2^*)$$

тогда производные от координат  $q_i$  будут вычисляться точно таким же образом, как и в случае неизменных элементов.

В этом случае элементы орбиты называются оскулирующими, так как промежуточная орбита в каждый момент времени касается истинной орбиты. Те элементы, которые вводились в качестве переменных величин для случая якобиевых координат или обыкновенных относительных координат, являются оскулирующими. Это не будет иметь места для элементов, введенных в случае канонических относительных координат.

Предположим, что координаты для промежуточной орбиты суть  $(q_i)$  и  $(p_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), а соответствующие координаты для истинной орбиты  $p_i$  и  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Тогда согласно методу вариации произвольных постоянных имеем

$$p_i = (p_i), \quad q_i = (q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3)$$

Промежуточные орбиты, которые мы рассматривали в двух предыдущих параграфах, определяются дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(q_i)}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial (p_i)}, & \frac{d(p_i)}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial (q_i)} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{d(q_i)}{dt} &= \frac{\partial H_2}{\partial (p_i)}, & \frac{d(p_i)}{dt} &= -\frac{\partial H_2}{\partial (q_i)} & (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2}{2v_1} + \Phi_1((q_1), (q_2), (q_3)), \\ H_2 &= \frac{(p_4)^2 + (p_5)^2 + (p_6)^2}{2v_2} + \Phi_2((q_4), (q_5), (q_6)). \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

Здесь через  $v_1$  и  $v_2$  обозначены величины, которые зависят только от масс и имеют различные значения в разных системах координат.

Из (4) и (4\*) следует, что для  $i = 1, 2, 3$

$$(p_i) = v_1 \frac{d(q_i)}{dt} \quad (5)$$

и для  $i = 4, 5, 6$

$$(p_i) = v_2 \frac{d(q_i)}{dt}. \quad (5^*)$$

Согласно § 6—7 для истинных орбит в обыкновенных относительных координатах и в якобиевых координатах будет

$$\left. \begin{aligned} p_i &= v_1 \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3), \\ p_i &= v_2 \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для этих координат согласно (3) всегда имеем

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d(q_i)}{dt} \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t}.$$

В этом случае промежуточные орбиты всегда являются оскулирующими.

Иначе будет при использовании канонических относительных координат. Согласно (13) § 7 имеем

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{m_a(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \dot{q}_1 - \frac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} \dot{q}_4, \\ p_4 &= -\frac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} \dot{q}_1 + \frac{m_b(m_a + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \dot{q}_4, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

в то время как соотношения (5) и (5\*) дают

$$\left. \begin{aligned} (p_1) &= \frac{m_a m_c}{m_a + m_c} (\dot{q}_1) = \frac{m_a m_c}{m_a + m_c} \frac{\partial q_1}{\partial t}, \\ (p_4) &= \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} (\dot{q}_4) = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} \frac{\partial q_4}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из (3) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{m_a(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \frac{dq_1}{dt} - \frac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} \frac{dq_4}{dt} = \frac{m_a m_c}{m_a + m_c} \frac{\partial q_1}{\partial t}, \\ &-\frac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} \frac{dq_1}{dt} + \frac{m_b(m_a + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \frac{dq_4}{dt} = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} \frac{\partial q_4}{\partial t}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{m_b}{m_b + m_c} \frac{\partial q_4}{\partial t}, \\ \frac{dq_4}{dt} &= \frac{\partial q_4}{\partial t} + \frac{m_a}{m_a + m_c} \frac{\partial q_1}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Стало быть, скорости для промежуточной и истинной орбит не совпадают друг с другом. Таким образом, элементы, которые вводятся в случае этих координат, не являются оскулирующими.

Различие между компонентами скоростей в истинном и промежуточном движении согласно (10) имеет порядок возмущающей массы. Оно может быть еще более значительным, если скорости будут весьма большими, что может встретиться, если две массы проходят достаточно близко друг от друга.

Недостаток канонических относительных координат состоит в том, что при их применении элементы не будут оскулирующими, но с теоретической точки зрения это не имеет большого значения. С практической точки зрения оскулирующие элементы представляют определенные преимущества, и поэтому координаты Якоби предпочтительнее канонических относительных координат.

### § 9. Исключение узла. Теорема Лапласа об устойчивости

Из интегралов площадей задачи трех тел можно получить некоторые важные выводы, к которым мы теперь перейдем.

Обозначим якобиевы координаты массы  $B$  через  $q_1, q_2, q_3$ , а координаты массы  $A$  через  $q_4, q_5, q_6$ . Начало координат в первом случае находится в массе  $C$ , а в последнем случае — в центре инерции масс  $C$  и  $B$ . Полагая

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \mu_b \dot{q}_i & (i = 1, 2, 3), \\ p_i &= \mu_a \dot{q}_i & (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для промежуточной орбиты будем иметь дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где согласно (10\*) § 5

$$\left. \begin{aligned} H_b &= \frac{1}{\mu_b} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \\ H_a &= \frac{1}{\mu_a} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_a m_c}{\sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

В соответствии с (1), мы можем записать эти уравнения также в форме

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \mu_a \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда получим интегралы площадей для промежуточной орбиты массы  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \left( q_2 \frac{dq_3}{dt} - q_3 \frac{dq_2}{dt} \right) &= c_1, \\ \mu_b \left( q_3 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_3}{dt} \right) &= c_2, \\ \mu_b \left( q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt} \right) &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и аналогичные выражения для тела  $A$ .

Промежуточное движение каждого из тел происходит в плоскости, положение которой определяется формулами (5) § 1 гл. IV. Если наклонность этой плоскости обозначить через  $i$ , а долготу восходящего узла — через  $\Omega$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -c \sin i \cos \Omega, \\ c_3 &= c \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Для массы  $A$  имеют место аналогичные уравнения, которые мы запишем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} c'_1 &= c' \sin i' \sin \Omega', \\ c'_2 &= -c' \sin i' \cos \Omega', \\ c'_3 &= c' \cos i'. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если плоскость  $XU$  будет лежать в плоскости орбиты тела  $B$ , то получим

$$\mu_b \left( q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt} \right) = c, \quad (7)$$

или, если ввести полярные координаты (см. § 5),

$$\mu_b r^2 \frac{dv}{dt} = c, \quad (8)$$

где  $v$  обозначает долготу в орбите. Но теперь согласно (16\*\*) § 5

$$\mu_b r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} = h_3 = h_2 \cos i. \quad (8^*)$$

Если плоскость  $XU$  лежит в плоскости орбиты  $B$ , то  $\varphi = 0$ ,  $i = 0$  и, следовательно, уравнение (8\*) примет вид

$$\mu_b r^2 \frac{d\theta}{dt} = h_2, \quad (8^{**})$$

где теперь  $\theta = v$ . Если сравнить (8) и (8\*), то будем иметь

$$c = h_2 = \beta \sqrt{a(1-e^2)}, \quad (9)$$

где  $\beta$  определено так же, как в § 5.

Если подставить эти выражения в (5) и (4), то интегралы площадей примут следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \left( q_2 \frac{dq_3}{dt} - q_3 \frac{dq_2}{dt} \right) &= \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \sin \Omega, \\ \mu_b \left( q_3 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_3}{dt} \right) &= -\beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \cos \Omega, \\ \mu_b \left( q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt} \right) &= \beta \sqrt{a(1-e^2)} \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для тела  $A$  получим аналогичные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_a \left( q_5 \frac{dq_6}{dt} - q_6 \frac{dq_5}{dt} \right) &= \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \sin \Omega', \\ \mu_a \left( q_6 \frac{dq_4}{dt} - q_4 \frac{dq_6}{dt} \right) &= -\beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \cos \Omega', \\ \mu_a \left( q_4 \frac{dq_5}{dt} - q_5 \frac{dq_4}{dt} \right) &= \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos i'. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Переходя теперь к истинным орбитам и обозначая координаты точек  $B$  и  $A$  соответственно через  $q_1, q_2, q_3$  и через  $q_4, q_5, q_6$ , по (12) § 7 получим интегралы площадей

$$\left. \begin{aligned} \mu_b \left( q_2 \frac{dq_3}{dt} - q_3 \frac{dq_2}{dt} \right) + \mu_a \left( q_5 \frac{dq_6}{dt} - q_6 \frac{dq_5}{dt} \right) &= c_1'', \\ \mu_b \left( q_3 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_3}{dt} \right) + \mu_a \left( q_6 \frac{dq_4}{dt} - q_4 \frac{dq_6}{dt} \right) &= c_2'', \\ \mu_b \left( q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt} \right) + \mu_a \left( q_4 \frac{dq_5}{dt} - q_5 \frac{dq_4}{dt} \right) &= c_3''. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Известно, однако, что в этом случае промежуточные орбиты точек  $B$  и  $A$  являются оскулирующими орбитами \*). Координаты и

\*) Это не является необходимым для заключения об оскулирующем характере орбит. На самом деле достаточно, чтобы для интегралов площадей имела место форма (10) § 7.

скорости можно выразить одинаковым образом через элементы и время вне зависимости от того, имеем ли мы дело с истинной или промежуточной орбитой. Вспомогательные выражения (10) и (11) можно подставить в (12), и тогда интегралы площадей будут выражены следующим образом через оскулирующие элементы:

$$\left. \begin{aligned} \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \sin \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \sin \Omega' &= c_1'', \\ \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \cos \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \cos \Omega' &= -c_2'', \\ \beta \sqrt{a(1-e^2)} \cos i + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos i' &= c_3''. \end{aligned} \right\} (13)$$

При помощи этих интегралов в задаче трех тел можно вычислить фокальный параметр [ $p = a(1 - e^2)$ ], наклонность и долготу восходящего узла эллипса, если известны соответствующие величины для другого эллипса.

Эти уравнения допускают простую геометрическую трактовку, если в качестве основной плоскости  $XU$  выбрать неизменяемую плоскость. Тогда имеем  $c_1'' = c_2'' = 0$ , и если третью постоянную обозначить через  $C$ , то уравнения (13) выразятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \sin \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \sin \Omega' &= 0, \\ \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \cos \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \cos \Omega' &= 0, \\ \beta \sqrt{a(1-e^2)} \cos i + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos i' &= C. \end{aligned} \right\} (14)$$

Теперь из первых двух уравнений получим

$$\operatorname{tg} \Omega = \operatorname{tg} \Omega', \quad (15)$$

и должно быть либо  $\Omega = \Omega'$ , либо  $\Omega = \Omega' + 180^\circ$ . В первом случае оба члена в первых двух уравнениях были бы одного и того же знака, и их сумма не могла бы стать равной нулю. Стало быть,

$$\Omega = \Omega' + 180^\circ. \quad (16)$$

Восходящий узел одной из орбит планет на неизменной плоскости совпадает с нисходящим узлом другой орбиты.

Эту изящную формулировку интегралов площадей впервые обнаружил Якоби.

Если обозначить параметр оскулирующего эллипса через  $p$ , так что

$$p = a(1 - e^2), \quad p' = a'(1 - e'^2),$$

то вместо (14) можно записать

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega' + 180^\circ, \\ \beta \sqrt{p} \sin i &= \beta' \sqrt{p'} \sin i', \\ \beta \sqrt{p} \cos i + \beta' \sqrt{p'} \cos i' &= C. \end{aligned} \right\} \quad (14^*)$$

Если заданы  $\Omega'$ ,  $i'$ ,  $p'$ , то с помощью этих уравнений можно вычислить  $\Omega$ ,  $i$  и  $p$ . Из третьего интеграла площадей следует важная теорема небесной механики, а именно, знаменитая теорема Лапласа об устойчивости. Благодаря исследованиям Лапласа и Лагранжа, к которым мы еще возвратимся в одном из следующих разделов, было показано, что если принимать во внимание по крайней мере только члены низшего порядка относительно возмущающих масс, то большие полуоси  $a$  и  $a'$  оскулирующих эллипсов будут совершать только периодические колебания вблизи средних значений  $a_0$  и  $a'_0$ . Это утверждение, которое составляет первую часть теоремы об устойчивости Лапласа, мы будем предполагать здесь доказанным.

Если не принимать во внимание эти периодические колебания и заменить эти величины в третьем уравнении (14) их средними значениями, то будем иметь

$$\beta \sqrt{a_0(1-e^2)} \cos i + \beta' \sqrt{a'_0(1-e'^2)} \cos i' = C. \quad (14^{**})$$

Обозначая средние движения через  $n_0$  и  $n'_0$ , согласно (17\*) § 5 получим

$$n_0 = \frac{\beta}{\mu a_0^{3/2}};$$

тогда вместо (14^{\*\*}) можно также записать

$$\mu n_0 a_0^2 \sqrt{1-e^2} \cos i + \mu' n'_0 a_0'^2 \sqrt{1-e'^2} \cos i' = C. \quad (17)$$

Так как  $a_0$  (а следовательно, также и  $n_0$ ) и  $a'_0$  предполагаются неизменными, то имеем также

$$\mu n_0 a_0^2 + \mu' n'_0 a_0'^2 = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\mu n_0 a_0^2 (1 - \sqrt{1-e^2} \cos i) + \mu' n'_0 a_0'^2 (1 - \sqrt{1-e'^2} \cos i') = C',$$

где  $C'$  обозначает новую постоянную.

Это уравнение можно записать в следующей форме:

$$\mu n_0 a_0^2 \frac{e^2 \cos^2 i + \sin^2 i}{1 + \sqrt{1-e^2} \cos i} + \mu' n'_0 a_0'^2 \frac{e'^2 \cos^2 i' + \sin^2 i'}{1 + \sqrt{1-e'^2} \cos i'} = C'. \quad (18)$$

Теперь предположим, что в некоторый момент времени эксцентриситеты и наклонности были малы. Вычисляя из (18) значение постоянной  $C'$  по значениям  $e$  и  $i$  в упомянутый момент времени, находим, что  $C'$  должно быть также малым. Но так как  $C'$  является величиной постоянной, то левая часть (18) всегда должна оставаться малой. Если, наконец, предположить, что множители  $\mu n_0 a_0^2$  и  $\mu' n'_0 a'_0{}^2$  (или, что то же, числа  $\beta \sqrt{a_0}$  и  $\beta' \sqrt{a'_0}$ ) суть величины одного и того же порядка, то из (18) будет следовать, что эксцентриситеты и наклонности должны иметь малые значения для любого момента времени.

Справедливость этой теоремы устанавливалась в предположениях, что:

1) большие полуоси  $a$  и  $a'$  испытывают только малые колебания,

2)  $\beta \sqrt{a}$  и  $\beta' \sqrt{a'}$  суть величины одного и того же порядка.

Последнее условие в каждом конкретном случае легко проверить, если только выполнено первое условие.

Что касается первого условия, то его выполнение доказано лишь с точностью до первых степеней масс; из различных соображений представляется весьма вероятным, что оно выполняется совершенно строго и в том случае, когда рассматривается движение на неограниченном промежутке времени. Здесь полезно рассмотреть, что в этом отношении можно заключить из интегралов площадей.

Предполагая, что движение происходит в одной плоскости, из (14\*) находим для  $i = 0$

$$\beta \sqrt{p} + \beta' \sqrt{p'} = C. \quad (19)$$

Это уравнение показывает, что параметр  $p$  или  $p'$  не может неограниченно возрастать. На самом деле максимальное значение этой величины определяется уравнениями

$$\sqrt{p} = \frac{C}{\beta}, \quad \sqrt{p'} = \frac{C}{\beta'}.$$

С другой стороны, с уравнением (19) очень хорошо согласуется предположение, что  $p$  и  $p'$  могут принимать произвольно малые значения. Это означало бы, что либо  $e$  приближается сколь угодно близко к единице, либо  $a$  принимает сколь угодно малые значения.

В предыдущих рассуждениях молчаливо предполагалось, что оба члена в (18) имеют один и тот же знак. Это будет в том случае, когда  $n$  и  $n'$  или оба положительны, или оба отрицательны, т. е. оба тела  $A$  и  $B$  обращаются вокруг начала координат в одном и том же направлении. Это предположение справедливо для нашей

планетной системы. Если одно или несколько тел движутся в направлении, обратном по сравнению с другими, то, как указал Лаплас, доказательство утрачивает свою силу.

Данное Лапласом доказательство устойчивости движения остается справедливым и для произвольного числа тел. Действительно, вместо (18) получим

$$\sum \mu n a^2 \frac{e^2 \cos^2 i + \sin^2 i}{1 + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 i}} = C', \quad (20)$$

и если все тела движутся в одном и том же направлении, то все члены в левой части равенства имеют одинаковые знаки. Так как сумма всех членов мала, что следует из наблюдательных данных о нашей планетной системе, то должен быть малым также каждый член. Эксцентриситеты и наклонности для планет нашей солнечной системы должны оставаться малыми в предположении, что  $a$  постоянно или близко к постоянной. Этот вывод может допускать только такие исключения, когда либо  $n a^2$  мало (т. е. для планет, которые очень близко расположены к Солнцу), либо сравнительно очень мало  $\mu$ . Из последнего замечания следует, что доказательство устойчивости Лапласа теряет свою силу для малых планет, наклонности и эксцентриситеты которых могут принимать большие значения.

Оскулирующие эллипсы, которые рассматривались здесь, были получены при использовании канонических координат Якоби. Если бы использовались обыкновенные относительные координаты и были введены соответствующие оскулирующие эллипсы, то, как было показано в § 7, интегралы площадей не приняли бы столь простой формы, а поэтому на эти элементы выводы Лапласа не распространяются. Если пренебрегать членами второго порядка относительно масс, то, как следует из (14) § 7, форма (12) для интегралов площадей сохранится и для обыкновенных относительных координат, и эти интегралы будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum m \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \sin \Omega &= c_1, \\ \sum m \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \cos \Omega &= c_2, \\ \sum m \sqrt{a(1-e^2)} \cos i &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В астрономии обычно используются только относительные координаты и получающиеся для них оскулирующие эллипсы. Из (21) находим, что вывод Лапласа относительно устойчивости нашей планетной системы справедлив также и для этих элементов, но только с точностью до первых степеней относительно масс (вклю-

чительно)\*). Полные выражения для интегралов площадей через обыкновенные оскулирующие элементы можно вывести из § 7 (14).

Возвращаясь опять к якобиевым координатам, выведем выражения для интегралов площадей через элементы Делоне (см. § 5). Полученные выражения найдут применение в следующем параграфе. Эти элементы были

$$\left. \begin{aligned} L &= \beta \sqrt{a}, & l &= n(t + \gamma), \\ G &= \beta \sqrt{a(1 - e^2)}, & g &= \pi - \Omega, \\ H &= \beta \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i, & h &= g. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Поэтому интегралы (13), будучи выраженными через эти элементы, примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{G^2 - H^2} \sin h + \sqrt{G'^2 - H'^2} \sin h' &= c_1'', \\ \sqrt{G^2 - H^2} \cos h + \sqrt{G'^2 - H'^2} \cos h' &= -c_2'', \\ H + H' &= c_3''. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Используя неизменяемую плоскость в качестве основной, как и ранее, получим  $h = h' + 180^\circ$ , и отсюда уравнения (23) можно записать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} h &= h' + 180^\circ, \\ G^2 - H^2 &= G'^2 - H'^2, \\ H + H' &= c. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Эту удобную форму интегралов площадей мы используем в следующем параграфе для понижения порядка системы дифференциальных уравнений задачи трех тел.

## § 10. Приведение системы дифференциальных уравнений задачи трех тел к четырем степеням свободы

Девять абсолютных прямоугольных координат трех масс в задаче трех тел первоначально определяются системой 18-го порядка [см. (2) § 1]. Система сводится к 12-му порядку либо при помощи шести интегралов центра инерции, либо введением

\*) Приведенные рассуждения не являются строгими. В последнее время существенный прогресс в решении проблемы устойчивости солнечной системы был достигнут В. И. Арнольдом [27], который доказал теорему: «Если масса, эксцентриситеты и наклонности планет достаточно малы, то для большинства начальных условий истинное движение условно периодически и мало отличается от лагранжева движения с подходящими начальными условиями в течение всего бесконечного промежутка времени  $-\infty < t < +\infty$ ». Однако и сейчас еще нельзя утверждать справедливость теоремы Лапласа. (Прим. перев.)

обыкновенных относительных координат, либо, если система будет иметь каноническую форму, введением канонических относительных координат, или координат Якоби или каким-либо иным путем.

Полученная таким образом система 12-го порядка обладает еще четырьмя интегралами, а именно, тремя интегралами площадей и интегралом живых сил. Поэтому, если использовать эти интегралы, можно получить систему 8-го порядка. Сохраняя каноническую форму дифференциальных уравнений, эту систему 8-го порядка можно записать как систему канонических уравнений с четырьмя степенями свободы. Оказывается, что характеристическая функция этой канонической системы остается не зависящей явно от времени. Следовательно, для этой системы 8-го порядка существует интеграл живых сил, и можно было бы с его помощью понизить порядок системы еще на единицу.

Как было показано впервые Лагранжем, а позже Якоби и др., дифференциальные уравнения задачи трех тел можно свести к системе 7-го порядка. Предлагаемый вывод канонической системы с четырьмя степенями свободы для задачи трех тел заимствован у Пуанкаре \*).

Будем исходить из дифференциальных уравнений в элементах Делоне и предположим, что неизменяемая плоскость принята в качестве плоскости  $XU$ . Тогда будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l'}, \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L'}, \quad (1^*)$$

и т. д., и интегралы площадей запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} h &= h' + 180^\circ, \\ G^2 - H^2 &= G'^2 - H'^2, \\ H + H' &= c. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

С помощью двух последних из этих уравнений  $H$  и  $H'$  можно выразить через  $G$  и  $G'$ . Второе уравнение дает

$$G^2 - G'^2 = H^2 - H'^2 = (H + H')(H - H') = c(H - H'),$$

\*) Понижение порядка дифференциальных уравнений задачи трех тел выполнялось Леви-Чивита [28], С. Ли [29], Воронцом [30], Радо [31] и др. (Прим. перев.)

так что

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} (G^2 - G'^2), \\ H' &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} (G^2 - G'^2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Возмущающая функция  $F$  зависит от элементов  $L, G, H, l, g, h, L', G', H', l', g', h'$ . Покажем, что если в качестве основной плоскости выбрана неизменяемая плоскость, то в  $F$  не будут содержаться  $h$  и  $h'$ . В гл. IV было показано, что для оскулирующего эллипса координаты являются периодическими функциями от  $l, g$  и  $h$ . Отсюда следует, что возмущающая функция, которая через координаты выражается при помощи формул (6), (6\*\*) и (34) § 5, будет периодической функцией от  $l, g, h$  и  $l', g', h'$ , так что можно записать

$$F = \Sigma A \frac{\cos}{\sin} (il + jg + kh + i'l' + j'g' + k'h'), \quad (4)$$

где  $i, j, k, i', j', k'$  принимают любые целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Коэффициенты  $A$  зависят только от  $L, G, H, L', G', H'$ .

Теперь согласно третьему интегралу площадей (2)

$$H + H' = c,$$

и, следовательно, имеем

$$\frac{dH}{dt} + \frac{dH'}{dt} = 0. \quad (5)$$

Из (1) и (1\*) находим

$$\frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial h'} = 0. \quad (5^*)$$

Подставляя вместо возмущающей функции в это уравнение ее значение (4), получим

$$\Sigma (k + k') A \frac{\sin}{\cos} (il + jg + kh + i'l' + j'g' + k'h') = 0. \quad (6)$$

Это уравнение должно выполняться тождественно, а это возможно только при  $k + k' = 0$ , так что элементы  $h$  и  $h'$  в возмущающей функции всегда встречаются только в сочетании  $h - h'$ . Если, в частности, выбрать неизменяемую плоскость в качестве плоскости  $XU$ , то согласно (2) будем иметь

$$h - h' = 180^\circ, \quad (7)$$

так что в этом случае  $F$  не будет зависеть от  $h$  и  $h'$ . Если при помощи (3) исключить  $H$  и  $H'$ , то  $F$  станет функцией от  $L, G, l, g,$

$L', G', l', g'$ . Используя для содержащихся в этой функции величин  $G$  и  $G'$  обозначения  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , так что

$$G = \Gamma, \quad G' = \Gamma', \quad (8^*)$$

по (3) имеем

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} (\Gamma^2 - \Gamma'^2), \\ H' &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} (\Gamma^2 - \Gamma'^2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma} = \frac{\partial F}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \Gamma} + \frac{\partial F}{\partial H'} \frac{\partial H'}{\partial \Gamma} = \frac{\partial F}{\partial \Gamma} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\Gamma}{c} - \frac{\partial F}{\partial H'} \frac{\Gamma}{c}.$$

Но из (7) и (1) следует

$$\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial H'} \quad (9)$$

и, значит, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma} = \frac{\partial F}{\partial G}. \quad (10)$$

Таким же путем получим

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma'} = \frac{\partial F}{\partial G'}. \quad (10^*)$$

Вместо (1) и (1\*) получим теперь следующие канонические дифференциальные уравнения для задачи трех тел:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{d\Gamma'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma'}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

которые соответствуют четырем степеням свободы.  $F$  является функцией от  $L, G, l, g, L', G', l', g'$ , которая получается из общего выражения (4) путем исключения  $G, G', H, H'$  при помощи (8\*) и (8).

После того как из уравнений (11)  $L, \Gamma, l, g, L', \Gamma', l', g'$  будут найдены как функции времени, движение общей линии узлов на неизменяемой плоскости найдется посредством квадратуры. А именно,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}, \quad (12)$$

где перед дифференцированием  $F$  следует рассматривать как функцию 12 первоначальных элементов. После дифференцирования введем  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  с помощью (8\*) и (8). Если уравнения (11) будут проинтегрированы, то в правой части (12) будет стоять известная функция времени, и тогда долгота восходящего узла найдется при помощи квадратуры.

Так как время не входит явно в  $F$ , то система (11) имеет интеграл живых сил

$$F = \text{const}, \quad (13)$$

при помощи которого можно исключить один из элементов и получить систему 7-го порядка. Наконец, вместо времени примем в качестве независимой переменной один из оставшихся элементов (например,  $l$ ); тогда окончательно будем иметь для задачи трех тел систему дифференциальных уравнений 6-го порядка.

Если в качестве независимой переменной использовать  $l$ , то система будет иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dl} &= -\frac{\partial F}{\partial g} : \frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg}{dl} &= \frac{\partial F}{\partial \Gamma} : \frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dL}{dl} &= -\frac{\partial F}{\partial l'} : \frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dl'}{dl} &= \frac{\partial F}{\partial L'} : \frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{d\Gamma'}{dl} &= -\frac{\partial F}{\partial g'} : \frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg'}{dl} &= \frac{\partial F}{\partial \Gamma'} : \frac{\partial F}{\partial L}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

После вычисления частных производных от  $F$  необходимо при помощи (13) из правых частей уравнений (14) исключить  $L$ . Уравнения (14) не обладают канонической формой. После того как система (14) проинтегрирована, величина  $l$  находится как функция времени посредством квадратур из уравнения

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}. \quad (15)$$

Если рассматривать движение трех тел в плоскости, то движение можно описать канонической системой с тремя степенями свободы.

При  $i = 0$   $G$  и  $H$  совпадают, и можно положить

$$G = H = \Pi. \quad (16)$$

Здесь существует только один интеграл площадей, а именно

$$\Pi + \Pi' = c. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial g} + \frac{\partial F}{\partial g'} = 0, \quad (18)$$

где  $g$  обозначает долготу перигелия. Это уравнение показывает, что  $F$  зависит только от разности  $g - g'$ .

Введем теперь две величины,  $K$  и  $k$ , при помощи следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} K &= \Pi, \\ k &= g - g', \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

из которых следует, что

$$\Pi' = c - K; \quad (19^*)$$

тогда при помощи (19) и (19\*)  $F$  можно представить как функцию  $L, l, K, k, L', l'$ . Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial \Pi} - \frac{\partial F}{\partial \Pi'}, \quad (20)$$

и поэтому

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d(g - g')}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial \Pi} + \frac{\partial F}{\partial \Pi'} = - \frac{\partial F}{\partial K}. \quad (21)$$

Далее имеем

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} = \frac{\partial F}{\partial k};$$

тогда дифференциальные уравнения движения выразятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial K}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Эти уравнения представляют собой каноническую систему с тремя степенями свободы.

После того как будет проинтегрирована система (22), долгота перигелия получается при помощи квадратур из уравнения

$$\frac{dg}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial \Pi}, \quad (22^*)$$

в котором после вычисления частных производных от  $F$  правые части должны быть выражены через  $L, L', K, l, l', k$ .

Уравнения (22) допускают интеграл живых сил

$$F = \text{const}, \quad (23)$$

поэтому, принимая вместо времени в качестве независимой переменной один из элементов, можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения в плоскости до четырех. Однако эта система не будет канонической.

При понижении порядка системы дифференциальных уравнений проблемы трех тел до четырех можно использовать произвольные канонические переменные  $q_i$ ,  $p_i$ . Необходимо только выразить через эти переменные интегралы площадей, и понижение порядка будет выполняться с большими или меньшими затруднениями таким же путем, как и выше. Автор показал, как можно составить канонические уравнения движения с тремя степенями свободы для случая плоского движения, если в качестве  $q$ -координат использовать расстояния трех тел от общего центра инерции при надлежащем выборе соответствующих канонических переменных [32]. Этот метод имеет свои преимущества, так как возмущающая функция оказывается алгебраической функцией переменных, в то время как оскулирующие элементы входят в возмущающую функцию трансцендентным образом. Эти преимущества достигаются и в том случае, когда вместо расстояний трех тел от общего центра инерции в качестве координат выбираются взаимные расстояния. Вывод дифференциальных уравнений оказывается точно таким же, что и при использовании в качестве обобщенных координат расстояний от центра инерции. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения в этом случае до восьмого в изящной форме было выполнено Брунсом [33].

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Введение новых канонических элементов

Если  $2n$  величин  $x_i$  и  $y_i$  определяются канонической системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

и если положить

$$\left. \begin{aligned} x_i &= f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \\ y_i &= g_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

то существует, очевидно, бесконечно много форм функций  $f_i$  и  $g_i$ , при которых для новых переменных  $\xi_i$  и  $\eta_i$  дифференциальные уравнения будут снова иметь каноническую форму:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Мы хотим отыскать условия, иначе говоря, определить форму функций  $f_i$  и  $g_i$  так, чтобы имели место уравнения (2) и (3).

Предположим, что  $F$  задана как функция  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и времени. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \\ &\quad + \frac{\partial \xi_i}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial \xi_i}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \xi_i}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dt}, \end{aligned}$$

или согласно (1)

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial y_n} - \\ &\quad - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} - \dots - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_n} \frac{\partial F}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Введем теперь обозначения

$$[a, b] = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial x_s} \frac{\partial b}{\partial y_s} - \frac{\partial a}{\partial y_s} \frac{\partial b}{\partial x_s} \right), \quad (4)$$

тогда

$$\frac{d\xi_i}{dt} = [\xi_i, F]. \quad (5)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_s} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y_s} + \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial y_s}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_s} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_s} + \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \eta_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_s} \frac{\partial F}{\partial x_s} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_s} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_s} \right) + \\ &+ \dots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_n}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_s} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_s} \right) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \eta_1}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_s} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_s} \right) + \dots + \frac{\partial F}{\partial \eta_n} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \eta_n}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y_s} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_s} \right). \end{aligned}$$

Если просуммировать все эти выражения, последовательно полагая  $s = 1, 2, \dots, n$ , получим

$$\begin{aligned} [\xi_i, F] &= [\xi_i, \xi_1] \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \dots + [\xi_i, \xi_n] \frac{\partial F}{\partial \xi_n} + \\ &+ [\xi_i, \eta_1] \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \dots + [\xi_i, \eta_n] \frac{\partial F}{\partial \eta_n}. \quad (6) \end{aligned}$$

Точно таким же образом получим

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} = [\eta_i, F] &= [\eta_i, \xi_1] \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \dots + [\eta_i, \xi_n] \frac{\partial F}{\partial \xi_n} + \\ &+ [\eta_i, \eta_1] \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \dots + [\eta_i, \eta_n] \frac{\partial F}{\partial \eta_n}. \quad (6^*) \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы дифференциальные уравнения имели вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i},$$

и эти уравнения, очевидно, выполняются, если удовлетворяются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [\xi_i, \xi_r] &= 0, \\ [\eta_i, \eta_r] &= 0, \\ [\xi_i, \eta_r] &= 0, \\ [\xi_i, \eta_i] &= 1 \\ (i, r &= 1, 2, \dots, n) \\ (i &\neq r). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если выполняются эти условия, то переменные, введенные при помощи (2), являются каноническими.

Соотношения (7) являются достаточными; необходимы ли они — это для нашей цели безразлично, так как эти условия для исследуемых здесь преобразований выполняются. Сравнивая (6) и (6\*) с (3), находим, что уравнения (7) будут также необходимы, если не делать никаких особых предположений относительно функции  $F$ .

С помощью этой теоремы мы введем теперь вместо элементов Делоне новые канонические переменные.

1. Вместо элементов  $L, G, H, l, g, h$  введем новые переменные  $\Lambda, \Gamma, Z, \lambda, \gamma, z$  при помощи следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= L, & \Gamma &= L - G, & Z &= G - H, \\ \lambda &= l + g + h, & \gamma &= -g - h, & z &= -h, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

а также соответствующие величины вместо элементов  $L', G'$  и т. д. Новые элементы  $\Lambda, \Gamma$  и т. д. будут каноническими. Действительно, если старые элементы  $L, G, H, l, g, h$  обозначить через  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ , так что  $L = x_1, G = x_2$  и т. д., а соответствующие новые элементы через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ , так что  $\Lambda = \xi_1, \Gamma = \xi_2$  и т. д., то, во-первых, находим, что

$$[\xi_i, \xi_r] = [\eta_i, \eta_r] = 0,$$

так как  $\xi_i$  зависят только от  $x_1, x_2, x_3$ , а  $\eta_i$  — только от  $y_1, y_2, y_3$ . Далее,

$$\begin{aligned} [\xi_1, \eta_1] &= 1, & [\xi_2, \eta_1] &= 0, & [\xi_3, \eta_1] &= 0, \\ [\xi_1, \eta_2] &= 0, & [\xi_2, \eta_2] &= 1, & [\xi_3, \eta_2] &= 0, \\ [\xi_1, \eta_3] &= 0, & [\xi_2, \eta_3] &= 0, & [\xi_3, \eta_3] &= 1. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (7) выполняются, и поэтому новые элементы будут каноническими. Выразим их через эллиптические элементы:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \beta \sqrt{a}, & \Gamma &= \beta \sqrt{a} (1 - \sqrt{1 - e^2}), & Z &= \beta \sqrt{a} (1 - e^2) (1 - \cos i), \\ \lambda &= l + \pi, & \gamma &= -\pi, & z &= -\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\lambda$  обозначает среднюю долготу в орбите,  $\gamma$  — долготу перигелия,  $z$  — долготу восходящего узла. Элемент  $\Gamma$  пропорционален квадрату эксцентриситета,  $Z$  — квадрату наклонности.

2. Введем, далее, вместо элементов  $\Gamma, Z, \gamma, z$  элементы  $\xi, \eta, p, q$  при помощи следующих равенств [2]:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{2\Gamma} \cos \gamma, & p &= \sqrt{2Z} \cos z, \\ \eta &= \sqrt{2\Gamma} \sin \gamma, & q &= \sqrt{2Z} \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Новые элементы также являются каноническими.

Так как при преобразовании (10) в выражения для новых элементов входят только два сопряженных элемента, то мы можем исследовать каждое преобразование отдельно. Предположим, что уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (11)$$

где  $F$  зависит от  $x, y$  и времени, преобразуются к переменным

$$\xi = \sqrt{2x} \cos y, \quad \eta = \sqrt{2x} \sin y; \quad (12)$$

тогда

$$[\xi, \xi] = 0, \quad [\eta, \eta] = 0,$$

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}} \cos y \cdot \sqrt{2x} \cos y + \sqrt{2x} \sin y \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \sin y = 1 \end{aligned}$$

и, значит,  $\xi, \eta$  являются каноническими. Отсюда следует, что каноническими будут и элементы, определяемые формулами (10).

Полученные канонические элементы мы положим в основу последующих исследований по теории возмущений. Их выражения через эллиптические элементы согласно (9) и (10) будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \beta \sqrt{a}, \quad \lambda = l + \pi, \\ \xi &= \sqrt{2\Lambda (1 - \sqrt{1 - e^2})} \cos \pi, \\ \eta &= -\sqrt{2\Lambda (1 - \sqrt{1 - e^2})} \sin \pi, \\ p &= \sqrt{2\Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} \cos \Omega, \\ q &= -\sqrt{2\Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} \sin \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $\lambda$  — средняя долгота.

Исследуем более подробно зависимость между приведенными выше элементами Пуанкаре и эллиптическими элементами. Из (13) следует, что

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 = 2(1 - \sqrt{1 - e^2}) = e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \dots \quad (14)$$

Это уравнение показывает, что  $e^2$  может быть разложено в ряд по степеням величины

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2.$$

Получим

$$e^2 = \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 - \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 \right]^2 + \dots \quad (14^*)$$

Далее, так как

$$\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e^2})} = e \left(1 + \frac{1}{8}e^2 + \dots\right),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} &= (1 + \sum \alpha_n e^{2n}) e \cos \pi, \\ \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} &= -(1 + \sum \alpha_n e^{2n}) e \sin \pi. \end{aligned}$$

Из (14\*) следует, что

$$\left. \begin{aligned} e \cos \pi &= \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[ \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 \right] + \dots \right\}, \\ e \sin \pi &= -\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[ \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 \right] + \dots \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

таким образом,  $e \cos \pi$  и  $e \sin \pi$  можно разложить в ряды по степеням  $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$  и  $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$ . Обратно, из (15) вытекает, что  $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$  и  $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$  можно разложить в ряды по степеням величин  $e \cos \pi$  и  $e \sin \pi$ .

Рассматривая теперь элементы  $p$  и  $q$ , находим, что

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{\Lambda}} (1 - e^2)^{-\frac{1}{4}} &= \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \sin^2 i})} \cos \Omega, \\ \frac{q}{\sqrt{\Lambda}} (1 - e^2)^{-\frac{1}{4}} &= -\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \sin^2 i})} \sin \Omega, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\sin i \cos \Omega$  и  $\sin i \sin \Omega$  могут быть разложены в ряды по степеням величин

$$\frac{p}{\sqrt{\Lambda}} (1 - e^2)^{-\frac{1}{4}} \quad \text{и} \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}} (1 - e^2)^{-\frac{1}{4}}.$$

Стало быть, мы приходим к заключению, что величины  $e \cos \pi$ ,  $e \sin \pi$ ,  $\sin i \cos \Omega$ ,  $\sin i \sin \Omega$  могут быть разложены в ряды по положительным степеням величин

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}},$$

и наоборот.

Если пренебречь членами третьего\*) порядка, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e \cos \pi &= \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, & e \sin \pi &= -\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \\ \sin i \cos \Omega &= \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, & \sin i \sin \Omega &= -\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В следующем параграфе мы докажем, что возмущающую функцию можно разложить в ряды по степеням  $e \cos \pi$ ,  $e \sin \pi$ ,  $\sin i \cos \Omega$ ,  $\sin i \sin \Omega$ . Отсюда следует также, что она может быть разложена по степеням

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}.$$

## § 2. Форма разложения возмущающей функции

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} r &= e \cos \pi, & u &= \sin i \cos \Omega, \\ s &= e \sin \pi, & v &= \sin i \sin \Omega, \\ r' &= e' \cos \pi', & & \text{и т. д.,} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

то можно показать, что возмущающую функцию можно разложить в ряд по степеням  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $r'$ ,  $s'$ ,  $u'$  и т. д., причем коэффициенты в этом разложении будут функциями элементов  $\Lambda$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda'$ ,  $\lambda'$  и т. д.

Так как возмущающая функция является аналитической функцией координат, которые конечны при  $r = s = u = r' = \dots = 0$ , то достаточно доказать, что координаты могут быть разложены в ряды по степеням рассматриваемых величин.

Заметим сначала, что

$$e^2 = r^2 + s^2, \quad \sin^2 i = u^2 + v^2,$$

и, следовательно,

$$e^{2n} = (r^2 + s^2)^n, \quad \sin^{2n} i = (u^2 + v^2)^n,$$

откуда следует, что все четные степени  $e$  и  $\sin i$  представляют собой целые рациональные функции  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $v$ .

Для прямоугольных координат в § 9 гл. IV мы нашли

$$\left. \begin{aligned} x &= A\xi + B\eta, \\ y &= A_1\xi + B_1\eta, \\ z &= A_2\xi + B_2\eta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

\*) И более высокого. (Прим. ред.)

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \sum'_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \cos il, \\ \eta &= a \sqrt{1-e^2} \sum'_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \sin il. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  и т. д. имели следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos(\pi - \Omega) \cos \Omega - \sin(\pi - \Omega) \sin \Omega \cos i, \\ B &= -\sin(\pi - \Omega) \cos \Omega - \cos(\pi - \Omega) \sin \Omega \cos i, \\ A_1 &= \cos(\pi - \Omega) \sin \Omega + \sin(\pi - \Omega) \cos \Omega \cos i, \\ B_1 &= -\sin(\pi - \Omega) \sin \Omega + \cos(\pi - \Omega) \cos \Omega \cos i, \\ A_2 &= \sin(\pi - \Omega) \sin i, \\ B_2 &= \cos(\pi - \Omega) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2^{**})$$

Эти коэффициенты могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \cos(\pi - \Omega) \cos \Omega - \sin(\pi - \Omega) \sin \Omega (1 - \sin^2 i)^{1/2} = \\ &= \cos(\pi - \Omega) \cos \Omega - \sin(\pi - \Omega) \sin \Omega \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 i - \right. \\ &- \frac{1}{8} \sin^4 i - \dots) = \cos \pi + \frac{1}{2} \sin^2 i \sin(\pi - \Omega) \sin \Omega \left(1 + \right. \\ &+ \frac{1}{4} \sin^2 i + \dots) = \cos \pi + \frac{1}{2} \sin^2 i \sin \Omega (\sin \pi \cos \Omega - \\ &- \cos \pi \sin \Omega) \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 i + \dots\right) = \cos \pi + \\ &+ \left(\frac{1}{2} uv \sin \pi - \frac{1}{2} v^2 \cos \pi\right) \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 i + \dots\right). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} u^2 \left[1 + \frac{1}{4} (u^2 + v^2) + \dots\right], \\ P_2 &= \frac{1}{2} uv \left[1 + \frac{1}{4} (u^2 + v^2) + \dots\right], \\ P_3 &= \frac{1}{2} v^2 \left[1 + \frac{1}{4} (u^2 + v^2) + \dots\right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  обозначают ряды, которые расположены по положительным степеням  $u$ ,  $v$  (и начинаются с членов 2-го порядка); тогда остальные коэффициенты можно представить в такой же

форме:

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos \pi + P_2 \sin \pi - P_3 \cos \pi, \\ B &= -\sin \pi + P_2 \cos \pi + P_3 \sin \pi, \\ A_1 &= \sin \pi - P_1 \sin \pi + P_2 \cos \pi, \\ B_1 &= \cos \pi - P_1 \cos \pi - P_2 \sin \pi, \\ A_2 &= \quad \quad \quad u \sin \pi - v \cos \pi, \\ B_2 &= \quad \quad \quad u \cos \pi + v \sin \pi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

По известной теореме тригонометрии

$$\cos n\theta = C_n \cos^n \theta + C_{n-2} \cos^{n-2} \theta + \dots, \quad (5)$$

где  $C_n$ ,  $C_{n-2}$  и т. д. зависят только от  $n$ . Дифференцированием получаем соответствующую формулу для  $\sin n\theta$ :

$$\sin n\theta = \sin \theta [D_{n-1} \cos^{n-1} \theta + D_{n-3} \cos^{n-3} \theta + \dots]. \quad (5^*)$$

Из этих выражений находим

$$\left. \begin{aligned} e^n \cos n\pi &= C_n r^n + C_{n-2} r^{n-2} (r^2 + s^2) + \dots, \\ e^n \sin n\pi &= s [D_{n-1} r^{n-1} + D_{n-3} r^{n-3} (r^2 + s^2) + \dots]; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

следовательно,  $e^n \cos n\pi$  и  $e^n \sin n\pi$  суть целые рациональные функции от  $r$  и  $s$  степени  $n$ .

Теперь рассмотрим постоянный член в (2\*). Согласно § 9 гл. IV в выражении для  $\eta$  он равен нулю, а в  $\xi$  равен  $-\frac{3}{2}ae$ .

Опуская постоянный член и избавляясь в (2\*) от отрицательных индексов, можем записать

$$\xi = a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} (J_{ie}^{i-1} - J_{ie}^{i+1}) \cos il,$$

$$\eta = a \sqrt{1-e^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} (J_{ie}^{i-1} + J_{ie}^{i+1}) \sin il,$$

где вместо средней долготы  $l$  подставим ее выражение из уравнения (13) § 1:

$$l = \lambda - \pi. \quad (7)$$

Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \sum \frac{1}{i} (J_{ie}^{i-1} - J_{ie}^{i+1}) (\cos i\pi \cos i\lambda + \sin i\pi \sin i\lambda), \\ \eta &= a \sqrt{1-e^2} \sum \frac{1}{i} (J_{ie}^{i-1} + J_{ie}^{i+1}) (-\sin i\pi \cos i\lambda + \cos i\pi \sin i\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Коэффициенты  $J_{ie}^k$  могут быть разложены в ряды по положительным степеням  $e$ , и согласно (9) § 9 гл. IV будет

$$J_{ie}^{i-1} = \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1} \left\{ 1 - \frac{1}{1! \cdot i} \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! i(i+1)} \left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \dots \right\}, \quad (9)$$

$$J_{ie}^{i+1} = \frac{1}{(i+1)!} \left(\frac{ie}{2}\right)^{i+1} \left\{ 1 - \frac{1}{1!(i+2)} \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(i+2)(i+3)} \left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \dots \right\}. \quad (9^*)$$

Подставив эти выражения в (8), найдем, что  $J_{ie}^{i-1}$  и  $J_{ie}^{i+1}$  следует умножить на  $\cos i\lambda$  или  $\sin i\lambda$ , а также на  $\cos \pi$  или  $\sin \pi$ , если принять во внимание выражения (2) и (4).

Очевидно, что в соответствии с (6) произведения

$$\begin{array}{cc} J_{ie}^{i+1} \cos i\pi & \cos \pi \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & \sin \pi \\ & \diagup \quad \diagdown \\ J_{ie}^{i+1} \sin i\pi & \sin \pi \end{array}$$

можно разложить в ряды по степеням  $r$  и  $s$ . Точно так же непосредственно находим, что

$$\begin{array}{cc} e^2 J_{ie}^{i-1} \cos i\pi & \cos \pi \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & \sin \pi \\ & \diagup \quad \diagdown \\ e^2 J_{ie}^{i-1} \sin i\pi & \sin \pi \end{array}$$

можно разложить подобным образом.

Остается только исследовать те члены в  $\xi$  и  $\eta$ , которые имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} (\xi) = a \sum \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} (\cos i\lambda \cos i\lambda + \sin i\lambda \sin i\lambda), \\ (\eta) = a \sum \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} (-\sin i\lambda \cos i\lambda + \cos i\lambda \sin i\lambda); \end{array} \right\} \quad (10)$$

затем эти выражения следует подставить в (2) вместо  $\xi$  и  $\eta$ .

Выполняя эти подстановки, находим, что получаются только следующие две комбинации, а именно, либо  $J_{ie}^{i-1} \cos (i-1)\pi$ , либо  $J_{ie}^{i-1} \sin (i-1)\pi$ , которые можно представить согласно (6) в виде степенных рядов относительно  $r$  и  $s$ . Это доказывает, что координаты можно разложить в ряды по степеням величин  $u$ ,  $v$ ,  $r$ ,  $s$ , а следовательно, также по степеням элементов Пуанкаре  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $p$ ,  $q$ . Приведенное здесь доказательство несколько громоздко, и, по-видимому, могло быть сделано более коротким.

## § 3. Разложение возмущающей функции

Если ограничиться задачей трех тел, то возмущающая функция  $F$  согласно (34) § 5 гл. V в якобиевых координатах имеет следующий вид:

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} + \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ga}}, \quad (1)$$

где

$$\beta = \frac{km_b m_c}{\sqrt{m_b + m_c}}, \quad \beta' = km_a \sqrt{\frac{m_c (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}}. \quad (2)$$

Координаты тела  $B$  в системе отсчета с началом в  $C$  суть  $q_1, q_2, q_3$ , а элементы описываемого  $B$  оскулирующего эллипса —  $\Lambda, \lambda, \xi, \eta, p, q$ . Соответствующие величины (координаты и элементы) для тела  $A$ , отнесенные к координатной системе, начало которой лежит в центре масс  $B$  и  $C$ , обозначим буквами со штрихами. Тогда согласно (6) и (6\*\*) § 5 гл. V

$$\left. \begin{aligned} r_{ga}^2 &= q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2, \\ r_{ca}^2 &= \frac{m_b^2}{(m_b + m_c)^2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \\ &\quad + \frac{2m_b}{m_b + m_c} (q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'), \\ r_{ab}^2 &= \frac{m_c^2}{(m_b + m_c)^2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 - \\ &\quad - \frac{2m_c}{m_b + m_c} (q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В соответствии с предыдущим параграфом, координаты можно разложить в ряды по степеням

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda}},$$

и т. д., и отсюда получить разложение такого же вида для возмущающей функции. Мы приведем это разложение с точностью до вторых степеней включительно относительно соответствующих величин.

Эти разложения могут быть найдены с точностью до любой степени эксцентриситета и наклонности методом, изложенным в предыдущем параграфе. Если ограничиться вторыми степенями рассматриваемых величин, то можно, например, поступить следующим образом.

Согласно (19) и (23) § 9 гл. IV имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_1}{a} &= A (\cos w - e) + B \sqrt{1 - e^2} \sin w, \\ \frac{q_2}{a} &= A_1 (\cos w - e) + B_1 \sqrt{1 - e^2} \sin w, \\ \frac{q_3}{a} &= A_2 (\cos w - e) + B_2 \sqrt{1 - e^2} \sin w. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Выражения для  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  и т. д. даются формулами (4) предыдущего параграфа. Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_1}{a} &= -Ae + \cos \pi \cos w - \sqrt{1 - e^2} \sin \pi \sin w + \\ &\quad + P_2 (\sin \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \cos \pi \sin w) + \\ &\quad + P_3 (-\cos \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \sin \pi \sin w), \\ \frac{q_2}{a} &= -A_1 e + \sin \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \cos \pi \sin w - \\ &\quad - P_1 (\sin \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \cos \pi \sin w) + \\ &\quad + P_2 (\cos \pi \cos w - \sqrt{1 - e^2} \sin \pi \sin w), \\ \frac{q_3}{a} &= -A_2 e + u (\sin \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \cos \pi \sin w) + \\ &\quad + v (-\cos \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \sin \pi \sin w). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Но

$$\begin{aligned} Ae &= r + P_2 s - P_3 r, \\ A_1 e &= s - P_1 s + P_2 r, \\ A_2 e &= us - vr, \end{aligned}$$

и поэтому, вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} D &= \cos \pi \cos w - \sqrt{1 - e^2} \sin \pi \sin w, \\ E &= \sin \pi \cos w + \sqrt{1 - e^2} \cos \pi \sin w, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_1}{a} &= -r - P_2 s + P_3 r + D + P_2 E - P_3 D, \\ \frac{q_2}{a} &= -s + P_1 s - P_2 r + E - P_1 E + P_2 D, \\ \frac{q_3}{a} &= vr - us + uE - vD, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

так что остается только разложить в ряды по степеням  $r$  и  $s$  величины  $D$  и  $E$ .

При помощи бесселевых функций или каким-либо иным путем получим теперь разложения до второй степени  $e$ :

$$\begin{aligned}\cos w &= \cos l + \frac{e}{2} (\cos 2l - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3l - \cos l), \\ \sin w &= \sin l + \frac{e}{2} \sin 2l + \frac{1}{8} e^2 (3 \sin 3l - \sin l).\end{aligned}$$

Подставляя сюда значение средней долготы  $\lambda$  из соотношения

$$\lambda = l + \pi,$$

окончательно получим

$$\left. \begin{aligned}D &= \cos \lambda + \frac{1}{2} r (\cos 2\lambda - 1) + \frac{1}{2} s \sin 2\lambda + \frac{3}{8} r^2 (\cos 3\lambda - \\ &- \cos \lambda) - \frac{1}{8} s^2 (3 \cos 3\lambda + 5 \cos \lambda) + \frac{1}{4} rs (3 \sin 3\lambda + \sin \lambda), \\ E &= \sin \lambda + \frac{1}{2} r \sin 2\lambda - \frac{1}{2} s (\cos 2\lambda + 1) + \frac{1}{8} r^2 (3 \sin 3\lambda - \\ &- 5 \sin \lambda) - \frac{3}{8} s^2 (\sin 3\lambda + \sin \lambda) - \frac{1}{4} rs (3 \cos 3\lambda - \cos \lambda).\end{aligned} \right\} (8)$$

Подставляя теперь вместо  $r, s, u, v$  элементы  $\xi, \eta, p, q$  из (16) § 1 и принимая во внимание выражения (3) § 2, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned}\frac{q_1}{a} &= \cos \lambda + \frac{\xi}{2\sqrt{\Lambda}} (\cos 2\lambda - 3) - \frac{\eta}{2\sqrt{\Lambda}} \sin 2\lambda + \frac{3\xi^2}{8\Lambda} (\cos 3\lambda - \\ &- \cos \lambda) - \frac{\eta^2}{8\Lambda} (3 \cos 3\lambda + 5 \cos \lambda) - \frac{\xi\eta}{4\Lambda} (3 \sin 3\lambda + \sin \lambda) - \\ &- \frac{pq}{2\Lambda} \sin \lambda - \frac{q^2}{2\Lambda} \cos \lambda, \\ \frac{q_2}{a} &= \sin \lambda + \frac{\xi}{2\sqrt{\Lambda}} \sin 2\lambda + \frac{\eta}{2\sqrt{\Lambda}} (\cos 2\lambda + 3) + \frac{\xi^2}{8\Lambda} (3 \sin 3\lambda - \\ &- 5 \sin \lambda) - \frac{3\eta^2}{8\Lambda} (\sin 3\lambda + \sin \lambda) + \frac{\xi\eta}{4\Lambda} (3 \cos 3\lambda - \cos \lambda) - \\ &- \frac{p^2}{2\Lambda} \sin \lambda - \frac{pq}{2\Lambda} \cos \lambda, \\ \frac{q_3}{a} &= \frac{p}{\sqrt{\Lambda}} \sin \lambda + \frac{q}{\sqrt{\Lambda}} \cos \lambda + \frac{\xi p}{2\Lambda} \sin 2\lambda - \frac{\xi q}{2\Lambda} (3 - \cos 2\lambda) + \\ &+ \frac{\eta p}{2\Lambda} (3 + \cos 2\lambda) - \frac{\eta q}{2\Lambda} \sin 2\lambda.\end{aligned} \right\} (9)$$

Далее из этого выражения получим:

$$r_{ic}^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = a^2 \left[ 1 - \frac{2\xi}{\sqrt{\Lambda}} \cos \lambda + \frac{2\eta}{\sqrt{\Lambda}} \sin \lambda + \right. \\ \left. + \frac{\xi^2}{2\Lambda} (3 - \cos 2\lambda) + \frac{\eta^2}{2\Lambda} (3 + \cos 2\lambda) + \frac{\xi\eta}{\Lambda} \sin 2\lambda \right] \quad (10)$$

и

$$r_{ga}^2 = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 = a'^2 \left[ 1 - \frac{2\xi'}{\sqrt{\Lambda'}} \cos \lambda' + \frac{2\eta'}{\sqrt{\Lambda'}} \sin \lambda' + \right. \\ \left. + \frac{\xi'^2}{2\Lambda'} (3 - \cos 2\lambda') + \frac{\eta'^2}{2\Lambda'} (3 + \cos 2\lambda') + \frac{\xi'\eta'}{\Lambda'} \sin 2\lambda' \right]. \quad (10^*)$$

Из (9) выводим следующее выражение для  $q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'$ :

$$\frac{q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'}{aa'} = \cos(\lambda - \lambda') + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} \left[ \frac{1}{2} \cos(2\lambda - \lambda') - \frac{3}{2} \cos \lambda' \right] + \\ + \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} \left[ -\frac{1}{2} \sin(2\lambda - \lambda') + \frac{3}{2} \sin \lambda' \right] + \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}} \left[ \frac{1}{2} \cos(2\lambda' - \lambda) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \cos \lambda \right] + \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}} \left[ -\frac{1}{2} \sin(2\lambda' - \lambda) + \frac{3}{2} \sin \lambda \right] + \\ + \frac{\xi^2}{\Lambda} \left[ \frac{3}{8} \cos(3\lambda - \lambda') - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') \right] + \\ + \frac{\eta^2}{\Lambda} \left[ -\frac{3}{8} \cos(3\lambda - \lambda') - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') \right] + \\ + \frac{\xi\eta}{\Lambda} \left[ -\frac{3}{4} \sin(3\lambda - \lambda') - \frac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda') \right] + \frac{\xi'^2}{\Lambda'} \left[ \frac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') \right] + \frac{\eta'^2}{\Lambda'} \left[ -\frac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') \right] + \frac{\xi'\eta'}{\Lambda'} \left[ -\frac{3}{4} \sin(3\lambda' - \lambda) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda') \right] + \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{9}{4} - \frac{3}{4} \cos 2\lambda - \frac{3}{4} \cos 2\lambda' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cos(2\lambda - 2\lambda') \right] + \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\lambda + \frac{3}{4} \cos 2\lambda' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cos(2\lambda - 2\lambda') \right] + \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{3}{4} \sin 2\lambda + \frac{3}{4} \sin 2\lambda' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sin(2\lambda - 2\lambda') \right] + \frac{\xi'\eta}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{3}{4} \sin 2\lambda' + \frac{3}{4} \sin 2\lambda + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sin(2\lambda' - 2\lambda) \right] + \frac{\rho^2}{\Lambda} \left[ \frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\ + \frac{q^2}{\Lambda} \left[ -\frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{pq}{2\Lambda} \sin(\lambda + \lambda') + \frac{p'^2}{\Lambda'} \left[ \frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{q'^2}{\Lambda'} \left[ -\frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] - \\
& - \frac{p'q'}{2\Lambda'} \sin(\lambda + \lambda') + \frac{pp'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ -\frac{1}{2} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{qq'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{1}{2} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \frac{pq'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{1}{2} \sin(\lambda + \lambda') + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sin(\lambda - \lambda') \right] + \frac{p'q}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{1}{2} \sin(\lambda' + \lambda) + \frac{1}{2} \sin(\lambda' - \lambda) \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Теперь выражения (10) и (11) необходимо подставить в (3) и (4). При этом оказывается, что разложение возмущающей функции становится весьма громоздким, если не проводить одновременно разложением по степеням  $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$ ,  $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$  и т. д. разложений по степеням масс  $m_a$  и  $m_b$ , которые предполагаются малыми. Это является недостатком, который возникает при использовании якобиевых координат и которого можно избежать при использовании обыкновенных относительных координат, а также канонических относительных координат. В то же время следует заметить, что, во-первых, не возникает никаких математических трудностей при использовании якобиевых координат, если не разлагать по степеням масс, так что здесь прежде всего речь идет об удобстве, и, во-вторых, что в исследованиях по теории возмущений, в которых разложение по степеням масс все равно выполняется, отмеченный недостаток этих координат не имеет никакого значения.

Пренебрегая в выражении для возмущающей функции членами более высокого порядка по сравнению с квадратом массы, можно положить

$$\left. \begin{aligned}
r_{ab}^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 - 2(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'), \\
r_{ca}^2 &= q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \frac{2m_b}{m_c} (q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'),
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{ca}} &= \frac{1}{r_{ga}} \left[ 1 + \frac{2m_b}{m_c r_{ga}^2} (q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3') \right]^{-1/2} = \\
&= \frac{1}{r_{ga}} - \frac{m_b}{m_c} \frac{1}{r_{ga}^3} (q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3').
\end{aligned}$$

Поэтому выражение для возмущающей функции с точностью до членов второго порядка (включительно) относительно масс примет вид:

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta^4}{2\mu' L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ga}^3} (q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3). \quad (13)$$

Основная трудность лежит в разложении величины  $r_{ab}^{-1}$ , для чего нам необходимо использовать выражение (12). Разделим теперь  $r_{ab}^2$  на две части,  $\Delta_0^2$  и  $f$ , из которых  $\Delta_0^2$  содержит члены нулевого порядка относительно  $\xi$ ,  $\eta$  и т. д., а  $f$  — все остальные. Тогда имеем

$$\Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\lambda - \lambda') \quad (14)$$

и

$$r_{ab}^2 = \Delta_0^2 + f, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{r_{ab}} = \frac{1}{\Delta_0} \left( 1 - \frac{f}{2\Delta_0^2} + \frac{3f^2}{8\Delta_0^4} - \dots \right). \quad (16)$$

Условия сходимости этого разложения мы исследуем в одной из следующих глав. Теперь получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{f}{2\Delta_0^3} &= \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}\Delta_0^3} \left[ a^2 \cos \lambda - \frac{3}{2} aa' \cos \lambda' + \frac{1}{2} aa' \cos(2\lambda - \lambda') \right] + \\ &+ \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}\Delta_0^3} \left[ -a^2 \sin \lambda + \frac{3}{2} aa' \sin \lambda' - \frac{1}{2} aa' \sin(2\lambda - \lambda') \right] + \\ &+ \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ a'^2 \cos \lambda - \frac{3}{2} aa' \cos \lambda + \frac{1}{2} aa' \cos(2\lambda' - \lambda) \right] + \\ &+ \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ -a'^2 \sin \lambda' + \frac{3}{2} aa' \sin \lambda - \frac{1}{2} aa' \sin(2\lambda' - \lambda) \right] + \\ &+ \frac{\xi^2}{\Lambda\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{8} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} a^2 \cos 2\lambda + \frac{3}{8} aa' \cos(3\lambda - \lambda') \right] + \\ &+ \frac{\eta^2}{\Lambda\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{8} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') - \right. \\ &+ \left. -\frac{1}{4} a^2 \cos 2\lambda - \frac{3}{8} aa' \cos(3\lambda - \lambda') \right] + \\ &+ \frac{\xi\eta}{\Lambda\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{4} aa' \sin(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\lambda - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4} aa' \sin(3\lambda - \lambda') \Big] + \frac{\xi'^2}{\Lambda'\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a'^2 + \frac{1}{8} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \right. \\
& -\frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4} a'^2 \cos 2\lambda' + \frac{3}{8} aa' \cos(3\lambda' - \lambda) \Big] + \\
& + \frac{\eta'^2}{\Lambda'\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a'^2 - \frac{1}{8} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} a'^2 \cos 2\lambda' - \frac{3}{8} aa' \cos(3\lambda' - \lambda) \right] + \\
& + \frac{\xi'\eta'}{\Lambda'\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{4} aa' \sin(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} a'^2 \sin 2\lambda' - \frac{3}{4} aa' \sin(3\lambda' - \lambda) \right] + \\
& \quad + \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ \frac{9}{4} aa' - \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda - \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda' + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} aa' \cos(2\lambda - 2\lambda') \right] + \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ \frac{9}{4} aa' + \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda' + \frac{1}{4} aa' \cos(2\lambda - 2\lambda') \right] + \\
& + \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda + \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda' + \frac{1}{4} aa' \sin(2\lambda - 2\lambda') \right] + \\
& + \frac{\xi\eta}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda' + \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda + \frac{1}{4} aa' \sin(2\lambda' - 2\lambda) \right] + \\
& \quad + \frac{p^2}{\Lambda\Delta_0^3} \left[ \frac{1}{4} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{q^2}{\Lambda\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{4} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{pq}{\Lambda\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{2} aa' \sin(\lambda + \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{p'^2}{\Lambda'\Delta_0^3} \left[ \frac{1}{4} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{q'^2}{\Lambda'\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{4} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{p'q'}{\Lambda'\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{2} aa' \sin(\lambda + \lambda') \right] + \\
& + \frac{pp'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{2} aa' \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{qq'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\Delta_0^3} \left[ \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{pq'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'\Delta_0^3}} \left[ \frac{1}{2} aa' \sin(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} aa' \sin(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{p'q}{\sqrt{\Lambda\Lambda'\Delta_0^3}} \left[ \frac{1}{2} aa' \sin(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} aa' \sin(\lambda' - \lambda) \right]. \quad (17)
\end{aligned}$$

Разложение  $r_{ab}^{-1}$  характеризуется тем, что коэффициенты в разложении этой величины по степеням  $\xi$ ,  $\eta$  и т. д. будут целыми рациональными функциями  $1 : \Delta_0$ . В разложении других членов возмущающей функции эта величина  $\Delta_0$  не встречается. В связи с этим целесообразно возмущающую функцию разбить на две части: так называемую главную часть

$$F_1 = \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} \quad (18^*)$$

и дополнительную

$$F_2 = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ga}^3} (q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3), \quad (18^{**})$$

так что

$$F = F_1 + F_2. \quad (18)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
F_1 = k^2 m_a m_b & \left\{ \frac{1}{\Delta_0} + \frac{\xi}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda}} \times \right. \\
& \times \left[ a^2 \cos \lambda - \frac{3}{2} aa' \cos \lambda' + \frac{1}{2} aa' \cos(2\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{\eta}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda}} \left[ -a^2 \sin \lambda + \frac{3}{2} aa' \sin \lambda' - \frac{1}{2} aa' \sin(2\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{\xi'}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda'}} \left[ a'^2 \cos \lambda' - \frac{3}{2} aa' \cos \lambda + \frac{1}{2} aa' \cos(2\lambda' - \lambda) \right] + \\
& + \frac{\eta'}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda'}} \left[ -a'^2 \sin \lambda' + \frac{3}{2} aa' \sin \lambda - \frac{1}{2} aa' \sin(2\lambda' - \lambda) \right] + \\
& + \frac{\xi^2}{\Lambda} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{8} aa' \cos(\lambda + \lambda') - \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} aa' \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4} a^2 \cos 2\lambda + \frac{3}{8} aa' \cos(3\lambda - \lambda') \left. \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ \frac{3}{4} a^2 + \frac{15}{8} a^2 a'^2 - \frac{9}{4} a^3 a' \cos(\lambda + \lambda') - \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} a^3 a' \cos(\lambda - \lambda') + \frac{3}{4} a^4 \cos 2\lambda - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos 2\lambda + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{27}{16} a^2 a'^2 \cos 2\lambda' - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos (2\lambda - 2\lambda') + \\
& + \frac{3}{4} a^3 a' \cos (3\lambda - \lambda') + \frac{3}{16} a^2 a'^2 \cos (4\lambda - 2\lambda') \Big] + \\
& + \frac{\eta^2}{\Lambda} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{8} a a' \cos (\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} a a' \cos (\lambda - \lambda') - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{4} a^2 \cos 2\lambda - \frac{3}{8} a a' \cos (3\lambda - \lambda') \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ \frac{3}{4} a^4 + \frac{15}{8} a^2 a'^2 + \frac{9}{4} a^3 a' \cos (\lambda + \lambda') - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3}{2} a^3 a' \cos (\lambda - \lambda') + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos 2\lambda - \frac{3}{4} a^4 \cos 2\lambda - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{27}{16} a^2 a'^2 \cos 2\lambda' - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos (2\lambda - 2\lambda') - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3}{4} a^3 a' \cos (3\lambda - \lambda') - \frac{3}{16} a^2 a'^2 \cos (4\lambda - 2\lambda') \right] \right\} + \\
& + \frac{\xi \eta}{\Lambda} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{4} a a' \sin (\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\lambda - \frac{3}{4} a a' \sin (3\lambda - \lambda') \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ \frac{9}{2} a^3 a' \sin (\lambda + \lambda') - \frac{3}{2} a^4 \sin 2\lambda + \frac{9}{4} a^3 a'^2 \sin 2\lambda - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{27}{8} a^2 a'^2 \sin 2\lambda' - \frac{3}{2} a^3 a' \sin (3\lambda - \lambda') - \frac{3}{8} a^2 a'^2 \sin (4\lambda - 2\lambda') \right] \right\} + \\
& + \frac{\xi'^2}{\Lambda'} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a'^2 + \frac{1}{8} a a' \cos (\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} a a' \cos (\lambda - \lambda') + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{4} a'^2 \cos 2\lambda' + \frac{3}{8} a a' \cos (3\lambda' - \lambda) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ \frac{3}{4} a'^4 + \frac{15}{8} a^2 a'^2 - \frac{9}{4} a a'^3 \cos (\lambda + \lambda') - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3}{2} a a'^3 \cos (\lambda - \lambda') + \frac{3}{4} a'^4 \cos 2\lambda' - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos 2\lambda' + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{27}{16} a^2 a'^2 \cos 2\lambda - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos (2\lambda' - 2\lambda) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{4} a a'^3 \cos (3\lambda' - \lambda) + \frac{3}{16} a^2 a'^2 \cos (4\lambda' - 2\lambda) \right] \right\} + \\
& + \frac{\eta'^2}{\Lambda'} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{3}{4} a'^2 - \frac{1}{8} a a' \cos (\lambda + \lambda') - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} a a' \cos (\lambda - \lambda') - \frac{1}{4} a'^2 \cos 2\lambda' - \frac{3}{8} a a' \cos (3\lambda' - \lambda) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ \frac{3}{4} a'^4 + \frac{15}{8} a^2 a'^2 + \frac{9}{4} a a'^3 \cos (\lambda + \lambda') - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{2} aa'^3 \cos(\lambda - \lambda') - \frac{3}{4} a'^4 \cos 2\lambda' + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos 2\lambda' - \\
& \quad - \frac{27}{16} a^2 a'^2 \cos 2\lambda - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos(2\lambda' - 2\lambda) - \\
& \quad - \frac{3}{4} aa'^3 \cos(3\lambda' - \lambda) - \frac{3}{16} a^2 a'^2 \cos(4\lambda' - 2\lambda) \Big] + \\
& \quad + \frac{\xi\eta'}{\Lambda'} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{1}{4} aa' \sin(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} a'^3 \sin 2\lambda' - \right. \right. \\
& - \frac{3}{4} aa' \sin(3\lambda' - \lambda) \Big] + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ \frac{9}{2} aa'^3 \sin(\lambda + \lambda') - \frac{3}{2} a'^4 \sin 2\lambda' + \right. \\
& \quad + \frac{9}{4} a^2 a'^2 \sin 2\lambda' - \frac{27}{8} a^2 a'^2 \sin 2\lambda - \frac{3}{2} aa'^3 \sin(3\lambda' - \lambda) - \\
& \quad \left. - \frac{3}{8} a^2 a'^2 \sin(4\lambda' - 2\lambda) \right] \Big\} + \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ \frac{9}{4} aa' - \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda - \right. \right. \\
& - \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda' + \frac{1}{4} aa' \cos(2\lambda - 2\lambda') \Big] + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ -\frac{9}{4} aa'^3 - \frac{9}{4} a^3 a' + \right. \\
& \quad + \frac{21}{4} a^2 a'^2 \cos(\lambda + \lambda') + \frac{21}{8} a^2 a'^2 \cos(\lambda - \lambda') - \frac{9}{4} a^3 a' \cos 2\lambda + \\
& \quad + \frac{3}{4} aa'^3 \cos 2\lambda - \frac{9}{4} aa'^3 \cos 2\lambda' + \frac{3}{4} a^3 a' \cos 2\lambda' + \\
& \quad + \frac{3}{4} aa'^3 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \frac{3}{4} a^3 a' \cos(2\lambda - 2\lambda') - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos(3\lambda - \\
& \quad - \lambda') - \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos(3\lambda' - \lambda) + \frac{3}{8} a^2 a'^2 \cos(3\lambda - 3\lambda') \Big] \Big\} + \\
& \quad + \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ \frac{9}{4} aa' + \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda + \frac{3}{4} aa' \cos 2\lambda' + \right. \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} aa' \cos(2\lambda - 2\lambda') \right] + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ -\frac{9}{4} a^3 a' - \frac{9}{4} aa'^3 - \right. \\
& - \frac{21}{4} a^2 a'^2 \cos(\lambda + \lambda') + \frac{21}{8} a^2 a'^2 \cos(\lambda - \lambda') + \frac{9}{4} a^3 a' \cos 2\lambda - \\
& \quad - \frac{3}{4} aa'^3 \cos 2\lambda + \frac{9}{4} aa'^3 \cos 2\lambda' - \frac{3}{4} a^3 a' \cos 2\lambda' + \\
& \quad + \frac{3}{4} a^3 a' \cos(2\lambda - 2\lambda') + \frac{3}{4} aa'^3 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \\
& \quad + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos(3\lambda - \lambda') + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \cos(3\lambda' - \lambda) + \\
& \quad \left. + \frac{3}{8} a^2 a'^2 \cos(3\lambda - 3\lambda') \right] \Big\} + \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda + \right. \right. \\
& + \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda' + \frac{1}{4} aa' \sin(2\lambda - 2\lambda') \Big] + \frac{1}{\Delta_0^5} \left[ -\frac{21}{4} a^2 a'^2 \sin(\lambda + \lambda') - \right. \\
& \quad \left. - \frac{33}{8} a^2 a'^2 \sin(\lambda - \lambda') + \frac{9}{4} a^3 a' \sin 2\lambda - \frac{3}{4} aa'^3 \sin 2\lambda + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{4} aa'^3 \sin 2\lambda' - \frac{3}{4} a^3 a' \sin 2\lambda' + \frac{3}{4} a^3 a' \sin (2\lambda - 2\lambda') + \\
& \quad + \frac{3}{4} aa'^3 \sin (2\lambda - 2\lambda') + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \sin (3\lambda - \lambda') + \\
& \quad + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \sin (3\lambda' - \lambda) + \frac{3}{8} a^2 a'^2 \sin (3\lambda - 3\lambda') \Big] + \\
& + \frac{\xi \eta}{\sqrt{\Lambda \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda + \frac{3}{4} aa' \sin 2\lambda' + \frac{1}{4} aa' \sin (2\lambda' - 2\lambda) \right] + \right. \\
& \quad + \frac{1}{\Delta_0^3} \left[ -\frac{21}{4} a^2 a'^2 \sin (\lambda + \lambda') - \frac{33}{8} a^2 a'^2 \sin (\lambda' - \lambda) + \right. \\
& \quad + \frac{9}{4} aa'^3 \sin 2\lambda' - \frac{3}{4} a^3 a' \sin 2\lambda' + \frac{9}{4} a^3 a' \sin 2\lambda - \frac{3}{4} aa'^3 \sin 2\lambda + \\
& \quad + \frac{3}{4} aa'^3 \sin (2\lambda' - 2\lambda) + \frac{3}{4} a^3 a' \sin (2\lambda' - 2\lambda) + \\
& \quad + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \sin (3\lambda' - \lambda) + \frac{9}{8} a^2 a'^2 \sin (3\lambda - \lambda') + \frac{3}{8} a^2 a'^2 \times \\
& \quad \times \sin (3\lambda' - 3\lambda) \Big] + \frac{p^2}{\Delta_0^3 \Lambda} \left\{ \frac{1}{4} aa' \cos (\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos (\lambda - \lambda') \right\} + \\
& \quad + \frac{q^2}{\Delta_0^3 \Lambda} \left\{ -\frac{1}{4} aa' \cos (\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos (\lambda - \lambda') \right\} + \\
& \quad + \frac{pq}{\Delta_0^3 \Lambda} \left\{ -\frac{1}{2} aa' \sin (\lambda + \lambda') \right\} + \\
& \quad + \frac{p'^2}{\Delta_0^3 \Lambda'} \left\{ \frac{1}{4} aa' \cos (\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos (\lambda - \lambda') \right\} + \\
& \quad + \frac{q'^2}{\Delta_0^3 \Lambda'} \left\{ -\frac{1}{4} aa' \cos (\lambda + \lambda') - \frac{1}{4} aa' \cos (\lambda - \lambda') \right\} + \\
& \quad + \frac{p'q'}{\Delta_0^3 \Lambda'} \left\{ -\frac{1}{2} aa' \sin (\lambda + \lambda') \right\} + \frac{pp'}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda \Lambda'}} \left\{ -\frac{1}{2} aa' \cos (\lambda + \lambda') + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} aa' \cos (\lambda - \lambda') + \frac{qq'}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{2} aa' \cos (\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} aa' \cos (\lambda - \lambda') \right\} + \\
& \quad + \frac{pq'}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{2} aa' \sin (\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} aa' \sin (\lambda - \lambda') \right\} + \\
& \quad \left. + \frac{p'q}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{2} aa' \sin (\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} aa' \sin (\lambda - \lambda') \right\} \right\}. \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \frac{k^2 m_b m_c}{2a} + \frac{k^2 m_a m_c}{2a'} + m_a m_b \frac{aa'}{a^3} \left\{ -\cos (\lambda - \lambda') + \right. \\
& + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} [-2 \cos (2\lambda - \lambda')] + \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} [2 \sin (2\lambda - \lambda')] + \\
& \left. + \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}} \left[ \frac{3}{2} \cos \lambda - \frac{1}{2} \cos (2\lambda' - \lambda) \right] + \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}} \left[ -\frac{3}{2} \sin \lambda + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sin(2\lambda' - \lambda) \Big] + \frac{\xi^2}{\Lambda} \left[ -\frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \right. \\
& \quad \left. - \frac{27}{8} \cos(3\lambda - \lambda') \right] + \frac{\eta^2}{\Lambda} \left[ \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \right. \\
& \quad \left. + \frac{27}{8} \cos(3\lambda - \lambda') \right] + \frac{\xi\eta}{\Lambda} \left[ \frac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda') + \frac{27}{4} \sin(3\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{\xi'^2}{\Lambda'} \left[ -\frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \frac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda) \right] + \\
& + \frac{\eta'^2}{\Lambda'} \left[ \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda) \right] + \\
& \quad + \frac{\xi'\eta'}{\Lambda'} \left[ \frac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda') + \frac{3}{4} \sin(3\lambda' - \lambda) \right] + \\
& + \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} [3 \cos 2\lambda - \cos(2\lambda - 2\lambda')] + \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} [-3 \cos 2\lambda - \\
& \quad - \cos(2\lambda - 2\lambda')] + \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} [-3 \sin 2\lambda - \sin(2\lambda - 2\lambda')] + \\
& + \frac{\xi'\eta}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} [-3 \sin 2\lambda - \sin(2\lambda' - 2\lambda)] + \frac{p^2}{\Lambda} \left[ -\frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \frac{q^2}{\Lambda} \left[ \frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{pq}{\Lambda} \left[ \frac{1}{2} \sin(\lambda + \lambda') \right] + \frac{p'^2}{\Lambda'} \left[ -\frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{q'^2}{\Lambda'} \left[ \frac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') + \frac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \frac{p'q'}{\Lambda'} \left[ \frac{1}{2} \sin(\lambda + \lambda') \right] + \\
& \quad + \frac{pp'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ \frac{1}{2} \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{qq'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ -\frac{1}{2} \cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{pq'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ -\frac{1}{2} \sin(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} \sin(\lambda - \lambda') \right] + \\
& + \frac{p'q}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left[ -\frac{1}{2} \sin(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2} \sin(\lambda - \lambda') \right] \Big\}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Приведенные разложения до членов второй степени относительно  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\xi'$  и т. д. были выведены Г. Нореном и Дж. А. Валленбергом [34]. Вместо канонических элементов  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  можно подставить в коэффициенты большие полуоси  $a$  и  $a'$  оскулирующих эллипсов, для которых имеем

$$a = \frac{\Lambda^2}{\beta^2}, \quad a' = \frac{\Lambda'^2}{\beta'^2}. \quad (21)$$

## § 4. Основы теории возмущений

Дифференциальные уравнения для канонических элементов имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p}, \\ \frac{d\Lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'}, & \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda'}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и т. д.; возмущающую функцию  $F$ , в соответствии с рассуждениями предыдущего параграфа, можно записать в следующей форме:

$$F = \sum A_{ijkl}^{i'j'k'l'} \left( \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} \right)^i \left( \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} \right)^j \left( \frac{p}{\sqrt{\Lambda}} \right)^k \left( \frac{q}{\sqrt{\Lambda}} \right)^l \times \\ \times \left( \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}} \right)^{i'} \left( \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}} \right)^{j'} \left( \frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}} \right)^{k'} \left( \frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}} \right)^{l'}, \quad (1^*)$$

где целые числа  $i, j, k, l, i', j', k', l'$  принимают значения  $0, 1, 2, \dots$ . Коэффициенты  $A$  зависят от  $\Lambda, \lambda$  и  $\Lambda', \lambda'$ .

Точное интегрирование этих дифференциальных уравнений до сих пор выполнить не удалось, несмотря на продолжающиеся усилия крупнейших математиков последних 150 лет. Неизвестно, будут ли оставаться колебания больших полуосей оскулирующих эллипсов в любой момент времени в конечных границах, и неизвестно также, насколько далеко могут отклониться со временем элементы  $\xi, \eta, p, q, \xi'$  и т. д. от тех малых значений, которые они имеют в нашей планетной системе в настоящее время. Так называемое доказательство устойчивости Лапласа, к которому мы ниже возвратимся, не содержит строгих рассуждений о том, что изменения  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  должны оставаться всегда малыми, и утверждает только — и это представляет в высшей степени важный вклад в проблему устойчивости, — что если изменения  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  малы, то это должно иметь место также и для  $\xi, \eta$  и т. д.

Хотя проблема трех тел до сих пор практически в общем виде не решена, можно попытаться исследовать орбиты трех или большего числа тел, притягивающихся по закону Ньютона на ограниченных интервалах времени. Как массы, так и начальные условия могут быть таковы, что можно вычислить сколь угодно точно значения элементов, например, при помощи так называемых механических квадратур (численного интегрирования). Если, в част-

ности, одна из масс весьма велика по сравнению с другими, как это имеет место в планетной системе, то эти вычисления можно выполнить аналитическим способом, более того, сравнительно легко можно вывести общие выражения для элементов (или координат), которые с достаточной точностью представляют истинные орбиты тел на сотни и даже тысячи лет. Методы, которые с середины XVIII в. применяются для этой цели, составляют теорию возмущений.

Если рассмотреть возмущающую функцию в форме (13) § 3, которую можно записать следующим образом:

$$F = \frac{k^2 m_b m_c}{2a} + \frac{k^2 m_a m_c}{2a'} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ga}^3} (q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3), \quad (2)$$

и предположить, что массы  $m_a$  и  $m_b$  весьма малы по сравнению с массой  $m_c$ , то найдем, что в этом выражении два последних члена имеют сомножителями произведения малых масс  $m_a$  и  $m_b$ , что кратко выражают так: это члены второго порядка (относительно масс). Два первых члена в  $F$ , которые мы обозначим через  $F_0$ , так что

$$F_0 = \frac{k^2 m_b m_c}{2a} + \frac{k^2 m_a m_c}{2a'}, \quad (3)$$

очевидно, имеют первый порядок. В частные производные от  $F$ , входящие в (1),  $F_0$  входит только через производные по  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  (имеем  $\Lambda = \beta \sqrt{a}$ ,  $\Lambda' = \beta' \sqrt{a'}$ ), которые определяют скорости изменения средних долгот  $\lambda$  и  $\lambda'$ .

Если сначала не принимать во внимание элементы  $\Lambda$  и  $\lambda$   $\Lambda'$  и  $\lambda'$  и ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\beta}(\xi), & \eta &= \sqrt{\beta}(\eta), \\ p &= \sqrt{\beta}(p), & q &= \sqrt{\beta}(q), \\ \xi' &= \sqrt{\beta'}(\xi'), & q' &= \sqrt{\beta'}(q'), \\ & \dots & & \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то вместо (1) получим дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \beta \frac{d(\xi)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial(\eta)}, & \beta \frac{d(\eta)}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial(\xi)}, \\ \beta \frac{d(p)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial(q)}, & \beta \frac{d(q)}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial(p)}, \\ \beta' \frac{d(\xi')}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial(\eta')}, & \beta' \frac{d(\eta')}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial(\xi')}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если, кроме того, положить

$$\Lambda = \beta(\Lambda), \quad \Lambda' = \beta'(\Lambda'), \quad (4^*)$$

то  $F$ , в соответствии с (1\*), примет следующий вид:

$$F = \sum A \left( \frac{(\xi)}{\sqrt{(\Lambda)}} \right)^i \left( \frac{(\eta)}{\sqrt{(\Lambda)}} \right)^j \dots,$$

где в (1\*) вместо  $(\Lambda)$ ,  $(\xi)$ ,  $(\eta)$  и т. д. везде записывается  $\Lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и т. д.

Отсюда следует, что все частные производные, которые содержатся в (5), умножаются на произведения малых масс. Но согласно § 3 (2) приближенно имеем

$$\beta = km_b \sqrt{m_c}, \quad \beta' = km_a \sqrt{m_c}, \quad (6)$$

так что выражения для производных от  $(\xi)$ ,  $(\eta)$ ,  $(p)$  и  $(q)$  содержат множителем возмущающую массу  $m_a$ , а производные от элементов  $(\xi')$  и т. д. — массу  $m_b$ . Так как эти массы предполагались весьма малыми, то отсюда следует, что производные от элементов  $(\xi)$ ,  $(\eta)$  и т. д. будут малы.

На этом свойстве основывается теория возмущений. Если производные малы, то по крайней мере на коротких промежутках времени также малы и изменения элементов, и в первом приближении можно считать  $(\xi)$ ,  $(\eta)$  и т. д. в правых частях (5) постоянными. Посредством интегрирования полученных таким образом уравнений, что не представляет никаких трудностей, находим возмущения первого порядка. Этот приближенный метод приводит к разложениям по степеням возмущающих масс. Правда, новые исследования показали, что эти разложения в ряды не являются абсолютно сходящимися. Тем не менее как теория, так и опыт свидетельствуют, что ряды сходятся на конечных промежутках времени и пригодны для числовых расчетов.

Относительно дифференциальных уравнений для  $(\Lambda)$  и  $(\Lambda')$  остаются неизменными указанные выше предположения; тогда, учитывая только возмущения первого порядка, можно предположить, что

$$\left. \begin{aligned} (\Lambda) &= (\Lambda_0) + \delta\Lambda, \\ (\Lambda') &= (\Lambda'_0) + \delta\Lambda', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $(\Lambda_0)$  и  $(\Lambda'_0)$  обозначают две постоянные величины, а  $\delta\Lambda$ ,  $\delta\Lambda'$  являются малыми.

Если, наконец, рассматривать дифференциальные уравнения для средних долгот

$$\left. \begin{aligned} \beta \frac{d\lambda}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial (\Lambda)}, \\ \beta' \frac{d\lambda'}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial (\Lambda')}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

то в  $F$  нужно рассматривать только те члены, которые зависят от  $F_0$ . Согласно (3) имеем

$$F_0 = \frac{k^2 m_b m_c}{2(\Lambda)^2} + \frac{k^2 m_a m_c}{2(\Lambda')^2}, \quad (8^*)$$

и, стало быть,

$$\left. \begin{aligned} \beta \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{k^2 m_b m_c}{(\Lambda)^3}, \\ \beta' \frac{d\lambda'}{dt} &= \frac{k^2 m_a m_c}{(\Lambda')^3}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

или, если принять во внимание соотношения (6),

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda)^3}, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{k \sqrt{m_c}}{\Lambda'^3}. \quad (10)$$

Подставляя сюда значение (7) и разлагая в ряды по степеням малых величин  $\delta\Lambda$  и  $\delta\Lambda'$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda_0)^3} - 3 \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda_0)^3} \frac{\delta\Lambda}{\Lambda_0}, \\ \frac{d\lambda'}{dt} &= \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda'_0)^3} - 3 \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda'_0)^3} \frac{\delta\Lambda'}{\Lambda'_0}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если положить

$$n_0 = \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda_0)^3}, \quad n'_0 = \frac{k \sqrt{m_c}}{(\Lambda'_0)^3}, \quad (12)$$

где  $n_0$  и  $n'_0$  обозначают постоянные величины, то из (11) после интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= n_0(t + \gamma_0) - 3n_0 \int \frac{\delta\Lambda}{\Lambda_0} dt, \\ \lambda' &= n'_0(t + \gamma'_0) - 3n'_0 \int \frac{\delta\Lambda'}{\Lambda'_0} dt, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $\gamma_0$  и  $\gamma'_0$  — постоянные интегрирования, и отсюда следует, что разности  $\lambda - n_0(t + \gamma_0)$  и  $\lambda' - n'_0(t + \gamma'_0)$  содержат множителями первые степени масс и поэтому, согласно терминологии теории возмущений, являются малыми первого порядка. Обозначим эти разности через  $\delta\lambda$  и  $\delta\lambda'$ .

Методы интегрирования в теории возмущений следующие.

Пусть  $E$  обозначает какой-либо элемент, причем вместо  $\lambda$  и  $\lambda'$  будем использовать в качестве элементов  $\delta\lambda$  и  $\delta\lambda'$ ; тогда

для него имеем дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{dE}{dt} = f(\Lambda, \lambda, \xi, \eta, p, q, \Lambda', \lambda', \xi', \eta', p', q').$$

Относительно функции  $f$  из § 8 гл. IV известно, что она является периодической относительно  $\lambda$  и  $\lambda'$ , таким образом, мы можем записать

$$\frac{dE}{dt} = \sum B^{(i, i')} \cos(i\lambda + i'\lambda' + D^{(i, i')}). \quad (14)$$

Для каждого элемента существует уравнение этого вида. Правая часть (14) всегда умножается на малую массу и, следовательно, мала. Чтобы получить возмущения первого порядка, положим теперь в правой части (14)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 = n_0(t + \gamma_0), \\ \lambda' &= \lambda'_0 = n'_0(t + \gamma'_0), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

а вместо остальных элементов  $\Lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и т. д. подставим постоянные значения  $\Lambda_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  и т. д. Тогда уравнение (14) преобразуется к виду

$$\frac{dE}{dt} = \sum B_0^{(i, i')} \cos(i\lambda_0 + i'\lambda'_0 + D_0^{(i, i')}), \quad (16)$$

где  $B_0^{(i, i')}$  и  $D_0^{(i, i')}$  не зависят от времени. Тогда уравнение (16) можно непосредственно проинтегрировать. Оставляя без внимания вопрос о сходимости, который подробно будет рассмотрен в одной из следующих глав, получим

$$E = \sum \frac{B^{(i, i')}}{in_0 + i'n'_0} \sin(i\lambda_0 + i'\lambda'_0 + D_0^{(i, i')}) + Ct + E_0, \quad (17)$$

где  $C$  обозначает тот член в (16), для которого  $i = i' = 0$ , а  $E_0$  обозначает постоянную интегрирования.

Значения элементов  $\Lambda_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\xi_0$  и т. д. обычно выбираются так, чтобы они для определенного момента времени, так называемой эпохи, образовывали систему оскулирующих элементов. Постоянная интегрирования  $E_0$  в этом случае будет определена так, что следующее из (17) значение  $E$  для эпохи равно принятому значению оскулирующего элемента.

Выражение (17) для элемента состоит из двух качественно различных частей:

1) члена  $Ct$ , который называется вековым возмущением элемента,

2) членов  $\sum \frac{B}{in_0 + i'n'_0} \sin(i\lambda + i'\lambda'_0 + D)$ , которые будут называться периодическими возмущениями.

Вековые возмущения, если они содержат возмущения первого порядка, неограниченно возрастают с ростом времени. Следует заметить, что  $C$  содержит множителем возмущающую массу  $\mu$ , следовательно, является очень малым числом, вследствие этого возрастание элементов происходит крайне медленно. Если принять во внимание члены более высокого порядка, то доказывается, хотя математическое рассмотрение проблемы и не свободно от возражений, что вековые возмущения фактически не возрастают неограниченно, а соответствуют периодическим колебаниям сравнительно большой амплитуды и очень большого периода. Мы подробно рассмотрим эти вопросы в следующей главе.

Периодические возмущения первого порядка задаются рядом

$$\sum' \frac{B}{in_0 + i'n'_0} \sin(i\lambda_0 + i'\lambda'_0 + D), \quad (18)$$

где надлежит исключить значения  $i = i' = 0$ .

Должны быть отмечены следующие свойства этих рядов.

1. Если сумма

$$\sum' \left| \frac{B^{(i, i')}}{in_0 + i'n'_0} \right|$$

конечна, то периодические возмущения не могут превзойти конечной верхней границы.

2. Каждый член в (18) является периодическим и через определенный промежуток времени снова принимает свои прежние значения, если  $in_0 + i'n'_0 \neq 0$ .

3.  $in_0 + i'n'_0 = 0$ , т. е. оскулирующие средние движения обеих планет соизмеримы. Такой случай для двух планет неизвестен, однако он встречается в системе спутников Юпитера, где средние движения трех спутников оказываются соизмеримыми и, как показал Лаплас, остаются соизмеримыми всегда. Если встречается такой случай, то уравнение (14) необходимо решать иным образом, отличным от приведенного.

4. При произвольных несоизмеримых значениях  $n_0$  и  $n'_0$  числа  $i$  и  $i'$  можно выбрать всегда так, что  $in_0 + i'n'_0$  будет произвольно малым. Члены, соответствующие этим значениям  $i$  и  $i'$ , могут при известных условиях достигать весьма большой величины. Эти, так называемые малые делители, играют в теории возмущений важную роль и вызывают очень большие трудности, как с практической, так и теоретической точек зрения, при исследовании движения планет.

Значение этих членов впервые было выявлено Лапласом, который теоретически объяснил обнаруживаемые из наблюдений неравенства в движении Юпитера и Сатурна.

**Пример 1.** Среднее суточное движение Юпитера составляет  $n_0 = 299''{,}1$ , а для Сатурна  $n'_0 = 120''{,}5$ . Отсюда находим, что

$$2n_0 - 5n'_0 = -4''{,}3;$$

тогда этот малый делитель в 70 раз меньше среднего движения Юпитера и в 28 раз меньше среднего движения Сатурна. Благодаря этому соответствующий член в (18) увеличивается для Юпитера в 70 раз, а для Сатурна — в 28 раз. Согласно (13) для определения средней долготы необходима двукратная интеграция, и при втором интегрировании малый делитель еще раз появляется в знаменателе. Возникающий таким путем член обычно называется большим неравенством в движении Юпитера и Сатурна. Его период равен 860 годам.

**Пример 2.** Малая планета (17) Фетида имеет среднее движение  $n_0 = 912''{,}8$ . Рассматривая возмущения этой планеты Юпитером, находим, что

$$n_0 - 3n'_0 = 15''{,}5,$$

так что малый делитель в 59 раз меньше  $n_0$ . Поэтому соответствующий член в (18) возрастает в 59 раз, а член в средней долготе в результате двойного интегрирования увеличивается в 3480 раз. При этом в средней долготе возникает возмущение, которое достигает необычно большого значения —  $4^{\circ}35'$ . Период составляет 240 лет.

### § 5. Коэффициенты Лапласа

Возмущающая функция является периодической функцией от  $\lambda$  и  $\lambda'$  и может быть разложена в ряд Фурье по косинусам дуг, кратных этим угловым величинам. Это разложение можно легко вывести из разложения отрицательных степеней  $\Delta_0$  в ряд по кратным  $\lambda - \lambda'$ . Последнее из указанных разложений играет важную роль в теории возмущений, и мы рассмотрим его более подробно.

Если в возмущающей функции рассматривать только члены до второй степени относительно эксцентриситетов и наклонностей включительно, то необходимо знать разложения  $\Delta_0^{-1}$ ,  $\Delta_0^{-3}$  и  $\Delta_0^{-5}$ . Мы положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0} &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\ \frac{aa'}{\Delta_0^3} &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\ \frac{a^2a'^2}{\Delta_0^5} &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i \cos i(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Коэффициенты Лапласа  $L_i^{(s)}$  определяются следующим уравнением:

$$\left(\frac{a'}{\Delta_0}\right)^{2s} = \frac{1}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda')]^s} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} L_i^{(s)} \cos i(\lambda - \lambda'), \quad (2)$$

где  $L_{-i}^{(s)} = L_i^{(s)}$  и

$$\alpha = \frac{a}{a'}. \quad (3)$$

Отсюда получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} a' A_i &= L_i^{(1/2)}, \\ a' B_i &= \alpha L_i^{(3/2)}, \\ a' C_i &= \alpha^2 L_i^{(5/2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Аналитическое выражение для  $L_i^{(s)}$  можно вывести следующим образом. Положим

$$z = e^{\sqrt{-1}(\lambda - \lambda')};$$

тогда

$$2 \cos(\lambda - \lambda') = z + z^{-1},$$

$$2 \cos i(\lambda - \lambda') = z^i + z^{-i},$$

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda') = (1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1})$$

и, следовательно,

$$(1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha z^{-1})^{-s} = \frac{1}{2} \sum L_i^{(s)} z^i. \quad (5)$$

Каждый сомножитель в левой части при  $\alpha = 1$  можно разложить по степеням  $\alpha$ . Если перемножить полученные ряды и приравнять друг другу коэффициенты при  $z^i$  в правой и левой частях равенства, то получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_i^{(s)} &= \frac{s(s+1) \dots (s+i-1)}{i!} \alpha^i \left[ 1 + \frac{s(s+i)}{1!(i+1)} \alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(s+1)(s+i)(s+i+1)}{2!(i+1)(i+2)} \alpha^4 + \dots \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где нужно принять при  $i = 0$  коэффициент при  $\alpha^0$  равным единице.

Из (6) и (4) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} a' A_i &= \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \alpha^i \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2i+1}{2i+2} \alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)} \alpha^4 + \dots \right], \\ \frac{1}{2} a' B_i &= \frac{(2i+1)!!}{2i!!} \alpha^{i+1} \left[ 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2i+3}{2i+2} \alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2i+3)(2i+5)}{(2i+2)(2i+4)} \alpha^4 + \dots \right], \end{aligned} \right\} (7)$$

и, в частности,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} a' A_0 &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \dots, \\ \frac{1}{2} a' B_0 &= \alpha \left[ 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \dots \right], \\ \frac{1}{2} a' B_1 &= \frac{3}{2} \alpha^2 \left[ 1 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \alpha^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned} \right\} (7^*)$$

Коэффициенты  $L_i^{(s)}$  можно также выразить через определенные интегралы. А именно, по теореме Фурье имеем интеграл

$$L_i^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos i(\lambda - \lambda') d(\lambda - \lambda')}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda')]^s}, \quad (8)$$

который можно привести к эллиптическим интегралам.

Между коэффициентами Лапласа имеют место рекуррентные соотношения

$$L_i^{(s)} = \frac{i-1}{i-s} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) L_{i-1}^{(s)} - \frac{i+s-2}{i-s} L_{i-2}^{(s)}. \quad (9)$$

Это получится, если продифференцировать по  $z$  уравнение (5):

$$\left[ 1 + \alpha^2 - \alpha \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} L_i^{(s)} z^i.$$

Тогда будем иметь

$$s\alpha \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) \left[ 1 + \alpha^2 - \alpha \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum i L_i^{(s)} z^{i-1} \quad (9^*)$$

или

$$\frac{1}{2} s\alpha \left( z - \frac{1}{z} \right) \sum L_i^{(s)} z^i = \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha^2 - \alpha \left( z + \frac{1}{z} \right) \right] \sum i L_i^{(s)} z^i,$$

откуда после надлежащих преобразований следует (9).

Подобным же образом получим соотношение следующего вида:

$$i L_i^{(s)} = s\alpha (L_{i-1}^{(s+1)} - L_{i+1}^{(s+1)}). \quad (10)$$

Нужно только вспомнить, что

$$\left[1 + \alpha^2 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} L_i^{(s+1)} z^i$$

и подставить это выражение в (9\*). Тогда получаем

$$\frac{1}{2} s \alpha \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \sum L_i^{(s+1)} z^i = \frac{1}{2} \sum i L_i^{(s)} z^{i-1},$$

откуда выводим (10).

Комбинируем (9) и (10) получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} L_i^{(s+1)} &= \frac{(i+s)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2} L_i^{(s)} - \frac{2(i-s+1)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2} L_{i+1}^{(s)}, \\ L_{i+1}^{(s+1)} &= \frac{2(i+s)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2} L_i^{(s)} - \frac{(i-s+1)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2} L_{i+1}^{(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если известны значения  $L_0^{(i/s)}$  и  $L_1^{(i/s)}$ , то при помощи соотношений (11) можно вычислить коэффициенты  $L_i^{(s)}$  для всех значений  $s$  и  $i$  (здесь предполагается, что  $s$  — число вида  $\frac{n}{2}$ , где  $n = 1, 2, \dots$ ).

При  $s = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{2}$  и  $\frac{5}{2}$  из соотношения (9) вытекают следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{2i-2}{2i-1} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) A_{i-1} - \frac{2i-3}{2i-1} A_{i-2}, \\ B_i &= \frac{2i-2}{2i-3} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) B_{i-1} - \frac{2i-1}{2i-3} B_{i-2}, \\ C_i &= \frac{2i-2}{2i-5} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) C_{i-1} - \frac{2i+1}{2i-5} C_{i-2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и из (11) получаем

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{(2i+1)\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_i - \frac{2(2i+1)\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_{i+1}, \\ C_i &= \frac{(2i+3)\alpha(1+\alpha^2)}{3(1-\alpha^2)^2} B_i - \frac{2(2i-1)\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^2} B_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} B_{i+1} &= \frac{2(2i+1)\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_i - \frac{(2i+1)(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2} A_{i+1}, \\ C_{i+1} &= \frac{2(2i+3)\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^2} B_i - \frac{(2i-1)(1+\alpha^2)\alpha}{3(1-\alpha^2)^2} B_{i+1}. \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

При помощи формул (12), (13) и (13\*) можно вычислить все коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , если известны  $A_0$  и  $A_1$ .

Согласно (8)

$$\left. \begin{aligned} a' A_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d(\lambda - \lambda')}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda')}} , \\ a' A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda - \lambda') d(\lambda - \lambda')}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda')}} . \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти интегралы подстановкой Ландена приводятся к нормальной форме эллиптических интегралов. Полагая

$$\varphi = \lambda - \lambda', \quad (14^*)$$

заменяем  $\varphi$  при помощи преобразования Ландена углом  $\theta$ , определяемым следующим соотношением:

$$\sin(\theta - \varphi) = \alpha \sin \theta, \quad (15)$$

которое дает

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}. \quad (15^*)$$

Из (15) получаем дифференцированием

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\cos(\theta - \varphi) - \alpha \cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)}$$

или

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} - \alpha \cos \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (16)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{csc} \varphi &= \operatorname{csc}(\theta - \varphi) \operatorname{csc} \theta + \sin(\theta - \varphi) \sin \theta = \\ &= \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} \operatorname{csc} \theta + \alpha \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

откуда

$$\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi} = \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} - \alpha \cos \theta, \quad (17)$$

так что

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}. \quad (18)$$

Так как далее при  $\alpha < 1$  согласно (16)  $\varphi$  монотонно возрастает вместе с  $\theta$ , то получим

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi}} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}. \quad (19)$$

Далее имеем

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi}} = \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^{\pi} \frac{\alpha \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}},$$

или

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (20)$$

Если ввести полные эллиптические интегралы первого и второго рода в форме Лежандра

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}, \\ E(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

то, в соответствии с (14), (19) и (20), получим

$$A_0 = \frac{4}{\pi} F(\alpha), \quad A_1 = \frac{4}{\pi\alpha} [F(\alpha) - E(\alpha)]. \quad (22)$$

Если  $\alpha$  очень мало, то можно рекомендовать использовать разложения в ряды (7). Относительно числовых расчетов коэффициентов Лапласа следует упомянуть, что рекуррентные формулы, при помощи которых эти коэффициенты находятся по  $L_0$  и  $L_1$ , обладают недостатком, состоящим в том, что при больших значениях  $i$  коэффициенты получаются в виде разности двух больших чисел. Если вычисляются значения коэффициентов при больших значениях  $i$ , то приведенные выше формулы для численных расчетов оказываются непригодными и выгоднее воспользоваться разложениями в цепные дроби, которые получил Ганзен из рекуррентных формул (9).

Если определять  $\lambda$  согласно (1) § 4 гл. VI, то необходимо продифференцировать  $F$  по  $\Lambda$ . Это можно сделать двумя способами — либо продифференцировать возмущающую функцию по  $\Lambda$  до ее разложения в ряд Фурье, и затем подставить разложение  $\Lambda^{-2}$ , либо сначала вывести разложения  $F$  и затем продифференцировать по  $\Lambda$ . Поэтому перейдем к рассмотрению производных вида  $\partial L_i^{(s)} / \partial \alpha$ , которые можно выразить через коэффициенты  $L_i^{(s)}$ . Если

уравнение

$$\left[1 + \alpha^2 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s} = \frac{1}{2} \sum L_i^{(s)} z^i \quad (23)$$

продифференцировать по  $\alpha$ , то получим

$$s \left[ \left(z + \frac{1}{z}\right) - 2\alpha \right] \left[ 1 + \alpha^2 - \alpha \left(z + \frac{1}{z}\right) \right]^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum z^i \frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha},$$

или

$$\frac{1}{2} s \left(z + \frac{1}{z} - 2\alpha\right) \sum L_i^{(s+1)} z^i = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha} z^i,$$

откуда получим формулу

$$\frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha} = s (L_{i-1}^{(s+1)} + L_{i+1}^{(s+1)} - 2\alpha L_i^{(s+1)}), \quad (24)$$

из которой можно найти частные производные от  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и т. д. по  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha'} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \quad (25)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha'} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha'} = -\frac{\alpha}{\alpha'^2} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\partial L}{\partial \alpha}. \quad (25^*)$$

Теперь из этой формулы и (4) получаем

$$\alpha' \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha'} \frac{\partial L_i^{(s/2)}}{\partial \alpha}, \quad \alpha' \frac{\partial A_i}{\partial \alpha'} = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\partial L_i^{(s/2)}}{\partial \alpha} - A_i, \quad (26)$$

или, согласно (24) и (4),

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} (B_{i-1} + B_{i+1}) - \alpha B_i, \\ \alpha' \frac{\partial A_i}{\partial \alpha'} &= -A_i - \frac{1}{2} (B_{i-1} + B_{i+1}) + \alpha B_i. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Далее будем иметь

$$\frac{\partial B_i}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha'^2} L_i^{(s/2)} + \frac{\alpha}{\alpha'^2} \frac{\partial L_i^{(s/2)}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha'^2} L_i^{(s/2)} + \frac{\alpha}{\alpha'^2} \frac{\partial L_i^{(s/2)}}{\partial \alpha}.$$

Но теперь

$$\frac{\partial L_i^{(s/2)}}{\partial \alpha} = \frac{3}{2} (L_{i-1}^{(s/2)} + L_{i+1}^{(s/2)} - 2\alpha L_i^{(s/2)}),$$

или, в соответствии с (4),

$$\alpha^2 \frac{\partial L_i^{(2/2)}}{\partial \alpha} = \frac{3a'}{2} (C_{i-1} + C_{i+1} - 2\alpha C_i),$$

значит,

$$a \frac{\partial B_i}{\partial a} = B_i + \frac{3}{2} (C_{i-1} + C_{i+1} - 2\alpha C_i). \quad (28)$$

Так как  $B_i$  суть однородные функции от  $a$  и  $a'$  степени  $-1$ , то далее имеем

$$a \frac{\partial B_i}{\partial a} + a' \frac{\partial B_i}{\partial a'} = -B_i, \quad (29)$$

откуда получим  $\frac{\partial B_i}{\partial a'}$ .

Подобным же образом получают частные производные от  $C_i$  по  $a$  и  $a'$ .

ТЕОРИЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Общие соображения

При использовании якобиевых координат и элементов Делоне дифференциальные уравнения задачи трех тел согласно § 10 гл. V выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и образуют каноническую систему с шестью степенями свободы. Возмущающая функция  $F$  является периодической функцией от  $l, l', g, g'$  и  $h, h'$ , причем две последние величины всегда встречаются в комбинации  $h - h'$ .

Между этими элементами существуют три алгебраических соотношения — интегралы площадей, которые, если в качестве основной плоскости использовать неизменяемую плоскость, принимают следующую форму (§ 9 гл. V):

$$\left. \begin{aligned} h &= h' + 180^\circ, \\ G^2 - H^2 &= G'^2 - H'^2, \\ H + H' &= c. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Рассматривая возмущающую функцию как функцию  $l$  и  $l'$ , разложим ее, в соответствии с (19) и (20) § 3 гл. VI, в ряд Фурье

$$F = \sum A \cos(il + i'l') + \sum B \sin(il + i'l'). \quad (3)$$

Те члены этого разложения, которые получаются при  $i = i' = 0$ , дают вековые члены. Если вековую часть функции  $F$  обозначить

через  $[F]$ , то согласно теореме Фурье будет

$$[F] = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi F \, dl \, dl'. \quad (4)$$

Функция  $[F]$  является, таким образом, функцией от  $L, L', G, G', H, H', g, g', h, h'$ . Если в (1) вместо  $F$  подставить  $[F]$ , то получим дифференциальные уравнения для определения вековых возмущений. Так как  $[F]$  не зависит от  $l$  и  $l'$ , то дифференциальные уравнения для  $L$  и  $L'$  будут иметь вид

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dL'}{dt} = 0. \quad (5)$$

Эти уравнения свидетельствуют о том, что  $L$  и  $L'$ , поскольку это касается вековых возмущений, остаются неизменными, и содержат первую часть знаменитого доказательства устойчивости Лапласа. Если бы периодические члены в  $F$  приводили бы только к конечным периодическим членам в элементах, тем самым было бы доказано, что  $L$  и  $L'$  обладают конечной верхней границей и отличной от нуля нижней границей и, как мы видели в § 5 гл. V, эксцентриситеты и наклонности также обладали бы верхней границей. Справедливость указанных выше предположений о периодических членах в  $L$  и  $L'$  доказать не удается. Как бы то ни было, из анализа вековых возмущений можно сделать важные выводы о природе движения.

Вековые возмущения в  $G, H, g, h, G', H', g', h'$  определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial H}, \\ \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial H'}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Так как интегралы площадей не зависят от  $l$  и  $l'$ , то они сохраняют свою силу и для вековых частей элементов, и интегралы (2) существуют для системы (6), если предположить, что в качестве основной плоскости будет использована неизменяемая плоскость.

Далее можно точно таким же образом, как это было сделано в § 10 гл. V в общем случае, привести систему дифференциальных уравнений для вековых возмущений к двум степеням свободы.

Для этой цели положим

$$G = \Gamma, \quad G' = \Gamma', \quad (7)$$

и тогда получим

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} (\Gamma^2 - \Gamma'^2), \\ H' &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} (\Gamma^2 - \Gamma'^2); \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

вместо (6) найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \Gamma}, \\ \frac{d\Gamma'}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \Gamma'}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

таким образом, дифференциальные уравнения вековых возмущений в элементах могут быть приведены к канонической системе с двумя степенями свободы.

После того как выражения (8) будут проинтегрированы, из (7) и (7\*) получатся  $G$ ,  $G'$ ,  $H$  и  $H'$ , затем посредством квадратуры находим  $h$  и  $h'$  из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial H}, \\ h' &= h + 180^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (8^*)$$

где  $[F]$  перед дифференцированием следует рассматривать как функцию  $G$ ,  $H$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $g'$ ,  $h'$ .

Наконец, также путем квадратур получим вековые значения  $l$  и  $l'$  из уравнений

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial L}, \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial L'}. \quad (8^{**})$$

Если движение происходит в плоскости, то дифференциальные уравнения можно еще более упростить. Согласно § 10 гл. V положим

$$G = \Pi = K, \quad (9)$$

и будем иметь

$$\left. \begin{aligned} G' = \Pi' &= c - K, \\ g - g' &= \pi - \pi' = k. \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

Мы получим канонические уравнения только с одной степенью свободы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial k}, \\ \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial K}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти уравнения обладают интегралом

$$[F] = \text{const},$$

и, стало быть, их можно свести к квадратурам.

Дифференциальные уравнения для вековых возмущений могут быть точно проинтегрированы по крайней мере в том случае, когда движение происходит в плоскости, хотя это интегрирование до сих пор и не было выполнено \*).

С этой целью необходимо использовать изложенные в § 2 гл. II методы (при этом необходимо помнить, что  $[F]$  более не является квадратичной функцией от  $K$ , что, однако, не является существенным при исследовании). Вообще, оказывается, что  $K$  будет периодической функцией от  $t$ , которая колеблется между двумя неизменными границами  $K_1$  и  $K_2$ , получающимися в результате пересечения двух кривых

$$[F] = \text{const}, \quad \frac{\partial [F]}{\partial k} = 0.$$

При исследовании вековых возмущений в астрономии обычно используют нередуцированную систему (6) 8-го порядка. В общем случае эта система будет записываться не в канонической форме, что является существенным недостатком.

Если подставить в (6) элементы Пуанкаре  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $p$  и т. д. и рассмотреть систему из  $n$  планет ( $n + 1$  тел), то дифференциальные уравнения для вековых возмущений будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial \eta_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \xi_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

В гл. VI мы нашли, что возмущающая функция, а стало быть также и  $[F]$ , может быть разложена в ряд по положительным степеням величин

$$\left. \begin{aligned} \xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \\ \xi_2, \eta_2, p_2, q_2, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Можно доказать, что члены в разложении  $[F]$  всегда имеют четный порядок относительно переменных (12). Коэффициенты при различных степенях всегда являются функциями  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  и т. д.,

\*) Интересные математические результаты были найдены фон Болином [35]. Применением теории  $\theta$ -функций с несколькими переменными автор ввел ненужные усложнения.

которые в случае вековых возмущений будут постоянными величинами.

При числовых расчетах вековых возмущений в теории планет обычно достаточно рассмотреть члены второй степени относительно переменных (12). Сформулированную таким образом проблему вековых возмущений мы рассмотрим подробно в следующих параграфах. Влияние членов высших порядков будет в некоторых случаях учтено в § 7.

## § 2. Вековая часть возмущающей функции

Подставим в выражение для разложения возмущающей функции из § 3 гл. IV ряды

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0} &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\ \frac{aa'}{\Delta_0^3} &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\ \frac{a^2 a'^2}{\Delta_0^5} &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} C_i \cos i(\lambda - \lambda'), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и удержим только те члены, которые не зависят от  $\lambda$  и  $\lambda'$ ; тогда получим выражение для вековой части возмущающей функции  $[F]$ . Полагая

$$R_0 = \frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{2} A_0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} R_2'(x, y) &= \frac{1}{2} k^2 m_a m_b \left\{ \frac{x^2}{\Lambda} \left( -\frac{3}{4} \frac{a}{a'} B_0 - \frac{1}{2} B_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{4} \frac{a^2}{a'^2} C_0 + \frac{15}{8} C_0 - \frac{3}{2} \frac{a}{a'} C_1 - \frac{9}{8} C_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^2}{\Lambda} \left( -\frac{3}{4} \frac{a'}{a} B_0 - \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} C_0 + \frac{15}{8} C_0 - \frac{3}{2} \frac{a'}{a} C_1 - \frac{9}{8} C_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{xy}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \left( \frac{9}{4} B_0 + \frac{1}{4} B_2 - \frac{9}{4} \frac{a}{a'} C_0 - \frac{9}{4} \frac{a'}{a} C_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{21}{8} C_1 + \frac{3}{4} \frac{a}{a'} C_2 + \frac{3}{4} \frac{a'}{a} C_2 + \frac{3}{8} C_3 \right) \right\}, \quad (2^*) \end{aligned}$$

$$R_2''(x, y) = k^2 m_a m_b \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{\Lambda} + \frac{y^2}{\Lambda'} \right) B_1 - \frac{xy}{2\sqrt{\Lambda\Lambda'}} B_1 \right\}, \quad (2^{**})$$

находим

$$[F] = R_0 + R_2'(\xi, \xi') + R_2'(\eta, \eta') - R_2''(p, p') - R_2''(q, q'). \quad (3)$$

Коэффициенты в  $R'$  и  $R''$  зависят от  $a$  и  $a'$  или [(так как  $\Lambda = \beta\sqrt{a}$ ,  $\Lambda' = \beta'\sqrt{a'}$ )] от величин  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ , которые входят в выражения для коэффициентов Лапласа  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ . Выражения для этих коэффициентов более просто могут быть записаны при помощи формул, выведенных в § 5 гл. VI. А именно, получим из (12), (12\*), (13) и (13\*)

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= 4\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)C_2 - 7C_1, \\ C_2 &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)C_1 + 5C_0, \\ C_1 &= \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}B_0 + \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{3(1-\alpha^2)^2}B_1, \\ C_0 &= \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}B_0 + \frac{2\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^2}B_1, \\ B_2 &= 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)B_1 - 3B_0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где цифры в скобках относятся к соответствующим формулам из § 5 гл. VI.

С помощью этих соотношений коэффициенты в выражениях для  $R_2'$  и  $R_2''$  выражаются через величины  $B_0$  и  $B_1$ , или, что оказывается здесь более подходящим, через  $B_1$  и  $B_2$ . Из (4) получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{15}{8} + \frac{3}{4}\alpha^2\right)C_0 - \frac{3}{2}\alpha C_1 - \frac{9}{8}C_2 = \frac{3}{4}\alpha B_0 + \frac{3}{4}B_1 \\ &- \frac{9}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)C_0 + \frac{21}{8}C_1 + \\ &\quad + \frac{3}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)C_2 + \frac{3}{8}C_3 = -\frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)B_1, \end{aligned}$$

так что

$$R_2'(x, y) = k^2 m_a m_b \left\{ \frac{1}{8} B_1 \left( \frac{x^2}{\Lambda} + \frac{y^2}{\Lambda} \right) - \frac{1}{4} B_2 \frac{xy}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \right\}, \quad (5)$$

и, стало быть, выражение для  $[F]$  будет

$$\begin{aligned} [F] &= \frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2} + \frac{1}{2} k^2 m_a m_b A_0 + \\ &+ k^2 m_a m_b \left\{ \frac{1}{8} B_1 \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{\Lambda} + \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\Lambda'} \right) - \frac{1}{4} B_2 \left( \frac{i\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} + \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} B_1 \left( \frac{p^2 + q^2}{\Lambda} + \frac{p'^2 + q'^2}{\Lambda'} - \frac{2(pp' + qq')}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}} \right) \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Если элементы  $\xi$ ,  $\eta$  и т. д. выразить с помощью (16) § 1 гл. VI через эллиптические элементы и удержать только члены второй степени относительно  $e$  и  $i$ , то из (6) получим следующее хорошо

известное выражение для вековой части возмущающей функции:

$$[F] = \frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu\Lambda'^2} + \frac{1}{2} k^2 m m' A_0 + \\ + k^2 m m' \left\{ \frac{1}{8} B_1 (e^2 + e'^2) - \frac{1}{4} B_2 e e' \cos (\pi - \pi') - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} B_1 (\sin^2 i + \sin^2 i') + \frac{1}{4} \sin i \sin i' \cos (\Omega - \Omega') \right\}. \quad (6^*)$$

Выражение (6) [или (6\*)] кладется в основу числовых расчетов вековых возмущений. Как следует из этих же формул, для вычисления вековых возмущений необходимо знать только три коэффициента Лапласа, а именно  $A_0$ ,  $B_1$  и  $B_2$ .

Если число планет больше двух, то соответствующее выражение для  $[F]$  можно непосредственно вывести из (6).

Пусть в случае  $n$  планет имеем массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , причем используется якобиева система координат (§ 4 гл. V). Пусть соответствующие элементы Пуанкаре (§ 1 гл. VI) суть  $\xi_i, \eta_i$  и т. д. ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Введем теперь обозначения

$$R_0 = \sum \frac{\beta_i^4}{2\mu_i \Lambda_i^2} + \frac{1}{2} \sum k^2 m_i m_j A_0 (a_i, a_j), \\ R'_2(x_i, x_j) = k^2 m_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a_i, a_j) \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right) - \frac{1}{4} B_2(a_i, a_j) \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}, \\ R''_2(x_i, x_j) = k^2 m_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a_i, a_j) \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right) - \frac{1}{4} B_1(a_i, a_j) \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}; \quad (7^*)$$

тогда получим

$$[F] = R_0 + \sum R'_2(\xi_i, \xi_j) + \sum R'_2(\eta_i, \eta_j) - \\ - \sum R'_2(p_i, p_j) - \sum R''_2(q_i, q_j), \quad (7)$$

где при суммировании  $i, j = 1, 2, \dots, n, i < j$ .

Для коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$  согласно (8) § 5 гл. VI имеем следующие выражения:

$$B_1(a_i, a_j) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a_i a_j \cos \omega d\omega}{[a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos \omega]^{3/2}}, \\ B_2(a_i, a_j) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a_i a_j \cos 2\omega d\omega}{[a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos \omega]^{3/2}}. \quad (8)$$

### § 3. Вековые возмущения в случае двух планет

При применении координат Якоби планеты можно располагать в произвольной последовательности. При двух планетах  $m$  и  $m'$  можно либо  $m$  отнести к системе координат с началом в Солнце  $M$ , и тогда движение  $m'$  относить к такой системе координат, начало которой находится в центре инерции  $M$  и  $m$ , или наоборот. Если  $m$  — та планета, которая находится ближе к Солнцу, то предположим, что ее движение относится к системе координат, начало которой лежит в центре Солнца. Движение внешней планеты отнесем к центру масс  $M$  и  $m$ , как к началу координат.

Тогда имеем

$$\mu = \frac{mM}{m+M}, \quad \mu' = \frac{m'(m+M)}{m+m'+M} \quad (1)$$

и

$$\beta = \frac{kmM}{\sqrt{m+M}}, \quad \beta' = km' \sqrt{\frac{M(m+M)}{m+m'+M}}. \quad (1^*)$$

Пусть элементы  $m$  суть  $\Lambda$  (или  $a$ ),  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $p$  и  $q$ , а элементы  $m'$  —  $\Lambda'$  (или  $a'$ ),  $\lambda'$ ,  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $p'$  и  $q'$ . Так как, по предположению,  $a < a'$ , то  $a$  меньше единицы, и мы можем непосредственно использовать формулы § 5 гл. VI.

При помощи выведенных там же формул выразим коэффициенты  $A_0$ ,  $B_1$  и  $B_2$  непосредственно через эллиптические интегралы  $F(\alpha)$  и  $E(\alpha)$ . Для  $A_0$  мы уже нашли выражение (22) § 5 гл. VI:

$$a' A_0 = \frac{4}{\pi} F(\alpha). \quad (2)$$

В соответствии с (13\*) § 5 гл. VI получим

$$B_1 = \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_0 - \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_1,$$

и, значит, если подставить выражения для  $A_0$  и  $A_1$ ,

$$\frac{\pi}{4} a' B_1 = -\frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} F(\alpha) - \frac{(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha). \quad (3)$$

Далее, по (13\*) § 5 гл. VI находим

$$B_2 = \frac{6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_1 - \frac{3\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_2,$$

или, по (12) § 5 гл. VI

$$A_2 = \frac{2}{3} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) A_1 - \frac{1}{3} A_0,$$

$$B_2 = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_0 - \frac{2(1+\alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_1.$$

Подставляя вместо  $A_0$  и  $A_1$  их выражения через эллиптические интегралы, получим

$$\frac{\pi}{4} a B_2 = -\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2} F(\alpha) + \frac{2(1+\alpha)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha). \quad (4)$$

Для контроля можно использовать формулу

$$\alpha B_2 = 2(1+\alpha^2)B_1 - 3\alpha B_0. \quad (5)$$

По (13) § 5 гл. VI имеем

$$B_0 = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_0 - \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_1,$$

следовательно,

$$\frac{\pi}{4} a' B_0 = -\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} F(\alpha) + \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha); \quad (6)$$

теперь подставим выражения (3), (4) и (6) в (5) и найдем, что это равенство будет выполняться тождественно. Итак, имеем следующие формулы для вычисления  $A_0$ ,  $B_1$  и  $B_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{4} a' A_0 &= F(\alpha), \\ \frac{\pi}{4} a' B_1 &= -\frac{1}{1-\alpha^2} F(\alpha) + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha), \\ \frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 &= -\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2} F(\alpha) + \frac{2(1+\alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Интегралы  $F(\alpha)$  и  $E(\alpha)$  при малых  $\alpha$  почти равны друг другу ( $= \frac{\pi}{2}$ ) и, следовательно,  $B_1$  и  $B_2$  вычисляются по разности близких чисел.

В таблицах для  $F$  и  $E$  в качестве аргумента часто используется величина  $\theta$ , определяемая формулой

$$\alpha = \sin \theta. \quad (8)$$

Поэтому выгодно вместо  $\alpha$  в (7) подставить  $\theta$ . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{4} a' B_1 &= (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta + 2 \operatorname{tg}^4 \theta) E - (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) F, \\ \frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 &= 2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^4 \theta) E - (2 + \operatorname{tg}^2 \theta) F. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения для вековых возмущений принимают

следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \xi}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial p}, \\ \frac{d\xi'}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial \eta'}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \xi'}, \\ \frac{dp'}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial q'}, & \frac{dq'}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial p'}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

после того как эти уравнения проинтегрированы, получим средние долготы  $\lambda$  и  $\lambda'$  из уравнений

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda}, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda'}. \quad (10^*)$$

Приближенно, в соответствии с (16) § 1 гл. VI, имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\Lambda} e \cos \pi = \sqrt{\Lambda} r, \\ \eta &= -\sqrt{\Lambda} e \sin \pi = -\sqrt{\Lambda} s, \\ p &= \sqrt{\Lambda} \sin i \cos \Omega = \sqrt{\Lambda} u, \\ q &= -\sqrt{\Lambda} \sin i \sin \Omega = -\sqrt{\Lambda} v, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и так как  $\Lambda$  здесь не зависит от времени, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial s}, & \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial r}, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial v}, & \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial u}, \\ \frac{dr'}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda'} \frac{\partial [F]}{\partial s'}, & \frac{ds'}{dt} &= \frac{1}{\Lambda'} \frac{\partial [F]}{\partial r'}, \\ \frac{du'}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda'} \frac{\partial [F]}{\partial v'}, & \frac{dv'}{dt} &= \frac{1}{\Lambda'} \frac{\partial [F]}{\partial u'}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Теперь выразим  $[F]$  через переменные  $r, s, u, v, r'$  и т. д.

$$\begin{aligned} [F] &= \frac{\beta^4}{2\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\Lambda'^2} + \frac{1}{2} k^2 m m' A_0 + k^2 m m' \left\{ \frac{1}{8} B_1 (r^2 + s^2 + \right. \\ &+ r'^2 + s'^2) - \frac{1}{4} B_2 (r r' + s s') - \frac{1}{8} B_1 (u^2 + v^2 + u'^2 + v'^2) + \\ &\left. + \frac{1}{4} B_1 (u u' + v v') \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{k^2 m m'}{4\Lambda} B_1, & \kappa_2 &= \frac{k^2 m m'}{4\Lambda} B_2, \\ \kappa'_1 &= \frac{k^2 m m'}{4\Lambda'} B_1, & \kappa'_2 &= \frac{k^2 m m'}{4\Lambda'} B_2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

то получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\kappa_1 s + \kappa_2 s', \\ \frac{ds}{dt} &= \kappa_1 r - \kappa_2 r', \\ \frac{dr'}{dt} &= -\kappa_1' s' + \kappa_2' s, \\ \frac{ds'}{dt} &= \kappa_1' r' - \kappa_2' r \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \kappa_1 (v - v'), \\ \frac{dv}{dt} &= \kappa_1 (-u + u'), \\ \frac{du'}{dt} &= \kappa_1' (v' - v), \\ \frac{dv'}{dt} &= \kappa_1' (-u' + u). \end{aligned} \right\} \quad (15^*)$$

Для коэффициентов  $\kappa$  получим выражения, удобные для числовых расчетов. Приблизленно (согласно § 5 гл. V)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= km \sqrt{M}, & \beta' &= km' \sqrt{M}, \\ n &= \frac{k \sqrt{M}}{a^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

таким образом,

$$\frac{k^2 m m'}{\Lambda} = \frac{k^2 m m'}{\beta \sqrt{a}} = \frac{km'}{\sqrt{Ma}} = na \frac{m'}{M},$$

и аналогично,

$$\frac{k^2 m m'}{\Lambda'} = n' a' \frac{m}{M};$$

поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{nm'}{4M} a B_1, & \kappa_2 &= \frac{nm'}{4M} a B_2, \\ \kappa_1' &= \frac{n'm}{4M} a' B_1, & \kappa_2' &= \frac{n'm}{4M} a' B_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В соответствии с (7),  $a'B_1$  и  $a'B_2$ , а равным образом  $aB_1$  и  $aB_2$ , зависят только от отношения  $a$  к  $a'$ , поэтому формулы (17) весьма удобны для численных расчетов, так как выбор единиц времени, расстояния и массы просто определяется через значение среднего движения  $n$  (или  $n'$ ).

Вычисление вековых возмущений в эксцентриситете и долготе перигелия выполняется по формулам (15), а в наклонности и долготе восходящего узла — по (15\*).

Уравнения (15) и (15\*) можно интегрировать двумя способами:

1. Сообразно с принципами теории возмущений величины  $r, s, u, v, r', s', u', v'$  в правых частях этих уравнений можно рассматривать как постоянные.

2. Можно строго выполнять интегрирование, что легко, так как здесь мы имеем дело с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Оба метода успешно используются в астрономии. При числовых расчетах часто бывает достаточно первого метода.

#### § 4. Тригонометрические выражения для вековых возмущений эксцентриситета и долготы перигелия

Вековые возмущения эксцентриситета и долготы перигелия определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\kappa_1 s + \kappa_2 s', \\ \frac{ds}{dt} &= \kappa_1 r - \kappa_2 r', \\ \frac{dr'}{dt} &= -\kappa_1' s' + \kappa_2' s, \\ \frac{ds'}{dt} &= \kappa_1' r' - \kappa_2' r, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

интегрированием которых мы теперь займемся.

Заметим сначала, что из (1) получается

$$\kappa_2' \left( r \frac{dr}{dt} + s \frac{ds}{dt} \right) + \kappa_2 \left( r' \frac{dr'}{dt} + s' \frac{ds'}{dt} \right) = 0,$$

и стало быть

$$\kappa_2' (r^2 + s^2) + \kappa_2 (r'^2 + s'^2) = C, \quad (2)$$

где  $C$  обозначает постоянную интегрирования.

Подставляя сюда выражения для  $r$  и  $s$ , представим это уравнение в форме

$$\kappa_2' e^2 + \kappa_2 e'^2 = C. \quad (2^*)$$

Это уравнение непосредственно показывает, что эксцентриситеты не могут принимать сколь угодно большие значения, если предполагается, что  $\kappa_2$  и  $\kappa_2'$  имеют один и тот же знак. Если они в определенную эпоху малы для обоих тел, то должны оставаться малыми всегда. Из (17) § 3 находим, что  $\kappa_2'$  и  $\kappa_2$  одного знака, если это имеет место и для средних движений  $n$  и  $n'$ , т. е. если обе планеты

обращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении. Таким образом, вековые возмущения не возрастают неограниченно, как этого можно было ожидать в соответствии с использованными в предыдущих параграфах методами.

Линейная форма дифференциальных уравнений (1) обуславливает следующую форму общего решения:

$$\begin{aligned} r &= N \cos (gt + \beta), & r' &= N' \cos (gt + \beta'), \\ s &= N \sin (gt + \beta), & s' &= N' \sin (gt + \beta'). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя эти значения в (1), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (g - \kappa_1)N + \kappa_2 N' &= 0, \\ \kappa_2 N + (g - \kappa_1)N' &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

которые будут удовлетворяться при

$$\begin{vmatrix} g - \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & g - \kappa_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Последнее уравнение имеет два корня,  $g_1$  и  $g_2$ , и каждому из них соответствует согласно (4) значение отношения  $N$  к  $N'$ . Если эти отношения обозначить через  $N_2 : N'_2$  и  $N_1 : N'_1$ , то общее решение (1) выразится так:

$$\left. \begin{aligned} r &= N_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos (g_2 t + \beta_2), \\ s &= N_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin (g_2 t + \beta_2), \\ r' &= N'_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + N'_2 \cos (g_2 t + \beta_2), \\ s' &= N'_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + N'_2 \sin (g_2 t + \beta_2), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  можно рассматривать как постоянные интегрирования.

Можно доказать, что корни  $g_1$  и  $g_2$  должны быть действительными и положительными, если, как здесь будет предполагаться, обе планеты обращаются в одном направлении вокруг Солнца. Действительно, уравнение (5) можно написать в виде

$$g^2 - (\kappa_1 + \kappa_1')g + \kappa_1 \kappa_1' - \kappa_2 \kappa_2' = 0, \quad (5^*)$$

и так как

$$(\kappa_1 + \kappa_1')^2 - 4(\kappa_1 \kappa_1' - \kappa_2 \kappa_2') = (\kappa_1 - \kappa_1')^2 - 4\kappa_2 \kappa_2',$$

то при сделанных предположениях корни будут всегда действительными. Далее, оба корня положительны, если выполняется неравенство

$$\kappa_1 \kappa_1' - \kappa_2 \kappa_2' > 0, \quad (7)$$

которое может быть, в соответствии с (14) § 3, записано в форме

$$\frac{k^4 m^3 m'^2}{16 \Lambda \Lambda'} (B_1^2 - B_2^2) > 0, \quad (7^*)$$

или, проще,

$$B_1 > B_2. \quad (8)$$

Но это неравенство выполняется всегда. Имеем по (13) и (13\*) § 5 гл. VI

$$(1 - \alpha^2)^2 B_1 = 3\alpha (1 + \alpha^2) A_1 - 6\alpha^2 A_2.$$

$$(1 - \alpha^2)^2 B_2 = 6\alpha^2 A_1 - 3\alpha (1 + \alpha^2) A_2,$$

следовательно,

$$B_1 - B_2 = \frac{3\alpha}{(1 + \alpha)^2} (A_1 + A_2) = \frac{3\alpha a'}{(a + a')^2} (A_1 + A_2), \quad (9)$$

откуда следует (8).

Постоянные интегрирования получаем из значений величин  $r, s, r', s'$  для определенного момента времени. Если при  $t = 0$  эти значения будут равны  $r_0, s_0, r'_0, s'_0$ , то имеем

$$r_0 = N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos \beta_2,$$

$$s_0 = N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin \beta_2,$$

$$r'_0 = N'_1 \cos \beta_1 + N'_2 \cos \beta_2,$$

$$s'_0 = N'_1 \sin \beta_1 + N'_2 \sin \beta_2.$$

Положим

$$x_1 = N_1 \cos \beta_1, \quad x_2 = N_2 \cos \beta_2,$$

$$y_1 = N_1 \sin \beta_1, \quad y_2 = N_2 \sin \beta_2,$$

$$k_1 = -\frac{1}{\kappa_2} (g_1 - \kappa_1), \quad k_2 = -\frac{1}{\kappa_2} (g_2 - \kappa_1);$$

тогда эти уравнения примут вид

$$x_1 + x_2 = r_0, \quad y_1 + y_2 = s_0,$$

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 = r'_0, \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 = s'_0,$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} (k_2 - k_1) x_1 &= k_2 r_0 - r'_0, & (k_2 - k_1) y_1 &= k_2 s_0 - s'_0, \\ (k_2 - k_1) x_2 &= r'_0 - k_1 r_0, & (k_2 - k_1) y_2 &= s'_0 - k_1 s_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**О п р е д е л е н и е.** Говорят, что долгота перигелия  $\pi$  обладает средним движением  $b$ , если разность  $\pi - bt$  при всех значениях имеет конечную верхнюю границу.

Из (6) можно вывести утверждение, что в рассматриваемом здесь случае долгота перигелия обладает таким средним движением; более того, его значение будет совпадать с одним из корней  $g_1$  или  $g_2$ . В исключительном случае, который будет рассмотрен ниже, оно будет равно среднему арифметическому этих двух величин.

По (6) имеем

$$\left. \begin{aligned} e \cos \pi &= N_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos (g_2 t + \beta_2), \\ e \sin \pi &= N_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin (g_2 t + \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Сначала предположим, что  $N_1 < N_2$ . Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} e \sin (\pi - g_2 t - \beta_2) &= N_1 \sin [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2], \\ e \cos (\pi - g_2 t - \beta_2) &= N_1 \cos [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2] + N_2, \end{aligned}$$

и отсюда

$$\operatorname{tg} (\pi - g_2 t - \beta_2) = \frac{N_1 \sin [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2]}{N_1 \cos [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2] + N_2}. \quad (12)$$

Так как, по предположению,  $N_1 < N_2$ , то знаменатель в этом выражении никогда не будет равен нулю. Следовательно,  $\operatorname{tg} (\pi - g_2 t - \beta_2)$  никогда не будет бесконечным, так что угол  $\pi - g_2 t - \beta_2$  либо численно меньше  $90^\circ$ , либо всегда находится между  $90^\circ$  и  $270^\circ$ . Таким образом, долгота перигелия  $\pi$  обладает средним движением  $g_2$ .

Если, во-вторых,  $N_1 > N_2$ , то аналогичным образом докажем, что среднее движение  $\pi$  равно  $g_1$ .

Если, наконец,  $N_1 = N_2$ , то значение  $\pi$  найдется следующим образом. Из (11) получим при произвольных значениях  $N_1$  и  $N_2$  уравнения

$$\left. \begin{aligned} e \sin \left( \pi - \frac{g_1 + g_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) &= (N_1 - N_2) \sin \left( \frac{g_1 - g_2}{2} t + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \right), \\ e \cos \left( \pi - \frac{g_1 + g_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) &= (N_1 + N_2) \cos \left( \frac{g_1 - g_2}{2} t + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Если теперь  $N_1 = N_2 = N$ , то отсюда получим

$$\left. \begin{aligned} \pi - \frac{g_1 + g_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} &= 180^\circ i, \\ e &= (-1)^i 2N \cos \left( \frac{g_1 - g_2}{2} t + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $i$  обозначает целое число.

Итак, перигелий в этом случае обладает средним движением, которое равно  $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ .

Относительно долготы перигелия другой планеты  $m'$  справедливы аналогичные выводы. Он обладает средним движением, равным  $g_1$ , если  $N'_1 > N'_2$ , равным  $g_2$ , если  $N'_1 < N'_2$ , и равным  $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ , если  $N'_1 = N'_2$ .

Из (2\*) мы уже сделали вывод, что  $e$  и  $e'$  должны обладать конечными верхними границами. Теперь мы можем более точно

определить эти границы. Действительно, из (11) следует, что

$$e^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1N_2 \cos [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2], \quad (15)$$

и, аналогично,

$$e'^2 = N_1'^2 + N_2'^2 + 2N_1'N_2' \cos [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2],$$

так что  $e$  и  $e'$  удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} |N_1 - N_2| < e < N_1 + N_2, \\ |N_1' - N_2'| < e' < N_1' + N_2'. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из (5) находим, что величины  $g_1$  и  $g_2$  содержат множителями малые массы  $m$  и  $m'$  и, следовательно, малы. Поэтому средние движения всегда малы.

### § 5. Вековые возмущения наклонности и узла

Дифференциальные уравнения, которые определяют движение плоскости орбиты, были

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \kappa_1 (v - v'), \\ \frac{dv}{dt} &= -\kappa_1 (u - u'), \\ \frac{du'}{dt} &= -\kappa_1' (v - v'), \\ \frac{dv'}{dt} &= \kappa_1' (u - u'). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из этих уравнений выводим следующие:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} &= \kappa_1 (vu' - uv'), \\ u' \frac{du'}{dt} + v' \frac{dv'}{dt} &= -\kappa_1' (vu' - uv'), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

откуда

$$\kappa_1' \left( u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} \right) + \kappa_1 \left( u' \frac{du'}{dt} + v' \frac{dv'}{dt} \right) = 0. \quad (3)$$

Далее, непосредственно получаем

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1' \frac{du}{dt} + \kappa_1 \frac{du'}{dt} &= 0, \\ \kappa_1' \frac{dv}{dt} + \kappa_1 \frac{dv'}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) можно непосредственно проинтегрировать; получим

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1' u + \kappa_1 u' &= c_1, \\ \kappa_1' v + \kappa_1 v' &= c_2, \\ \kappa_1' (u^2 + v^2) + \kappa_1 (u'^2 + v'^2) &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  обозначают три постоянных интегрирования. Соотношения (5) соответствуют в этом случае интегралам площадей. Чтобы доказать это, возвратимся к общим выражениям для этих интегралов (13) § 9 гл. V, которые представляются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \sin \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \sin \Omega' &= \tilde{c}_1, \\ \beta \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \cos \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin i' \cos \Omega' &= -\tilde{c}_2, \\ \beta \sqrt{a(1-e^2)} \cos i + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos i' &= \tilde{c}_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если вспомнить, что

$$\begin{aligned} u &= \sin i \cos \Omega, & v &= \sin i \sin \Omega, \\ u' &= \sin i' \cos \Omega', & v' &= \sin i' \sin \Omega', \end{aligned}$$

и левые части (6) разложить по степеням  $u$ ,  $v$ ,  $u'$ ,  $v'$ , то, пренебрегая членами третьего порядка, из двух первых уравнений (6) получим

$$\left. \begin{aligned} \beta \sqrt{a} v + \beta' \sqrt{a'} v' &= \tilde{c}_1, \\ \beta \sqrt{a} u + \beta' \sqrt{a'} u' &= -\tilde{c}_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Но из (16) § 3 имеем

$$\beta \sqrt{a} = \frac{k^2 m m' M}{n a m'},$$

и, принимая во внимание значения  $\kappa_1$  и  $\kappa_1'$  из (17) § 3, находим, что уравнения (7) совпадают с первыми двумя из уравнений (5). Очевидно, что на третье уравнение (5) можно смотреть только как на неполное третье уравнение (6).

Если, в частности, в качестве основной плоскости использовать неизменяемую плоскость, то  $\tilde{c}_1$  и  $\tilde{c}_2$ , а следовательно, также  $c_1$  и  $c_2$ , равны нулю; затем по (5) имеем

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = -\frac{\kappa_1}{\kappa_1'}. \quad (8)$$

Если записать это в форме

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}, \quad (8^*)$$

то отсюда будет следовать, что

$$\operatorname{tg} \Omega = \operatorname{tg} \Omega'. \quad (9)$$

Таким образом, линии узлов обеих планетных орбит на неизменяемой плоскости совпадают. Это составляет знаменитую теорему Якоби, которая, как было доказано в § 9 гл. V, сохраняет свою силу для всех степеней  $u$ ,  $v$  и т. д. Итак, имеем

$$\Omega = \Omega' + 180^\circ. \quad (10)$$

Но отсюда можно вывести еще одно важное предложение, а именно, что наклонности обеих орбит к неизменяемой плоскости остаются постоянными.

Действительно, из (8) имеем

$$vu' - uv' = 0,$$

и, следовательно, согласно (2) упомянутому предложению будут соответствовать уравнения

$$u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$u' \frac{du'}{dt} + v' \frac{dv'}{dt} = 0.$$

Следовательно, здесь необходимо определить только одну величину, а именно, движение общей линии узлов на неизменяемой плоскости. Имеем

$$\sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} = -v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt}, \quad (10^*)$$

и, подставляя вместо  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{dv}{dt}$  выражения (1),

$$\sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} = -\kappa_1 (u^2 + v^2) + \kappa_1 (uu' + vv'),$$

или, согласно (8), деля на величину  $\sin^2 i = u^2 + v^2$ , получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = -(\kappa_1 + \kappa_1'). \quad (11)$$

Итак, общая линия узлов перемещается попятным движением с постоянной скоростью ежегодно на величину  $\kappa_1 + \kappa_1'$ .

Если вместо неизменяемой плоскости выбрать другую плоскость  $XU$ , то, видимо, движение будет описываться более сложным образом.

Определение положения неизменяемой плоскости выполняется при помощи уравнений (20) § 1 гл. V:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma \sin \Pi &= \frac{c_1''}{c_3''}, \\ \operatorname{tg} \gamma \cos \Pi &= -\frac{c_2''}{c_3''}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $c_1''$ ,  $c_2''$  и  $c_3''$  вычисляются из (6). Здесь  $\gamma$  обозначает наклонность неизменяемой плоскости к плоскости  $XU$  (например, к эллиптике) и  $\Pi$  — долгота восходящего узла на этой плоскости.

### § 6. Вековые возмущения эллиптических орбит при произвольном числе планет

В § 2 дана общая форма вековой части возмущающей функции для случая произвольного числа планет. Если мы введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} [i, j] &= \frac{1}{4} \frac{m_i m_j}{\Lambda_i} B_1(a_i, a_j), \\ [i, j] &= -\frac{1}{4} \frac{m_i m_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} B_2(a_i, a_j) \\ &\quad (i \neq j), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$[i, i] = (i, 1) + (i, 2) + \dots + (i, n), \quad (1^*)$$

то можно зависящую от эксцентриситета часть  $[F]$ , которую мы обозначим через  $[F]_1$ , записать в форме

$$[F]_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n [i, j] (\xi_i \xi_j + \eta_i \eta_j). \quad (2)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial [F]_1}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial [F]_1}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Если бы в  $[F]_1$  входили только квадраты  $\xi$  и  $\eta$ , так что

$$[F]_1 = \frac{1}{2} \sum C_i (\xi_i^2 + \eta_i^2),$$



где использовано следующее обозначение:

$$[a, b] = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial \xi_s} \frac{\partial b}{\partial \eta_s} - \frac{\partial a}{\partial \eta_s} \frac{\partial b}{\partial \xi_s} \right). \quad (8^*)$$

Но согласно (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_s} &= \gamma_{si}, & \frac{\partial \Xi_i}{\partial \eta_s} &= 0, \\ \frac{\partial Y_r}{\partial \xi_s} &= 0, & \frac{\partial Y_r}{\partial \eta_s} &= \gamma_{sr}, \end{aligned}$$

так что непосредственно получаем

$$[\Xi_i, \Xi_r] = [Y_i, Y_r] = 0,$$

$$[\Xi_i, Y_r] = \sum_{s=1}^n \gamma_{si} \gamma_{sr},$$

причем последняя сумма по (6) равна нулю при  $i \neq r$  и равна единице, если  $i = r$ . Итак, ортогональные преобразования являются каноническими.

В § 4 гл. I мы видели, что при соответствующем выборе коэффициентов  $\gamma_{ij}$  получим

$$\frac{1}{2} \sum [i, j] \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i \Xi_i^2. \quad (9)$$

Коэффициенты  $s_v$  суть корни фундаментального уравнения \*)

$$D = \begin{vmatrix} [1, 1] - s & [1, 2] & \dots & [1, n] \\ [2, 1] & [2, 2] - s & \dots & [2, n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [n, 1] & [n, 2] & \dots & [n, n] - s. \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Если  $s_v$  — какой-либо корень этого уравнения, то соответствующие коэффициенты  $\gamma_{iv}$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} ([1, 1] - s_v) \gamma_{1v} + [1, 2] \gamma_{2v} + \dots + [1, n] \gamma_{nv} &= 0, \\ [2, 1] \gamma_{1v} + ([2, 2] - s_v) \gamma_{2v} + \dots + [2, n] \gamma_{nv} &= 0, \\ \dots & \dots \\ [n, 1] \gamma_{1v} + [n, 2] \gamma_{2v} + \dots + ([n, n] - s_v) \gamma_{nv} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

\*) Такие уравнения называются еще вековыми. (Прим. ред.)



Из свойств ортогональных преобразований можно сделать некоторые общие выводы об общем решении. Во-первых, в § 4 гл. I мы видели, что все корни  $s$ , фундаментального уравнения (10) действительны. Можно также доказать, что все корни должны быть положительными. С этой целью покажем, что  $[F]$  для всех значений  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , а значит, и для всех значений  $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  должна быть положительной. При этом предполагается, что мы имеем дело только с теми членами в  $[F]$ , которые зависят от  $\xi_i$  и  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Согласно § 2

$$[F]_1 = \sum R'_2(\xi_i, \xi_j) + \sum R'_2(\eta_i, \eta_j),$$

где

$$R'_2(x_i, x_j) = k^2 m_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a_i, a_j) \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right) - \frac{1}{4} B_2(a_i, a_j) \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}.$$

Это выражение можно записать в форме

$$\begin{aligned} R'_2(x_i, x_j) &= \frac{k^2 m_i m_j}{8} \left\{ B_2(a_i, a_j) \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} - \frac{2x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [B_1(a_i, a_j) - B_2(a_i, a_j)] \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right) \right\} = \\ &= \frac{k^2 m_i m_j}{8} \left\{ B_2 \left( \frac{x_i}{\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \right)^2 + (B_1 - B_2) \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right) \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Так как, в соответствии с (9) § 4,  $B_1(a_i, a_j)$  больше  $B_2(a_i, a_j)$ , то отсюда находим, что  $R'_2(x_i, x_j)$  всегда положительно и, следовательно,  $[F]$  также всегда положительно.

С другой стороны, если подставить переменные  $\Xi_i$  и  $Y_i$ , то будем иметь выражение

$$[F]_1 = \frac{1}{2} \sum s_i (\Xi_i^2 + Y_i^2),$$

которое должно быть положительным для всех значений  $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , что, очевидно, возможно только, если все коэффициенты  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) положительные.

Направление движения перигелия находится в тесной связи со знаком величин  $s_i$ . Так как величины  $s_i$  положительны, то отсюда следует, что среднее движение перигелия, если таковое имеет место, должно быть также положительным. Так как приближенно.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\Lambda} e \cos \pi, \\ \eta &= -\sqrt{\Lambda} e \sin \pi, \end{aligned} \right\}$$

то, в соответствии с (15),

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\Lambda_i} e_i \cos \pi_i &= \gamma_{i1} M_1 \cos (s_1 t + \beta_1) + \gamma_{i2} M_2 \cos (s_2 t + \beta_2) + \\ &+ \dots + \gamma_{in} M_n \cos (s_n t + \beta_n), \\ \sqrt{\Lambda_i} e_i \sin \pi_i &= \gamma_{i1} M_1 \sin (s_1 t + \beta_1) + \gamma_{i2} M_2 \sin (s_2 t + \beta_2) + \\ &+ \dots + \gamma_{in} M_n \sin (s_n t + \beta_n). \end{aligned} \right\} (17)$$

Эти уравнения дают

$$\Lambda_i e_i^2 = \gamma_{i1}^2 M_1^2 + \dots + \gamma_{in}^2 M_n^2 + \\ + 2 \sum \gamma_{ik} \gamma_{il} M_k M_l \cos [(g_k - g_l)t + \beta_k - \beta_l] \quad (18)$$

и

$$\operatorname{tg} \pi_i = \frac{\gamma_{i1} M_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + \dots + \gamma_{in} M_n \sin (g_n t + \beta_n)}{\gamma_{i1} M_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + \dots + \gamma_{in} M_n \cos (g_n t + \beta_n)}, \quad (19)$$

откуда можно вычислить  $e_i$  и  $\pi_i$ .

Из (18) следует с учетом уравнений (6) и (6\*), что уравнение

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_i e_i^2 = M_1^2 + M_2^2 + \dots + M_n^2 \quad (20)$$

дает для эксцентриситетов уже рассматривавшуюся теорему Лапласа об устойчивости планетной системы.

Тот факт, что существует среднее движение перигелия, по видимому, можно было бы вывести из (19) или (17). Такого доказательства в настоящее время нет, движение перигелиев подробно изучено только при специальных предположениях относительно коэффициентов, которые имеют важное значение для планетной системы. Важнейший из этих случаев тот, в котором один из коэффициентов  $\gamma_{ik} M_k$  больше суммы всех остальных. При этом предполагается, что все коэффициенты положительные. Предположим, например, что

$$|\gamma_{i1} M_1| > |\gamma_{i2} M_2| + \dots + |\gamma_{in} M_n|, \quad (21)$$

и тогда можно доказать, что перигелий обладает средним движением  $g_1$ . Действительно, из (17) получим

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\Lambda_i} e_i \cos (\pi_i - g_1 t - \beta_1) &= \gamma_{i1} M_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^n \gamma_{ik} M_k \cos [(g_k - g_1)t + \beta_k - \beta_1], \\ \sqrt{\Lambda_i} e_i \sin (\pi_i - g_1 t - \beta_1) &= \\ &= \sum_{k=2}^n \gamma_{ik} M_k \sin [(g_k - g_1)t + \beta_k - \beta_1], \end{aligned} \right\} (22*)$$

и, значит,

$$\operatorname{tg}(\pi - g_1 t - \beta_1) = \frac{\sum \gamma_{ik} M_k \sin[(g_k - g_1)t + \beta_k - \beta_1]}{\gamma_{i1} M_1 + \sum \gamma_{ik} M_k \cos[(g_k - g_1)t + \beta_k - \beta_1]}. \quad (22)$$

В силу неравенства (21) знаменатель в (22) никогда не будет равен нулю, а следовательно,  $\operatorname{tg}(\pi - g_1 t - \beta_1)$  никогда не обратится в бесконечность. Поэтому перигелий будет иметь среднее движение  $g_1$ . Из (22\*) находим, что  $\cos(\pi - g_1 t - \beta_1)$  имеет тот же знак, что и  $\gamma_{i1} M_1$ . Положим

$$\pi_i = g_1 t + \beta_1' + P, \quad (23)$$

где  $\beta_1' = \beta_1$ , если  $\gamma_{i1} M_1$  положительно, и  $\beta_1' = \beta_1 + 180^\circ$ , если  $\gamma_{i1} M_1$  отрицательно; тогда  $P$  всегда должно оставаться численно меньше  $90^\circ$ . Направление перигелия всегда уклоняется меньше чем на  $90^\circ$ , от направления, которое задается линией, образующей с осью  $X$  угол, равный  $g_1 t + \beta_1'$ .

Неравенство (21) выполняется для всех больших планет, которые обращаются вокруг Солнца, за исключением Земли и Венеры. Вероятно, эти планеты также обладают (положительным) средним движением, хотя здесь отклонения могут составлять более  $90^\circ$ .

Если неравенство (21) не выполнено, то рассмотрение проблемы оказывается не столь легким. Автор обязан К. Б. Каваллину (из Остерзунда) за интересные замечания, которые хотя и не решают окончательно проблему, но, по-видимому, указывают правильное направление в исследовании вопроса.

Положим

$$x = \pi_i, \quad y = \sqrt{\Lambda_i} e_i, \quad \Lambda_r = \gamma_{ir} M_r.$$

Умножая второе из уравнений (17) на  $\sqrt{-1}$  и складывая с первым, получим

$$y e^{x \sqrt{-1}} = \sum_{r=1}^n A_r e^{\sqrt{-1}(g_r t + \beta_r)}, \quad (24)$$

где  $t$  обозначает действительную независимую переменную, и  $A_r$ ,  $g_r$  и  $\beta_r$  суть действительные и постоянные величины. Затем можно предположить, что коэффициенты  $A_r$  отличны от нуля.

Каваллин относительно величин  $g_1, g_2, \dots, g_n$  делает предположение, что они являются рациональными числами; хотя это и не вполне законно, но все же оправдано, так как это предположение можно сделать приближенно, в частности, при числовых расчетах.

Предположим, что рациональные числа  $g$  можно записать в виде дробей с одним и тем же знаменателем; тогда

$$g_1 = \frac{m_1}{m}, \quad g_2 = \frac{m_2}{m}, \dots, g_n = \frac{m_n}{m}, \quad (25)$$

и положим, кроме того,

$$A'_r = A_r e^{V^{-1} \beta_r}, \quad (26)$$

так что

$$y = e^x V^{-1} = \sum_{r=1}^n A'_r e^{V^{-1} \frac{m_r}{m} t}. \quad (27)$$

Предположим, кроме того, что величины  $g_r$  различны и расположены так, что

$$g_1 > g_2 > \dots > g_n, \quad (28)$$

откуда

$$m_1 > m_2 > \dots > m_n. \quad (28^*)$$

Полагаем теперь

$$z = e^{\frac{V^{-1} t}{m}}; \quad (29^*)$$

тогда правая часть (27) может быть представлена в форме

$$\sum A'_r z^{m_r} = A'_1 z^{m_n} \left\{ z^{\mu_1} + \frac{A'_2}{A'_1} z^{\mu_2} + \dots + \frac{A'_n}{A'_1} \right\}, \quad (29)$$

так как  $A'_1$  отлично от нуля. Здесь

$$\mu_1 = m_1 - m_n, \quad \mu_2 = m_2 - m_n, \dots \quad (30)$$

и, значит, согласно (28)

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots$$

Если корни уравнения  $\mu_1$ -й степени

$$z^{\mu_1} + \frac{A'_2}{A'_1} z^{\mu_2} + \dots + \frac{A'_n}{A'_1} = 0, \quad (31)$$

из которых ни один не равен нулю, так как  $A'_n \neq 0$ , обозначить через

$$e^{\frac{V^{-1} \lambda_1}{m}}, \quad e^{\frac{V^{-1} \lambda_2}{m}}, \dots, e^{\frac{V^{-1} \lambda_n}{m}},$$

то будем иметь

$$\begin{aligned}
 ye^{V^{-1}x} &= A_1' e^{\frac{V^{-1}m_n t}{m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} \left( e^{\frac{V^{-1}t}{m}} - e^{\frac{V^{-1}\lambda_r}{m}} \right) = \\
 &= A_1' e^{\frac{V^{-1}m_n t}{m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} 2 \sqrt{-1} e^{\frac{V^{-1}(t+\lambda_r)}{2m}} \frac{\left[ e^{\frac{V^{-1}(t-\lambda_r)}{2m}} - e^{-\frac{V^{-1}(t-\lambda_r)}{2m}} \right]}{2 \sqrt{-1}}
 \end{aligned}$$

или

$$ye^{V^{-1}x} = (2 \sqrt{-1})^{\mu_1} A_1' e^{\frac{V^{-1}(2m_n + \mu_1)t}{2m} + \frac{V^{-1}\sum \lambda_r}{2m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} \sin \frac{t - \lambda_r}{2m}. \quad (32)$$

Вычисляя логарифмическую производную от обеих частей этого уравнения и принимая во внимание, что  $2m_n + \mu_1 = m_1 + m_n$ , получим

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} + \sqrt{-1} \frac{dx}{dt} = \sqrt{-1} \frac{m_1 + m_n}{2m} + \frac{1}{2m} \sum_{r=1}^{\mu_1} \operatorname{ctg} \frac{t - \lambda_r}{2m}. \quad (33)$$

Так как  $x$  и  $y$ , а также  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  — величины действительные, то для получения выражений для  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  необходимо отделить в правой части (33) действительные члены от мнимых. Полагая

$$\frac{1}{2m} \sum_{r=1}^{\mu_1} \operatorname{ctg} \frac{t - \lambda_r}{2m} = \varphi(t) + \sqrt{-1} \psi(t), \quad (34)$$

найдем, что  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  суть периодические функции периода  $2m\pi$ , и что  $\psi(t)$  всегда конечна. Из (33) и (34) следуют уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_1 + m_n}{2m} + \psi(t) = \frac{g_1 + g_2}{2} + \psi(t), \quad (35)$$

и

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \varphi(t). \quad (35^*)$$

Каваллин [36] отметил, что функцию  $\sum_{r=1}^n \operatorname{ctg} \frac{t - \lambda_r}{2m}$  можно разделить одним из многих методов, которые мы имеем в распоряжении для вычисления симметрической функции корней алгебраического уравнения, и затем можно найти  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , отделяя действительную и мнимую части функции.

Так как функция  $\psi(t)$  периодическая и никогда (для действительных значений  $t$ ) не может обратиться в бесконечность, то ее можно разложить в ряд Фурье. Отсюда следует, что перигелий обладает средним движением. Если через  $K_0$  обозначить постоянный член Фурье, то значение указанного среднего движения будет равно

$$\frac{g_1 + g_n}{2} + K_0.$$

### § 7. Вековые возмущения плоскостей орбит для произвольного числа планет

Рассмотрение вековых возмущений наклонности и долготы восходящего узла выполняется подобно тому, как в предыдущем параграфе были выполнены соответствующие исследования для эксцентриситета и долготы перигелия. Здесь из корней фундаментального уравнения один равен нулю, а все остальные корни отрицательны.

Если обозначить вековую часть возмущающей функции, которая зависит от наклонности, через  $[F]_2$ , то по § 2 будем иметь

$$[F]_2 = - \sum R''(p_i, p_j) - \sum R''(q_i, q_j), \quad (1)$$

где

$$R''(x_i, x_j) = \frac{1}{8} k^2 m_i m_j B_1(a_i, a_j) \left( \frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} - \frac{2x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right) \quad (2)$$

или

$$R''(x_i, x_j) = \frac{1}{8} k^2 m_i m_j B_1(a_i, a_j) \left( \frac{x_i}{\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \right)^2. \quad (2')$$

Отсюда непосредственно находим, что  $[F]_2$  представляет собой определенно отрицательную форму, и из этого заключаем, что корни фундаментального уравнения должны быть отрицательны или в крайнем случае равны нулю.

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} (i, j) &= \frac{1}{4} \frac{m_i m_j}{\Lambda_i} B_1(a_i, a_j), \\ |i, j| &= \frac{1}{4} m_i m_j \frac{B_1(a_i, a_j)}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \quad (i \neq j), \\ |i, j| &= -(i, 1) - (i, 2) - \dots - (i, n), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

то будем иметь

$$[F] = \frac{1}{2} \sum |i, j| (p_i p_j + q_i q_j). \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial [F]_2}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial [F]_2}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4^*)$$

Применяя ортогональное преобразование

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \gamma_{11}P_1 + \dots + \gamma_{1n}P_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_n &= \gamma_{n1}P_1 + \dots + \gamma_{nn}P_n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и, аналогично,

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \gamma_{11}Q_1 + \dots + \gamma_{1n}Q_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ q_n &= \gamma_{n1}Q_1 + \dots + \gamma_{nn}Q_n, \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

где коэффициенты связаны соотношениями (6) и (6\*) § 6, причем

$$[F]_2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sigma_r (P_r^2 + Q_r^2). \quad (4^{**})$$

Величины  $\sigma_r$  определяются из фундаментального уравнения

$$D(\sigma) = \begin{vmatrix} |1, 1| - \sigma & |1, 2| & \dots & |1, n| \\ |2, 1| & |2, 2| - \sigma & \dots & |2, n| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |n, 1| & |n, 2| & \dots & |n, n| - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты  $\gamma_{ir}$ , соответствующие корню  $\sigma_r$ , определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} (|1, 1| - \sigma_r) \gamma_{1r} + |1, 2| \gamma_{2r} + \dots + |1, n| \gamma_{nr} &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |n, 1| \gamma_{1r} + |n, 2| \gamma_{2r} + \dots + (|n, n| - \sigma_r) \gamma_{nr} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6^*)$$

Теперь докажем, что фундаментальное уравнение (6) имеет по крайней мере один корень, равный нулю.

Из (1) и (2\*) следует, что если положить

$$\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}} = \dots = \frac{p_n}{\sqrt{\Lambda_n}},$$

а также

$$\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}} = \dots = \frac{q_n}{\sqrt{\Lambda_n}}.$$

то  $[F]_2$  должно обратиться в нуль. Следовательно, для этой системы значений  $p_1/\sqrt{\Lambda_1}$  и т. д. сумма

$$\sum \sigma_i (P_i^2 + Q_i^2)$$

также должна обратиться в нуль, что возможно только, когда либо все  $P_i$  и  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) будут равны нулю, и в этом случае по (5) все  $p_i$  и  $q_i$  также обращаются в нуль, что не является необходимым, либо по крайней мере одна из величин  $\sigma_i$  обращается в нуль.

Если  $\sigma_1$  — тот корень, который равен нулю, то для  $p_i$  и  $q_i$  имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \gamma_{i1} N_1 \cos \delta_1 + \gamma_{i2} N_2 \cos (\sigma_2 t + \delta_1) + \dots \\ &\quad \dots + \gamma_{in} N_n \cos (\sigma_n t + \delta_n), \\ q_i &= -\gamma_{i1} N_1 \sin \delta_1 - \gamma_{i2} N_2 \sin (\sigma_2 t + \delta_2) - \dots \\ &\quad \dots - \gamma_{in} N_n \sin (\sigma_n t + \delta_n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким же путем, как и в предыдущем параграфе, приходим к заключению, что если один из коэффициентов, например,  $\gamma_{ir} N_r$ , численно больше суммы абсолютных величин остальных, то узел обладает средним движением  $\sigma_r$ . Если бы, в частности, было

$$|\gamma_{i1} N_1| > |\gamma_{i2} N_2| + \dots + |\gamma_{in} N_n|,$$

то среднее движение узла было бы равно нулю, и линия узлов периодически колебалась бы в плоскости  $XU$  около неподвижной линии. Следует заметить, что это возможно только тогда, когда в качестве основной плоскости используется плоскость, отличная от неизменяемой. Действительно, находим, что если орбиты отнесены к неизменяемой плоскости, первый член в (7) отсутствует, и в этом случае колебания около неподвижной линии более невозможны.

Отыщем те значения для  $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{n1}$ , которым соответствует корень  $\sigma = 0$ . Согласно (6\*) эти значения определяются уравнениями

$$|i, 1| \gamma_{11} + |i, 2| \gamma_{21} + \dots + |i, i| \gamma_{i1} + \dots + |i, n| \gamma_{n1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Но тогда, в соответствии с (3),

$$\sqrt{\Lambda_1} |i, 1| + \sqrt{\Lambda_2} |i, 2| + \dots + \sqrt{\Lambda_n} |i, n| = -\sqrt{\Lambda_i} |i, i|.$$

Эти уравнения удовлетворяются, если положить

$$\frac{\gamma_{11}}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{\gamma_{21}}{\sqrt{\Lambda_2}} = \dots = \frac{\gamma_{n1}}{\sqrt{\Lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma \Lambda}}. \quad (7^*)$$

Но тогда из (5) и (5\*) имеем

$$P_1 = \gamma_{11}p_1 + \dots + \gamma_{n1}p_n,$$

$$Q = \gamma_{11}q_1 + \dots + \gamma_{n1}q_n$$

или, подставляя вместо  $\gamma_{i1}$  их значения, получим

$$\sqrt{\Sigma\Lambda}P_1 = \sqrt{\Lambda_1}p_1 + \dots + \sqrt{\Lambda_n}p_n,$$

$$\sqrt{\Sigma\Lambda}Q_1 = \sqrt{\Lambda_1}q_1 + \dots + \sqrt{\Lambda_n}q_n.$$

Но

$$P_1 = N_1 \cos \delta,$$

$$Q_1 = -N_1 \sin \delta,$$

и, приближенно,

$$p_r = \sqrt{\Lambda_r} \sin i_r \cos \Omega_r,$$

$$q_r = -\sqrt{\Lambda_r} \sin i_r \sin \Omega_r,$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\Sigma\Lambda} N_1 \cos \delta_1 &= \Lambda_1 \sin i_1 \cos \Omega_1 + \dots + \Lambda_n \sin i_n \cos \Omega_n, \\ \sqrt{\Sigma\Lambda} N_1 \sin \delta_1 &= \Lambda_1 \sin i_1 \sin \Omega_1 + \dots + \Lambda_n \sin i_n \sin \Omega_n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Но с помощью (20) § 1 и (13) § 9 гл. V мы нашли, что наклонность  $\gamma$  и долгота восходящего узла  $\Pi$  определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma \cos \Pi &= \frac{1}{\Sigma\Lambda} \{ \Lambda_1 \sin i_1 \cos \Omega_1 + \Lambda_2 \sin i_2 \cos \Omega_2 + \\ &\quad + \dots + \Lambda_n \sin i_n \cos \Omega_n \}, \\ \operatorname{tg} \gamma \sin \Pi &= \frac{1}{\Sigma\Lambda} \{ \Lambda_1 \sin i_1 \sin \Omega_1 + \Lambda_2 \sin i_2 \sin \Omega_2 + \\ &\quad + \dots + \Lambda_n \sin i_n \sin \Omega_n \}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сравнивая эти формулы с (9), получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{N_1}{\Sigma\Lambda}, \quad \Pi = \delta_1, \quad (10)$$

поэтому постоянные  $N_1$  и  $\delta_1$  имеют простой геометрический смысл.

Если неизменяемая плоскость принята в качестве основной, то  $\gamma$ , а также и  $N_1$ , по (10) равны нулю, и первый член в (7) отсутствует.

Из сказанного очевидно, что с точки зрения механики наиболее естественно относить движение орбит к неизменяемой плос-

кости, и тогда выражения для элементов сводятся к наиболее простому виду. Это еще в большей мере свидетельствует о том, что в качестве плоскости  $XU$  в небесной механике следует использовать неизменяемую плоскость. Для этих целей пригодна такая плоскость, как плоскость средней эклиптики, обычно выбираемой в качестве основной, в силу того, что вековые возмущения планет не имеют значительных колебаний.

### § 8. Метод Якоби вычисления корней фундаментального уравнения

Фундаментальное уравнение для определения величин  $g_i$  и  $\sigma_i$ , по которым находятся средние движения перигеллов и узлов, является алгебраическим уравнением относительно  $g$  и  $\sigma$   $n$ -й степени, где  $n$  — число планет. Это алгебраическое уравнение дается в форме определителя с  $n^2$  элементами. Если этот определитель раскрыть обычным образом, то получим сумму  $n!$  членов, где каждый член состоит из  $n$  сомножителей. Если число планет велико, то вычислительная работа, необходимая для раскрытия определителя, очень большая. Если вычислять вековые возмущения восьми больших планет \*) планетной системы, то таким образом получили бы  $8! = 40320$  членов, каждый из которых состоит из восьми сомножителей. А так как некоторые из элементов определителя, а именно те, которые стоят на главной диагонали, состоят из двух слагаемых, то указанное число возрастет еще более, — вдвое, как отмечал Стокуелл. Уже только численные расчеты для этого уравнения «с трудом можно было бы преодолеть в течение одной человеческой жизни» (Стокуелл).

Для вычисления этих корней необходимо отыскать косвенный и более короткий путь. Астрономы для этого обычно пользовались методом, который подходит вследствие специфической формы нашей планетной системы, и заключается в том, что в первом приближении вековые возмущения внутренних и внешних планет могут быть вычислены отдельно. Хотя таким образом достигают правильного определения корней, метод все же нуждается в математическом обосновании и с точки зрения вычислений уступает методу Якоби, к изложению которого мы теперь перейдем.

Запишем в несколько измененной форме уравнения (11) § 6, изменяя знаки коэффициентов  $[i, j]$ , которые согласно (1) § 6

\*) Не учитывая Плутона. (Прим. ред.)

отрицательны,

$$\left. \begin{aligned} (s - [1, 1]) \gamma_1 + \dots + [1, i] \gamma_i + \dots \\ \qquad \qquad \qquad \dots + [1, k] \gamma_k + \dots + [1, n] \gamma_n = 0, \\ \dots \\ [i, 1] \gamma_1 + \dots + (s - [i, i]) \gamma_i + \dots \\ \qquad \qquad \qquad \dots + [i, k] \gamma_k + \dots + [i, n] \gamma_n = 0, \\ \dots \\ [k, 1] \gamma_1 + \dots + [k, i] \gamma_i + \dots \\ \qquad \qquad \qquad \dots + (s - [k, k]) \gamma_k + \dots + [k, n] \gamma_n = 0, \\ \dots \\ [n, 1] \gamma_1 + \dots + [n, i] \gamma_i + \dots \\ \qquad \qquad \qquad \dots + [n, k] \gamma_k + \dots + (s - [n, n]) \gamma_n = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тогда задача сведется к вычислению корней уравнения

$$D(s) = \begin{vmatrix} s - [1, 1] & [1, 2] & \dots & [1, n] \\ [2, 1] & s - [2, 2] & \dots & [2, n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [n, 1] & [n, 2] & \dots & s - [n, n] \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Этот определитель симметричен относительно главной диагонали, так как по (1) § 6

$$[i, j] = [j, i]. \quad (3)$$

Если бы все элементы определителя, которые стоят вне диагонали, были бы равны нулю, то корни (2) были бы просто равны  $[i, i]$  [ $i = 1, 2, \dots, n$ ]. Метод Якоби заключается в выборе соответствующего преобразования, в результате которого элементы, не стоящие на главной диагонали, уменьшаются, а отрицательные числа, расположенные на главной диагонали, сколько угодно близко приближаются к значениям корней.

Для этой цели заменим два коэффициента,  $\gamma_i$  и  $\gamma_k$ , двумя другими,  $P_i$  и  $P_k$ , при помощи подстановки

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &= P_i \cos \alpha - P_k \sin \alpha, \\ \gamma_k &= P_i \sin \alpha + P_k \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

оставляя неизменными остальные коэффициенты  $\gamma_r$ . В (4)  $\alpha$  — пока неопределенная величина.

Если рассмотреть  $i$ -й и  $k$ -й ряды и умножить первый на  $\cos \alpha$ , а второй на  $\sin \alpha$  и сложить, затем умножить  $i$ -й ряд на  $\sin \alpha$ , а  $k$ -й ряд на  $\cos \alpha$  и снова сложить, то получим следующие

преобразованные уравнения:

$$\begin{aligned} & ([i, 1] \cos \alpha + [k, 1] \sin \alpha) \gamma_1 + \dots + (s - [i, i']')P_i + \dots + \\ & \quad + [i, k]'P_k + \dots + ([i, n] \cos \alpha + [k, n] \sin \alpha) \gamma_n = 0, \\ & (-[i, 1] \sin \alpha + [k, 1] \cos \alpha) \gamma_1 + \dots + [k, i]'P_i + \dots + \\ & \quad + (s - [k, k]')P_k + \dots + (-[i, n] \sin \alpha + [k, n] \cos \alpha) \gamma_n = 0, \end{aligned}$$

где с учетом соотношений (3)

$$\left. \begin{aligned} [i, i]' &= [i, i] \cos^2 \alpha - 2[k, i] \sin \alpha \cos \alpha + [k, k] \sin^2 \alpha, \\ [k, k]' &= [i, i] \sin^2 \alpha + 2[k, i] \sin \alpha \cos \alpha + [k, k] \cos^2 \alpha, \\ [i, k]' &= [i, i] \cos \alpha \sin \alpha + [k, i] (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \\ & \quad - [k, k] \sin \alpha \cos \alpha, \\ [k, i]' &= [i, k]'. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Теперь распорядимся величиной  $\alpha$  так, чтобы новые коэффициенты  $[i, k]'$  обратились в нуль, для чего достаточно, чтобы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2[i, k]}{[k, k] - [i, i]}. \quad (6)$$

Согласно (5) имеем

$$\left. \begin{aligned} [i, i]' + [k, k]' &= [i, i] + [k, k], \\ [i, i]' - [k, k]' &= ([i, i] - [k, k]) \cos 2\alpha - 2[k, i] \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В силу (6) последнее уравнение можно записать в следующей форме:

$$[i, i]' - [k, k]' = -\frac{2[k, i]}{\sin 2\alpha},$$

или также

$$[i, i]' - [k, k]' = \frac{[i, i] - [k, k]}{\cos 2\alpha}.$$

Из этих уравнений, возводя их в квадрат и складывая, получим

$$\begin{aligned} & ([i, i]' + [k, k]')^2 + ([i, i]' - [k, k]')^2 \cos^2 2\alpha + \\ & + ([i, i]' - [k, k]') \sin^2 2\alpha = ([i, i] + [k, k])^2 + \\ & \quad + ([i, i] - [k, k])^2 + 4[k, i]^2 \end{aligned}$$

или, после надлежащих преобразований,

$$[i, i]'^2 + [k, k]'^2 = [i, i]^2 + [k, k]^2 + 2[k, i]^2. \quad (8)$$

Для всех других коэффициентов, которых затрагивает преобразование, имеют место уравнения

$$[i, j]'^2 + [k, j]'^2 = [i, j]^2 + [k, j]^2. \quad (9)$$

В результате фундаментальное уравнение (2) преобразуется к следующей форме:

$$D(s) = \begin{vmatrix} s - [1, 1]', & \dots, & [1, i]', & \dots, & [1, k]', & \dots, & [1, n]' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [i, 1]', & \dots, & s - [i, i]', & \dots, & *, & \dots, & [i, n]' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [k, 1]', & \dots, & *, & \dots, & s - [k, k]', & \dots, & [k, n]' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [n, 1]', & \dots, & [n, i]', & \dots, & [n, k]', & \dots, & s - [n, n]' \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где элементы, которые не подвергались преобразованию, сопровождаются сверху штрихом. Вместо элемента  $[k, i]'$ , который вследствие (6) обращается в нуль, в (10) стоит звездочка. Новый определитель также симметричен.

Между определителями (2) и (10) имеется существенное различие: сумма квадратов элементов, расположенных вне главной диагонали, в (10) будет меньше соответствующей суммы прежнего определителя на сумму квадратов  $[i, k]$  и  $[k, i]$ , т. е. на  $2 [k, i]^2$ , а сумма квадратов диагональных элементов на ту же величину возрастает. Под элементами, расположенными на диагонали, будем подразумевать те числа в (2) или (10), перед которыми стоит знак минус.

Это предположение вытекает непосредственно из уравнений (8) и (9), которые заключают в себе суть метода Якоби. Элементы  $i$ -й и  $k$ -й строк (соответственно столбцов) изменяются в результате преобразования, а остальные элементы им не затрагиваются.

Если сделать аналогичное преобразование новых элементов, то снова сумма квадратов внедиагональных элементов уменьшится на удвоенную сумму квадратов уничтожаемых элементов; путем повторного применения такого приема эту сумму можно сделать меньше сколь угодно малого наперед заданного числа. Естественно, что в приложениях всякий раз преобразованием выгодно уничтожать наибольший из встречающихся элементов, находящихся вне диагонали.

Преобразования продолжают до тех пор, пока числа, расположенные на главной диагонали, не будут достаточно близки к корням, о чем можно судить непосредственно по решению. Окончательное вычисление корней можно еще ускорить при помощи данного Якоби метода последовательных приближений.

Для того чтобы было более легко судить о методе, рассмотрим кратко два первых приближения в задаче, исследованной Якоби.

Данная система

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	-5",510	9,8655	9,1587	7,8700	7,2604	5,8767	4,2157
1	9,8655	-11",812	10,6955	9,0999	8,3566	6,9646	5,3191
2	9,1587	10,6955	-12",971	9,7529	8,7833	7,3812	5,7326
3	7,8700	9,0999	9,7529	-17",596	8,8878	7,4577	5,7989
4	7,2604	8,3566	8,7833	8,8878	-7",489	10,8790	9,0224
5	5,8767	6,9646	7,3812	7,4577	10,8790	-18",585	9,6439
6	4,2157	5,3191	5,7326	5,7989	9,0224	9,6439	-2",326

Отрицательные числа на диагонали выражены в секундах, для остальных указаны логарифмы.

Из приведенной таблицы видно, что наибольший элемент, расположенный вне диагонали, находится в четвертой строке и пятом столбце. Вторым по величине элемент мы находим в первой строке второго столбца. Все остальные элементы меньше единицы. Мы хотим получить преобразованную систему, в которой упомянутые элементы отсутствовали бы.

Чтобы уничтожить элемент (4, V), определим в соответствии с (6) вспомогательный угол  $\alpha$  так, чтобы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 [10,8790]}{18",585 - 7",489} = [10,1348],$$

откуда

$$\alpha = 26^\circ,88.$$

Отсюда получаем первую преобразованную систему:

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	-5",510	9,8655	9,1587	7,8700	7,2198	6,8787 <sub>n</sub>	4,2157
1	9,8655	-11",812	10,6955	9,0999	8,3158	7,9756 <sub>n</sub>	5,3191
2	9,1587	10,6955	-12",971	9,7529	8,7423	8,4031 <sub>n</sub>	5,7326
3	7,8700	9,0999	9,7529	-17",5962	8,8463	8,5100 <sub>n</sub>	5,7989
4	7,2198	8,3158	8,7423	8,8463	-3",653	*	9,4669
5	6,8787 <sub>n</sub>	7,9756 <sub>n</sub>	8,4031 <sub>n</sub>	8,5100 <sub>n</sub>	*	-22",421	9,5382
6	4,2157	5,3191	5,7326	5,7989	9,4669	9,5382	-2",3259

где на месте уничтоженных элементов стоит звездочка. Числа в четвертой и пятой строках (а, значит, также и в четвертом и пятом столбцах) изменились, остальные преобразованием не затронуты.

Уничтожим теперь элемент (2, I), используя вспомогательный угол  $\alpha = 41^\circ,67$ . Получим вторую преобразованную систему:

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	$-5'',510$	9,8088	9,5799	7,8700	7,2198	6,8787 <sub>n</sub>	4,2157
1	9,8088	$-7'',397$	*	9,6724	8,7175	8,3781 <sub>n</sub>	5,7117
2	9,5799 <sub>n</sub>	*	$-17'',385$	9,5304	18,4395	8,1009 <sub>n</sub>	5,4231
3	7,8700	9,6724	9,5304	$-17'',596$	8,8463	8,5100 <sub>n</sub>	6,7989
4	7,2198	8,7175	8,4395	8,8463	$-3'',653$	*	9,4669
5	6,8787 <sub>n</sub>	8,3781 <sub>n</sub>	8,1009 <sub>n</sub>	8,5100 <sub>n</sub>	*	$-22'',421$	9,5382
6	4,2157	5,7117	5,4231	5,7989	9,4669	9,5382	$-2'',326$

При следующем поближении следовало бы уничтожить элемент (0, I), который является здесь наибольшим.

Окончательные значения корней, полученных Якоби (числовые расчеты выполнены были Зейделем), суть

$$s_0 = 5'',299, \quad s_1 = 7'',574, \quad s_2 = 17'',152, \quad s_3 = 17'',863, \\ s_4 = 3'',715, \quad s_5 = 22'',427, \quad s_6 = 2'',258,$$

которые получены в результате десяти преобразований. Приведенные вычисления выполнены Якоби до открытия Нептуна и относятся к семи ранее известным планетам [37].

### § 9. Результаты Стокуелла о вековых возмущениях больших планет \*)

Результаты Стокуелла содержатся в «*Smithsonian Contributions to Knowledge*», vol. XVIII, 1870. Он исходит из следующих значений масс, больших полуосей и средних движений:

Меркурий . . . . .	$m^I = 1 : 4865751,$	$n^I = 5381016'',2,$	$a^I = 0,3870987$
Венера . . . . .	$m^{II} = 1 : 390000,$	$n^{II} = 2106641,438,$	$a^{II} = 0,7233323$
Земля . . . . .	$m^{III} = 1 : 368689,$	$n^{III} = 1295977,440,$	$a^{III} = 1,0000000$
Марс . . . . .	$m^{IV} = 1 : 2680637,$	$n^{IV} = 689050,9023,$	$a^{IV} = 1,5236878$
Юпитер . . . . .	$m^V = 1 : 1047,879,$	$n^V = 109256,719$	$a^V = 5,202798$
Сатурн . . . . .	$m^{VI} = 1 : 3501,6,$	$n^{VI} = 43996,127,$	$a^{VI} = 9,538852$
Уран . . . . .	$m^{VII} = 1 : 24905,$	$n^{VII} = 15424,5094,$	$a^{VII} = 19,183581$
Нептун . . . . .	$m^{VIII} = 1 : 18780,$	$n^{VIII} = 7873,993,$	$a^{VIII} = 30,03386$

Пусть  $e^I, e^{II}, e^{III}, \dots, \pi^I, \pi^{II}, \pi^{III} \dots$  обозначают эксцен-

\*) Подробные сведения о современном состоянии теории движения планет приводятся в книге Г. А. Чеботарева «Аналитические и численные методы небесной механики», Изд-во «Наука», 1965.

триситеты и долготы перигелиев, отнесенные к эклиптике и равноденствию 1850,0. Для эпохи 1850, 0 Стокуелл принимает следующие значения:

Меркурий . . . . .	$e^I = 0,2056179$	$\pi^I = 75^\circ 07' 0'',0$
Венера . . . . .	$e^{II} = 0,00684184$	$\pi^{II} = 129^\circ 28' 51'',7$
Земля . . . . .	$e^{III} = 0,01677120$	$\pi^{III} = 100^\circ 21' 41'',0$
Марс . . . . .	$e^{IV} = 0,0931324$	$\pi^{IV} = 333^\circ 17' 47'',8$
Юпитер . . . . .	$e^V = 0,0482388$	$\pi^V = 11^\circ 54' 53'',1$
Сатурн . . . . .	$e^{VI} = 0,0559956$	$\pi^{VI} = 90^\circ 06' 42'',0$
Уран . . . . .	$e^{VII} = 0,0462149$	$\pi^{VII} = 170^\circ 34' 17'',6$
Нептун . . . . .	$e^{VIII} = 0,00917396$	$\pi^{VIII} = 50^\circ 16' 39'',1$

Он дает вековые возмущения эксцентриситетов и долгот перигелиев в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} e^{(i)} \cos \pi^{(i)} &= M_1^{(i)} \cos (s_1 t + \beta_1) + M_2^{(i)} \cos (s_2 t + \beta_2) + \dots, \\ e^{(i)} \sin \pi^{(i)} &= M_1^{(i)} \sin (s_1 t + \beta_1) + M_2^{(i)} \sin (s_2 t + \beta_2) + \dots, \end{aligned} \right\} (1)$$

и получает для коэффициентов значения, приведенные в табл. I на стр. 304.

Например, для Юпитера имеем

$$\begin{aligned} e^V \cos \pi^V &= -0,0000090 \cos (5'',463803t + 88^\circ 0' 38'') + \\ &+ 0,0000106 \cos (7'',248427t + 20^\circ 50' 19'') + \\ &- 0,0000011 \cos (17'',014373t + 335^\circ 11' 31'') + \\ &+ 0,0000011 \cos (17'',784456t + 137^\circ 6' 36'') + \\ &+ 0,0000636 \cos (0'',616685t + 67^\circ 56' 35'') + \\ &+ 0,0019436 \cos (2'',727659t + 105^\circ 3' 53'') + \\ &+ 0,0431601 \cos (3'',716607t + 28^\circ 8' 46'') + \\ &+ 0,0156383 \cos (22'',460848t + 307^\circ 56' 50''). \end{aligned}$$

Если в (1) один из коэффициентов, скажем,  $M_r^{(i)}$ , численно больше суммы абсолютных величин остальных коэффициентов, то, как нам известно из § 6, перигелий будет обладать средним движением  $s_r$ . Кроме того, значение эксцентриситета обязательно заключено в границах

$$M_r - \sum_r' < l < M_r + \sum_r',$$

где  $\sum_r'$  обозначает сумму модулей всех коэффициентов за исключением  $M_r$ . На основании этой теоремы из табл. I Стокуелл делает следующие выводы относительно вековых возмущений эксцентриситетов и долгот перигелиев больших планет.

Для планеты Меркурий имеем:

Максимум  $e^I = \sum |M^I| = 0,2317185$ . Половина этой величины составляет  $0,1158593$ . Так как это число меньше  $M_1^I$ , то следует, что

Таблица I

	$r = 1$	2	3	4
$s_r$	+5",463 803	+7",248 427	17",014 373	17",784 456
$\beta_r$	88°0'38"	20°50'19"	+335°11'31"	+137°6'36",5
$M_r^I$	+0,1766 064	+0,0268 838	+0,0014 673	+0,0015 934
$M_r^{II}$	+0,0085 906	-0,0201 444	-0,0112 171	-0,0131 892
$M_r^{III}$	+0,0054 825	-0,0153 619	+0,0113 105	+0,0162 641
$M_r^{IV}$	+0,0008 418	-0,0025 451	+0,0225 719	-0,0790 650
$M_r^V$	-0,0000 090	+0,0000 106	-0,0000 011	+0,0000 011
$M_r^{VI}$	-0,0000 080	+0,0000 109	-0,0000 064	+0,0000 110
$M_r^{VII}$	+0,0000 035	-0,0000 027	+0,0000 004	-0,0000 006
$M_r^{VIII}$	+0,0000 001	-0,0000 001	+0,0000 000	-0,0000 000
	$r = 5$	6	7	8
$s_r$	0",616 685	2",727 659	3",716 607	22",460 848
$\beta_r$	67°56'35"	105°3'53"	28°8'46"	307°56'50"
$M_r^I$	+0,0000 077	+0,0005 685	+0,0244 939	-0,0000 975
$M_r^{II}$	+0,0000 117	+0,0005 571	+0,0166 053	+0,0003 175
$M_r^{III}$	+0,0000 136	+0,0005 832	+0,0163 413	-0,0023 780
$M_r^{IV}$	+0,0000 219	+0,007 765	+0,0187 954	-0,0150 371
$M_r^V$	+0,0000 636	+0,0019 436	+0,0431 601	+0,0156 383
$M_r^{VI}$	+0,0000 717	+0,0017 694	+0,0341 011	+0,0483 504
$M_r^{VII}$	+0,0015 578	+0,0297 330	-0,0448 614	+0,0018 058
$M_r^{VIII}$	+0,0100 389	+0,0029 105	+0,0014 205	+0,0001 365

$M_1^I$  будет больше суммы остальных коэффициентов, следовательно, перигелий Меркурия имеет среднее движение, равное  $s_1 = 5",463803$ , и делает полный оборот за 237197 лет. Минимальное значение эксцентриситета составляет 0,1214943.

Для планеты Венеры имеем:

Максимум  $e^{\text{II}} = \Sigma |M^{\text{II}}| = 0,0706329$ . Половина этой величины составляет 0,0353164. Так как ни один из коэффициентов  $M_1^{\text{II}}$ ,  $M_2^{\text{II}}$  и т. д. не превосходит этого числа (то следует, что перигелий орбиты Венеры не обладает средним движением и что минимальное значение эксцентриситета равно нулю).

Для Земли имеем:

Максимальное значение  $e^{\text{III}} = \Sigma |M^{\text{III}}| = 0,0677352$ . Половина  $e^{\text{III}}$  равна 0,0338676. Так как это число больше любого из коэффициентов  $M^{\text{III}}$ , то перигелий земной орбиты средним движением не обладает, и минимальное значение эксцентриситета равно нулю.

Для планеты Марса имеем:

Максимум  $e^{\text{IV}} = \Sigma |M^{\text{IV}}| = 0,1396547$ . Половина  $e^{\text{IV}}$  составляет 0,0698274. Так как это число меньше  $M_4^{\text{IV}}$ , то следует, что перигелий орбиты Марса имеет среднее движение, равное  $s_4$  или  $17'',784456$ , и что минимальное значение эксцентриситета составляет 0,0184753. Стокуелл замечает, что даже небольшое изменение принятого значения массы Земли вызвало бы заметные изменения границ эксцентриситета и значения среднего движения.

Для планеты Юпитера имеем:

Максимум  $e^{\text{V}} = \Sigma |M^{\text{V}}| = 0,0608274$ . Половина  $e^{\text{V}}$  равна 0,0304137. Так как это число меньше  $M_7^{\text{V}}$ , то перигелий орбиты Юпитера имеет среднее движение, равное  $s_7$  или  $3'',716607$ , и что минимальное значение эксцентриситета равно 0,0254928.

Для планеты Сатурна имеем:

Максимум  $e^{\text{VI}} = \Sigma |M^{\text{VI}}| = 0,0843289$ . Половина этой величины равна 0,0421644. Так как это число меньше чем  $M_8^{\text{VI}}$ , то следует, что перигелий орбиты Сатурна имеет среднее движение, равное  $s_8$  или  $22'',460848$ , и что минимальное значение эксцентриситета равно 0,0123719.

Для планеты Урана имеем:

Максимум  $e^{\text{VII}} = \Sigma |M^{\text{VII}}| = 0,0779652$ . Половина  $e^{\text{VII}}$  равна 0,0389826. Так как это число меньше  $M_7^{\text{VII}}$ , то следует, что перигелий орбиты Урана имеет среднее движение, равное  $s_7$  или  $3'',716607$ , и что минимальное значение эксцентриситета равно 0,0117576.

Для планеты Нептуна имеем:

Значение  $e^{\text{VIII}} = \Sigma |M^{\text{VIII}}| = 0,0145066$ . Половина  $e^{\text{VIII}}$  будет равна 0,0072533. Так как это число меньше чем  $M_5^{\text{VIII}}$ , то следует, что перигелий орбиты Нептуна обладает средним движением, равным  $s_5$  или  $0'',616685$ , и что минимальное значение эксцентриситета равно 0,0055712.

В приведенной сводке мы придерживались утверждения Стокуелла, что Венера и Земля не обладают средними движениями перигелиев. Это утверждение было заключено в скобки, так как в предыдущих параграфах мы видели, что этот вопрос следует считать открытым.

Из этого сопоставления следует интересное замечание, что средние движения орбит Урана и Юпитера одинаковы. Отсюда с помощью уравнений (17) и (19) § 6 можно сделать вывод, что долгота перигелия орбиты Юпитера периодически колеблется около значения  $s_7 t + \beta_7$ , а долгота перигелия орбиты Урана — около значения  $s_7 t + \beta_7 + 180^\circ$ . Из указанных уравнений можно также определить амплитуду этих колебаний; Стокуелл находит, что она для Юпитера составляет  $+24^\circ 10'$ , а для Урана  $\pm 47^\circ 33'$ . Долготы перигелиев орбит Юпитера и Урана могут, следовательно, сближаться самое большее на  $(180^\circ - 24^\circ 10' - 47^\circ 33') = 108^\circ 17'$ , и в среднем удалены друг от друга на  $180^\circ$ .

Переходя теперь к вековым возмущениям плоскостей орбит, установим сначала важное утверждение о различных формах выражений для возмущений при использовании различных основных плоскостей. Если выбор основной плоскости  $XU$  произволен, то согласно (7) § 7 вековые возмущения орбитальной плоскости задаются формулами

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \gamma_{r1} N_1 \cos \delta_1 + \gamma_{r2} N_2 \cos (\sigma_2 t + \delta_2) + \dots \\ &\quad \dots + \gamma_{rn} N_n \cos (\sigma_n t + \delta_n), \\ q_r &= -\gamma_{r1} N_1 \sin \delta_1 - \gamma_{r2} N_2 \sin (\sigma_2 t + \delta_2) + \dots \\ &\quad \dots + \gamma_{rn} N_n \sin (\sigma_n t + \delta_n), \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \sqrt{\Lambda_r} \sin i^{(r)} \cos \Omega^{(r)}, \\ q_r &= -\sqrt{\Lambda_r} \sin i^{(r)} \sin \Omega^{(r)}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

и, кроме того, было

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \sqrt{\Sigma \Lambda} \operatorname{tg} \gamma, \\ \delta_1 &= \Pi, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

где  $\gamma$  и  $\Pi$  обозначают соответственно наклонность и долготу узла неизменяемой плоскости относительно плоскости  $XU$ .

Но по (7\*) § 7 было

$$\gamma_{r1} = \sqrt{\frac{\Lambda_r}{\Sigma \Lambda}};$$

тогда формулы (а) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Lambda_r} \sin i^{(r)} \cos \Omega^{(r)} &= \sqrt{\Lambda_r} \operatorname{tg} \gamma \cos \Pi + \gamma_{r_2} N_2 \cos (\sigma_2 t + \delta_2) + \dots \\ &\dots + \gamma_{r_n} N_n \cos (\sigma_n t + \delta_n), \\ \sqrt{\Lambda_r} \sin i^{(r)} \sin \Omega^{(r)} &= \sqrt{\Lambda_r} \operatorname{tg} \gamma \sin \Pi + \gamma_{r_2} N_2 \sin (\sigma_2 t + \delta_2) + \dots \\ &\dots + \gamma_{r_n} N_n \sin (\sigma_n t + \delta_n). \end{aligned}$$

Так как третьими степенями наклонности мы пренебрегаем, то вместо  $\operatorname{tg} \gamma$  можно написать  $\sin \gamma$ ; одновременно несколько изменим обозначения (чтобы они стали более близкими к стокуелловым) и окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \sin i^{(r)} \cos \Omega^{(r)} &= \sin \gamma \cos \Pi + N_1^{(r)} \cos (\sigma_1 t + \delta_1) + \dots \\ &\dots + N_{n-1}^{(r)} \cos (\sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}), \\ \sin i^{(r)} \sin \Omega^{(r)} &= \sin \gamma \sin \Pi + N_1^{(r)} \sin (\sigma_1 t + \delta_1) + \dots \\ &\dots + N_{n-1}^{(r)} \sin (\sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  обозначают те корни фундаментального уравнения, которые отличны от нуля.

Выше мы предполагали, что плоскость ХУ выбрана произвольно. Если обозначить наклонность и долготу узла относительно

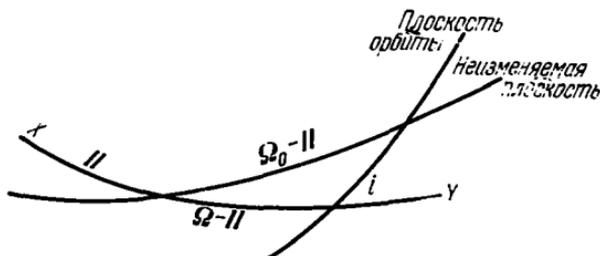


Рис. 22.

неизменяемой плоскости через  $i_0^{(r)}$  и  $\Omega_0^{(r)}$ , то для сферического треугольника, образованного плоскостью ХУ, неизменяемой плоскостью и орбитальной плоскостью, имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sin i_0 \sin (\Omega_0 - \Pi) &= \sin i \sin (\Omega - \Pi), \\ \sin i_0 \cos (\Omega_0 - \Pi) &= -\cos i \sin \gamma + \sin i \cos \gamma \cos (\Omega - \Pi). \end{aligned} \right\} \quad (e^*)$$

Если пренебречь третьими степенями наклонности, то, умножая уравнения соответственно на  $-\sin \Pi, \cos \Pi$  и на  $\cos \Pi$  и  $\sin \Pi$

и складывая, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin i_0^{(r)} \cos \Omega_0^{(r)} &= \sin i^{(r)} \cos \Omega^{(r)} - \sin \gamma \cos \Pi, \\ \sin i_0^{(r)} \sin \Omega_0^{(r)} &= \sin i^{(r)} \sin \Omega^{(r)} - \sin \gamma \sin \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Из (d) и (e) находим

$$\left. \begin{aligned} \sin i_0^{(r)} \cos \Omega_0^{(r)} &= N_1^{(r)} \cos(\sigma_1 t + \delta_1) + \dots \\ &\quad \dots + N_{n-1}^{(r)} \cos(\sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}), \\ \sin i_0^{(r)} \sin \Omega_0^{(r)} &= N_1^{(r)} \sin(\sigma_1 t + \delta_1) + \dots \\ &\quad \dots + N_{n-1}^{(r)} \sin(\sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Итак, мы пришли к замечательному результату: если говорить о вековых возмущениях, то выражения для  $\sin i \cos \Omega$  и  $\sin i \sin \Omega$ , где  $i$  и  $\Omega$  обозначают наклонность и долготу узла относительно произвольной плоскости  $XU$ , легко получаются из выражений для  $\sin i_0 \cos \Omega_0$  и  $\sin i_0 \sin \Omega_0$ , причем  $i_0$  и  $\Omega_0$  обозначают наклонность и долготу узла относительно неизменяемой плоскости. Это можно получить сложением последних величин  $\sin \gamma \cos \Pi$  и  $\sin \gamma \sin \Pi$  соответственно, где  $\gamma$  и  $\Pi$  обозначают наклонность и долготу узла неизменяемой плоскости относительно плоскости  $XU$ .

Стокуелл исходит из следующих значений для  $i^{(r)}$  и  $\Omega^{(r)}$ , отнесенных к средней эклиптике 1850,0:

Меркурий . . . . .	$i^I = 7^\circ 0' 8'',2$	$\Omega^I = 46^\circ 33' 3'',2$
Венера . . . . .	$i^{II} = 3^\circ 23' 34'',4$	$\Omega^{II} = 75^\circ 20' 42'',9$
Земля . . . . .	$i^{III} = 0^\circ 0' 0'',0$	$\Omega^{III} = 0^\circ 0' 0'',0$
Марс . . . . .	$i^{IV} = 1^\circ 51' 2'',3$	$\Omega^{IV} = 48^\circ 23' 36'',8$
Юпитер . . . . .	$i^V = 1^\circ 18' 40'',3$	$\Omega^V = 98^\circ 54' 20'',5$
Сатурн . . . . .	$i^{VI} = 2^\circ 29' 22'',4$	$\Omega^{VI} = 112^\circ 19' 20'',6$
Уран . . . . .	$i^{VII} = 0^\circ 46' 29'',9$	$\Omega^{VII} = 73^\circ 11' 11'',4$
Нептун . . . . .	$i^{VIII} = 1^\circ 47' 0'',9$	$\Omega^{VIII} = 130^\circ 7' 45'',3$

Для положения неизменяемой плоскости он выводит следующие значения постоянных  $\gamma$  и  $\Pi$  [при помощи уравнений (20) § 1 гл. V]:

$$\gamma = 1^\circ 35' 19'',376,$$

$$\Pi = 106^\circ 14' 6'',00.$$

Для наклонностей и долгот узлов планет из уравнений (e\*) он получает следующие значения:

Меркурий . . . . .	$i_0^I = 6^\circ 20' 58", 08$	$\Omega_0^I = 34^\circ 8' 11", 12$
Венера . . . . .	$i_0^{II} = 2^\circ 11' 13", 57$	$\Omega_0^{II} = 53^\circ 28' 14", 10$
Земля . . . . .	$i_0^{III} = 1^\circ 35' 19", 376$	$\Omega_0^{III} = 286^\circ 14' 6", 00$
Марс . . . . .	$i_0^{IV} = 1^\circ 40' 43", 70$	$\Omega_0^{IV} = 355^\circ 10' 27", 45$
Юпитер . . . . .	$i_0^V = 0^\circ 19' 59", 674$	$\Omega_0^V = 316^\circ 21' 41", 44$
Сатурн . . . . .	$i_0^{VI} = 0^\circ 55' 30", 924$	$\Omega_0^{VI} = 122^\circ 48' 32", 66$
Уран . . . . .	$i_0^{VII} = 1^\circ 1' 45", 27$	$\Omega_0^{VII} = 310^\circ 26' 39", 78$
Нептун . . . . .	$i_0^{VIII} = 0^\circ 43' 24", 845$	$\Omega_0^{VIII} = 32^\circ 54' 1", 10$

Для корней  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_7$  величин  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_7$  и коэффициентов  $N_r^{(4)}$  в формулах (f) Стокуелл получает значения, приводимые в табл. II.

Таким образом, например, для Ю п и т е р а:

$$\begin{aligned} \sin i_0^V \cos \Omega_0^V = & -0,0000252 \cos(-5^\circ 126112 t + 21^\circ 6' 26", 8) + \\ & + 0,0000095 \cos(-6", 592128 t + 132^\circ 40' 57", 8) - \\ & - 0,0000025 \cos(-17", 393390 t + 292^\circ 49' 53", 2) - \\ & - 0,0000001 \cos(-18", 408914 t + 251^\circ 45' 8", 6) + \\ & + 0,0011993 \cos(-0", 661666 t + 20^\circ 31' 24", 6) + \\ & + 0,0008794 \cos(-2", 916082 t + 133^\circ 56' 10", 8) + \\ & + 0,0063005 \cos(-25", 934567 t + 306^\circ 19' 21", 2). \end{aligned}$$

Из таблицы II получаются следующие выводы о вековых возмущениях наклонности и долготы узла относительно неизменяемой плоскости.

Для планеты М е р к у р и й:

Максимум  $\sin i_0^I = \sum |N_r^I| = 0,1595008$ , которому соответствует наклонность  $9^\circ 10' 41''$ . Половина этого числа равна 0,0797504. Так как она меньше чем  $N_1^I$ , то следует, что  $N_1^I$  больше суммы остальных коэффициентов, следовательно, долгота узла орбиты Меркурия на неизменяемой плоскости имеет среднее движение, равное  $\sigma_1$  или  $-5^\circ 126112$ . Минимальное значение наклонности составляет  $4^\circ 44' 27''$ .

Для В е н е р ы:

Максимум  $\sin i_0^{II} = 0,0570719$ , которому соответствует наклонность  $3^\circ 16' 18''$ . Так как ни один из коэффициентов  $N_r^{II}$  не превосходит половины указанного числа, то вопрос о среднем движении узла орбиты Венеры остается нерешенным.

Таблица II

	$r = 1$	2	3	4
$\sigma_r$	-5",126 112	-6",592 128	-17",393 390	-18",408 914
$\delta_r$	21°6'26",8	132°40'57",8	292°49'53",2	251°45'8",6
$N_r^I$	+0,1210 760	+0,0283 520	+0,0015 240	+0,0036775
$N_r^{II}$	+0,0148 670	-0,0078 380	-0,0084 783	-0,0224 278
$N_r^{III}$	+0,0106 500	-0,0063 210	+0,0069 546	+0,0244 768
$N_r^{IV}$	+0,0021 280	-0,0013 250	+0,0506 672	-0,0375 951
$N_r^V$	-0,0000 252	+0,0000 095	-0,0000 025	-0,0000 001
$N_r^{VI}$	-0,0000 320	+0,0000 134	-0,0000 214	-0,0000 006
$N_r^{VII}$	+0,0000 280	-0,0000 070	+0,0000 021	+0,0000 000
$N_r^{VIII}$	+0,0000 008	-0,0000 004	+0,0000 002	+0,0000 000

	$r=5$	6	7
$\sigma_r$	-0",661 666	-2",916 082	-25",934 567
$\delta_r$	20°31'24",6	133°56'10",8	306°19'21",2
$N_r^I$	+0,0014 778	+0,0031 283	-0,0002 652
$N_r^{II}$	+0,0013 568	+0,0018 108	-0,0002 932
$N_r^{III}$	+0,0013 291	+0,0016 228	-0,0027 275
$N_r^{IV}$	+0,0012 586	+0,0011 557	-0,0092 499
$N_r^V$	+0,0011 993	+0,0008 794	+0,0063 005
$N_r^{VI}$	+0,0011 577	+0,0007 180	-0,0156 928
$N_r^{VII}$	-0,0011 248	-0,0176 872	+0,0006 890
$N_r^{VIII}$	-0,0117 882	+0,0019 010	+0,0000 772

Для Земли:

Максимум  $\sin i_0^{III} = 0,0540818$ , которому соответствует наклонность  $3^{\circ}6'0''$ . Так как ни один из коэффициентов не превос-

ходит половины этого числа, то вопрос о значении среднего движения узла земной орбиты остается еще открытым.

Для планеты **М а р с**:

Максимум  $\sin i_0^{IV} = \Sigma |N_r^{IV}| = 0,1033795$ , что соответствует в наклонности  $5^{\circ}56'2''$ . Половина указанного числа составляет  $0,0516898$ . Так как ни один из коэффициентов  $N_1^{IV}$ ,  $N_2^{IV}$  и т. д. не больше этого числа, то вопрос о значении среднего движения узла орбиты Марса следует считать открытым.

Для планеты **Ю п и т е р**:

Максимум  $\sin i_0^V = \Sigma |N_r^V| = 0,0084165$ , которому соответствует максимальное значение наклонности к неизменяемой плоскости в  $0^{\circ}28'56''$ . Половина приведенного числа равна  $0,0042083$ . Так как это число меньше  $N_7^V$ , то следует, что узел орбиты Юпитера обладает средним движением, равным  $-25^{\circ}934567$ . Минимальное значение наклонности составляет  $0^{\circ}14'23''$ .

Для планеты **С а т у р н**:

Максимум  $\sin i_0^{VI} = \Sigma |N_r^{VI}| = 0,0176359$ , соответствующий наклонности в  $1^{\circ}0'39''$ . Половина указанного числа равна  $0,0088180$ . Так как это число меньше  $N_7^{VI}$ , то следует, что узел орбиты Сатурна обладает средним движением, равным  $\sigma_7$  или  $-25^{\circ}9346$ . Минимальное значение наклонности составляет  $0^{\circ}47'16''$ .

Для планеты **У р а н**:

Максимум  $\sin i_0^{VII} = \Sigma |N_r^{VII}| = 0,0195381$ , соответствующий наклонности в  $1^{\circ}7'10''$ . Половина указанного числа равна  $0,0097690$ . Так как это число меньше  $N_6^{VII}$ , то следует, что узел орбиты Урана обладает средним движением, равным  $\sigma_6$  или  $-2^{\circ}916082$ . Минимальное значение наклонности составляет  $0^{\circ}54'25''$ .

Для планеты **Н е п т у н**:

Максимум  $\sin i_0^{VIII} = \Sigma |N_r^{VIII}| = 0,0137678$ , соответствующий наклонности в  $0^{\circ}47'21''$ . Половина указанного числа равна  $0,0068839$ . Так как это число меньше  $N_5^{VIII}$ , то следует, что узел орбиты Нептуна обладает средним движением, равным  $\sigma_5$  или  $-0^{\circ}661666$ . Минимальное значение наклонности к неизменяемой плоскости составляет  $0^{\circ}33'43''$ .

Из сопоставления результатов явствует, что средние движения узлов орбит Юпитера и Сатурна на неизменяемой плоскости в точности равны, причем оба узла обладают обратным движением с годичной скоростью  $25^{\circ}934567$ . Это второй либрационный случай в планетной системе, обнаруженный Стокуеллом. Более подробное исследование на основе уравнений (22) и (23) § 6 показывает, что средние долготы восходящих узлов обеих этих орбит на неизменяемой плоскости разнятся друг от друга на  $180^{\circ}$ .

Вследствие периподических колебаний они могут сближаться самое большее до  $153^{\circ}15'$ , причем узел орбиты Юпитера может колебаться около своего среднего значения с амплитудой  $19^{\circ}38'$ , а узел орбиты Сатурна — с амплитудой  $7^{\circ}7'$ .

Узел орбиты Меркурия может отклоняться от своего среднего значения на  $18^{\circ}31'$ ; узлы орбит Урана и Нептуна — соответственно на  $6^{\circ}0'$  и  $9^{\circ}40'$ .

Относительно средних движений узлов и перигелиев орбит Венеры и Земли и равным образом относительно среднего движения узла орбиты Марса анализ Стокуелла представляется нам неуверенным. Как мы уже неоднократно отмечали, многое говорит о том, что такие средние движения также существуют и для этих планет, более того, положительные для перигелиев и отрицательные для узлов. На время от  $-300\ 000$  до  $+100\ 000$  года по формулам Стокуелла вычислены значения эксцентриситета и долготы перигелия земной орбиты (см. табл. III).

Из табл. III вытекает, что долгота перигелия земной орбиты подвержена большим колебаниям; при известных условиях она может обладать даже обратным движением, но в рассматриваемые годы наблюдается положительная скорость движения перигелия, которая в промежутке от  $-300\ 000$  до 0 года составляет примерно  $5'',5$  в год. В следующие  $100\ 000$  лет скорость будет еще больше. Отсюда никаких строгих выводов в математическом смысле слова о существовании среднего движения сделать нельзя. Повидимому, применение метода Каваллина здесь дало бы более точные сведения о движении.

В учебниках нередко отмечается, что перигелии всех планет обладают прямым движением, за исключением перигелия Венеры, который должен иметь обратное движение. Следует заметить, что это справедливо только в том случае, если использовать изложенные в § 3 методы, которые дают только движение перигелия, относящееся к моменту оскуляции начальных элементов. Возвращаясь назад всего лишь на  $1000$  лет, мы бы, наоборот, нашли для движения перигелия орбиты Венеры положительные значения. В ближайшие  $30\ 000$  лет перигелий этой орбиты будет иметь обратное движение (примерно на  $60^{\circ}$ ), но затем долгота перигелия снова начнет возрастать, и наиболее вероятно, что перигелий Венеры также обладает положительным движением. Вековые возмущения больших планет находят важное приложение в так называемой астрономической теории ледниковых периодов.

В своей работе Стокуелл приводит также числовые данные для вычисления влияния малых поправок в массах. Необходимые для этого формулы столь громоздки, что мы не имеем возможности здесь их приводить.

Таблица III

## Эксцентриситет и долгота перигелия Земли

Год	Эксцентриситет	Долгота перигелия	Год	Эксцентриситет	Долгота перигелия
-300 000	0,0373	-433°	-100 000	0,0408	-148°
-290 000	0,0337	-402	- 90 000	0,0392	-124
-280 000	0,0262	-373	- 80 000	0,0343	- 99
-270 000	0,0163	-355	- 70 000	0,0269	- 76
-260 000	0,0093	-377	- 60 000	0,0181	- 59
-250 000	0,0161	-403	- 50 000	0,0110	- 61
-240 000	0,0271	-388	- 40 000	0,0110	- 83
-230 000	0,0370	-366	- 30 000	0,0157	- 79
-220 000	0,0437	-340	- 20 000	0,0192	- 59
-210 000	0,0471	-315	- 10 000	0,0195	- 31
-200 000	0,0470	-291	0	0,0168	0
-190 000	0,0442	-269	+ 10 000	0,0115	+ 36
-180 000	0,0395	-244	+ 20 000	0,0055	+ 92
-170 000	0,0334	-232	+ 30 000	0,0049	+206
-160 000	0,0283	-222	+ 40 000	0,0077	+225
-150 000	0,0254	-218	+ 50 000	0,0134	+297
-140 000	0,0266	-214	+ 60 000	0,0145	+325
-130 000	0,0307	-206	+ 70 000	0,0134	+345
-120 000	0,0356	-190	+ 80 000	0,0113	+354
-110 000	0,0394	-170	+ 90 000	0,0110	+349
			+100 000	0,0143	+348

## § 10. Случай кратных корней фундаментального уравнения

Вековые возмущения больших планет определяются путем решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если имеется одна зависимая переменная, которая определяется линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, то, как известно, если фундаментальное уравнение имеет кратные корни, в решение входят члены, которые умножаются на независимую переменную и в силу этого неограниченно возрастают. Наоборот, если дана система совместных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то двойному корню фундаментального уравнения не всегда соответствует такой член, который пропорционален независимой переменной (Зеелигер доказал, что для случая, когда число планет равно



ц, следовательно, если это уравнение умножить на  $\frac{\partial D}{\partial [r, r]}$ , то

$$\frac{\partial D}{\partial [r, r]} D'(s) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial [i, i]} \frac{\partial D}{\partial [r, r]}, \quad (7)$$

где  $r$  может иметь произвольное значение. Так как теперь  $D = 0$ , то в силу (7) § 1 гл. I имеем симметричную форму

$$\frac{\partial D}{\partial [i, i]} \cdot \frac{\partial D}{\partial [r, r]} = \frac{\partial D}{\partial [i, r]} \frac{\partial D}{\partial [r, i]} = \left( \frac{\partial D}{\partial [i, r]} \right)^2.$$

Вместе с тем

$$\frac{\partial D}{\partial [r, r]} D'(s) = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D}{\partial [i, r]} \right)^2.$$

Из этого уравнения следует важный вывод. А именно, если  $s$  — двойной корень, то одновременно должны удовлетворяться уравнения

$$D(s) = 0, \quad D'(s) = 0.$$

Итак, из (7) непосредственно следует, что для двойного корня при всех значениях  $i$  и  $r$  будет

$$\frac{\partial D}{\partial [i, r]} = 0.$$

Таким образом, для двойного корня все миноры первого порядка равны нулю. Справедливо также и обратное утверждение, что если корень является простым, то не все миноры первого порядка могут обратиться в нуль.

Из (6) следует, что все миноры первого порядка вида  $\frac{\partial D}{\partial [i, i]}$  не могут одновременно обратиться в нуль, если  $D'(s) \neq 0$ . Из формулы

$$D''(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 D}{\partial [i, i] \partial [j, j]}$$

также следует, что для двойного корня [для которого  $D''(s) \neq 0$ ] все миноры второго порядка не могут обратиться в нуль, и т. д.

Если все корни простые, то, следовательно, не все определители вида  $\frac{\partial D}{\partial [i, i]}$  равны нулю. Предположив, что

$$\frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \neq 0,$$

из (4) получим следующее решение:

$$\frac{\gamma_{1v}}{\frac{\partial D(s_v)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{2v}}{\frac{\partial D(s_v)}{\partial [1, 2]}} = \dots = \frac{\gamma_{nv}}{\frac{\partial D(s_v)}{\partial [1, n]}} = \frac{1}{\sqrt{\sum \left( \frac{\partial D}{\partial [1, i]} \right)^2}},$$

$$v = 1, 2, \dots, n.$$

Сумму под квадратным корнем можно записать еще проще. А именно, так как  $D = 0$  (и определитель симметричен), то в силу § 1 гл. I

$$\left( \frac{\partial D}{\partial [1, i]} \right)^2 = \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \cdot \frac{\partial D}{\partial [i, i]}.$$

Поэтому имеем

$$\sum \left( \frac{\partial D}{\partial [1, i]} \right)^2 = \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial [i, i]} = - \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} D'(s).$$

Тогда полная система значений коэффициентов  $\gamma_{ij}$ , если все корни фундаментального уравнения различны, будет следующей:

$$\frac{\gamma_{11}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{21}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [2, 1]}} = \dots = \frac{\gamma_{n1}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial D(s_1)}{\partial [1, 1]} D'(s_1)}},$$

$$\frac{\gamma_{12}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{22}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [2, 1]}} = \dots = \frac{\gamma_{n2}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial D(s_2)}{\partial [1, 1]} D'(s_2)}},$$

.....

$$\frac{\gamma_{1n}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{2n}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [2, 1]}} = \dots = \frac{\gamma_{nn}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial D(s_n)}{\partial [1, 1]} D'(s_n)}}.$$

Если воспользоваться формулой (7) § 1 гл. I, то можно получить интересную форму для квадрата коэффициента  $\gamma_{ij}$ . А именно, с помощью указанной формулы получаем

$$D'(s_v) \gamma_{iv}^2 = - \frac{\partial D(s_v)}{\partial [i, i]}. \quad (8)$$

Если известны знаки коэффициентов  $\gamma_{ij}$ , то формула дает удобный способ вычисления этих коэффициентов в случае симметричной формы определителя.

Из (8) следует, что определители

$$\frac{\partial D(s_v)}{\partial [i, i]} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

должны быть одновременно либо положительны, либо отрицательны. Будучи сформулирована в общем виде, эта теорема утверждает, что если дан симметричный определитель с действительными элементами вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

и  $s$ , обозначает такую величину, для которой определитель обращается в нуль, то все миноры первого порядка вида  $\frac{\partial D(s_v)}{\partial a_{ii}}$  имеют один и тот же знак.

Если  $s_1$  обозначает двойной корень, то в соответствии со сказанным выше все миноры вида

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [i, i] \partial [j, j]}$$

не могут обратиться в нуль. Таким образом, предполагая, что

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \neq 0,$$

согласно (12) § 1 гл. I будем иметь формулу

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \gamma_{11} = \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \gamma_{1i} + \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} \gamma_{2i}, \quad (9)$$

которая также справедлива для  $i = 1$  и  $i = 2$ . Подставляя теперь из этого уравнения значения  $\gamma_{1i}$  в уравнение

$$\sum \gamma_{1i}^2 = 1,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \right)^2 &= \gamma_{11}^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \right)^2 + \gamma_{21}^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} \right)^2 + \\ &+ 2\gamma_{11}\gamma_{21} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, i]}. \quad (10) \end{aligned}$$

Если  $\gamma_{11}$  определено, то из этого уравнения получаем значение  $\gamma_{21}$ . Двойному корню соответствует бесчисленное множество коэффициентов  $\gamma$ . В этом и следует искать объяснение, почему при двойном корне должны появляться еще две постоянные интегрирования. Так как теперь все миноры первого порядка равны нулю, то можно использовать соотношение (7) § 1 гл. I для

миноров второго порядка, и следовательно,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \right)^2 &= \left( \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [2, 2]}}{\partial [1, i]} \right)^2 = \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [2, 2]}}{\partial [1, i]} \cdot \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [2, 2]}}{\partial [i, 1]} = \\ &= \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [2, 2]}}{\partial [1, 1]} \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [2, 2]}}{\partial [i, i]} = \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial [2, 2] \partial [i, i]}, \end{aligned}$$

и таким же образом

$$\left( \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} \right)^2 = \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [i, i]}.$$

Последнюю сумму в (10) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} &= - \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [2, i]} \quad [\text{по (6) § 1 гл. I}], \\ \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} &= \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [i, 2]} = - \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [i, 1]}, \\ \frac{\partial^2 D}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} &= \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [2, i]} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [i, 1]} = \\ &= \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [1, 2]}}{\partial [2, i]} \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [1, 2]}}{\partial [i, 1]} = \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [1, 2]}}{\partial [2, 1]} \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial [1, 2]}}{\partial [i, i]} = \\ &= \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [2, 1]} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [i, i]} = - \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [i, i]} \quad [\text{по (7) § 1 гл. I}], \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 D}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} &= - \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [i, i]}. \end{aligned}$$

Коэффициент  $\frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]}$ , по предположению, отличен от нуля, и поэтому на него можно везде поделить. Тогда соотношение (10) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} &= \gamma_{11}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 D}{\partial [2, 2] \partial [i, i]} + \gamma_{21}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [i, i]} - \\ &\quad - 2\gamma_{11}\gamma_{21} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial [i, i]}. \quad (11) \end{aligned}$$

Так как теперь

$$\frac{\partial D}{\partial s} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial [i, i]},$$

то эти формулы можно записать также следующим образом:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} + \gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 D}{\partial [2, 2] \partial s} - \gamma_{21}^2 \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial s} - 2\gamma_{11}\gamma_{21} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial s} = 0. \quad (12)$$

Из (12) выводятся следующие нормальные формы для коэффициентов  $\gamma_{11}$ :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{21} &= 0, \\ \gamma_{11}^2 &= - \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} : \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [2, 2] \partial s} \end{aligned} \right\} \alpha \quad (13)$$

Остальные коэффициенты даются формулой (9), которая теперь приобретает вид

$$\frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \gamma_{i1} = \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \gamma_{i1}. \quad (14)$$

Коэффициенты второй формы будем отличать от коэффициентов первой формы штрихом сверху:

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_{11} &= 0, \\ \gamma'_{21} &= - \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} : \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial s} \end{aligned} \right\} \beta \quad (15)$$

Остальные коэффициенты  $\gamma'$  определяются из следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \gamma'_{i1} = \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} \gamma'_{i1}. \quad (16)$$

Формы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые для краткости мы будем называть нормальными, в случае двойного корня вместе дают полное решение рассматриваемой задачи. Соответствующие интегралы дифференциальных уравнений составляются совместно с интегралами для других корней фундаментального уравнения, как сейчас мы это докажем.

Сначала обратимся к другой форме уравнений (14) и (16). Для квадратов коэффициентов  $\gamma$  получим следующие симметричные формулы:

С л у ч а й  $\alpha$ ):

$$\frac{\gamma_{i1}^2}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial [2, 2] \partial [i, i]}} = - \frac{1}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial [2, 2] \partial s}} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Д л я с л у ч а я  $\beta$ ):

$$\frac{\gamma'_{i1}{}^2}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [i, i]}} = - \frac{1}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial s}} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$





### § 11. Вековые возмущения малых планет

Под названием «малая планета» в небесной механике понимают тело, масса которого может быть положена равной нулю. Такое тело в своем движении испытывает влияние больших планет, но не оказывает никакого влияния как на движение последних, так и на движение других малых планет системы.

Если пользоваться каноническими координатами Якоби, то, очевидно, можно начало системы координат для малой планеты поместить либо в центральном теле (Солнце), либо в центре масс системы, состоящей из Солнца и произвольного числа больших планет. Можно также в качестве начала координат выбрать центр масс всей системы.

Здесь элементам Пуанкаре, которые мы применим при исследовании вековых возмущений малых планет, мы придадим несколько другое значение, отбросив множитель  $\beta$ , пропорциональный исчезающе малой массе планеты. Итак, положим

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{a}, \quad \lambda = l + \pi, \\ \xi &= \sqrt{2\Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2})} \cos \pi, \\ \eta &= -\sqrt{2\Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2})} \sin \pi, \\ p &= \sqrt{2\Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} \cos \Omega, \\ q &= -\sqrt{2\Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} \sin \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \Lambda}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \xi}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial p}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если, в частности, речь идет о вековых возмущениях, то можно положить

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= 0, & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \xi}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial p}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где приближенно,

$$\begin{aligned}
 [F] = & \frac{\beta}{2\mu\Lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^n km_i \left\{ \frac{1}{2} A_0(a, a_i) + \right. \\
 & + \frac{1}{8} B_1(a, a_i) \left( \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\Lambda} + \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\Lambda_i} \right) - \frac{1}{4} B_2(a, a_i) \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i}{\sqrt{\Lambda\Lambda_i}} - \\
 & \left. - \frac{1}{8} B_1(a, a_i) \left( \frac{p^2 + q^2}{\Lambda} + \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Lambda_i} \right) - \frac{1}{4} B_1(a, a_i) \frac{pp_i + qq_i}{\sqrt{\Lambda\Lambda_i}} \right\}; \quad (3^*)
 \end{aligned}$$

через  $M$  обозначена масса Солнца, а через  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — массы планет. Значения  $\beta$  и  $\mu$  зависят от выбора начала координатной системы.

Если положить

$$\left. \begin{aligned}
 (0, i)' &= \frac{km_i}{4\sqrt{M}\Lambda} B_1(a, a_i), \\
 [0, i]' &= \frac{km_i}{4\sqrt{M}\sqrt{\Lambda\Lambda_i}} B_2(a, a_i), \\
 [0, i]' &= \frac{km_i}{4\sqrt{M}\sqrt{\Lambda\Lambda_i}} B_1(a, a_i) \\
 & \quad (i = 1, 2, \dots, n),
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то дифференциальные уравнения для  $\xi, \eta, p$  и  $q$  приобретают вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dt} &= \eta \sum_{i=1}^n (0, i)' - \sum_{i=1}^n [0, i]' \eta_i, \\
 \frac{d\eta}{dt} &= -\xi \sum_{i=1}^n (0, i)' + \sum_{i=1}^n [0, i]' \xi_i, \\
 \frac{dp}{dt} &= -q \sum_{i=1}^n (0, i)' + \sum_{i=1}^n [0, i]' q_i, \\
 \frac{dq}{dt} &= p \sum_{i=1}^n (0, i)' - \sum_{i=1}^n [0, i]' p_i.
 \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

Величина  $\Lambda_i$  имеет здесь значение  $\Lambda_i = \sqrt{a_i^3}$ , и далее имеем

$$\xi_i = \sqrt{2\Lambda_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2}) \cos \pi_i, \text{ и т. д.}$$

Приведенные уравнения могут быть записаны в несколько более простой форме, если обе части уравнений разделить на  $\sqrt{\Lambda}$ . Если

ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} [\xi_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} \xi_r = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e_r^2})} \cos \pi_r \approx e_r \cos \pi_r, \\ [\eta_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} \eta_r = -\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e_r^2})} \sin \pi_r \approx -e_r \sin \pi_r, \\ [p_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} p_r = \sqrt{\sqrt{1 - e_r^2}(1 - \cos i_r)} \cos \Omega_r \approx \sin i_r \cos \Omega_r, \\ [q_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} q_r = -\sqrt{\sqrt{1 - e_r^2}(1 - \cos i_r)} \sin \Omega_r \approx -\sin i_r \sin \Omega_r \end{aligned} \right\} (6)$$

$(r = 0, 1, \dots, n),$

где  $\Lambda = \Lambda_0$ ,  $\xi = \xi_0$  и т. д., и далее

$$\left. \begin{aligned} (0, i) &= \frac{km_i}{4\Lambda\sqrt{M}} B_1(a, a_i), \\ [0, i] &= \frac{km_i}{4\Lambda\sqrt{M}} B_2(a, a_i) \end{aligned} \right\} (6^*)$$

$(i = 1, 2, \dots, n),$

то, очевидно, вместо (5) и (5\*) получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[\xi]}{dt} &= [\eta] \sum_{i=1}^n (0, i) - \sum_{i=1}^n [0, i] [\eta_i], \\ \frac{d[\eta]}{dt} &= -[\xi] \sum_{i=1}^n (0, i) + \sum_{i=1}^n [0, i] [\xi_i] \end{aligned} \right\} (7)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[p]}{dt} &= -[q] \sum_{i=1}^n (0, i) + \sum_{i=1}^n (0, i) [q_i], \\ \frac{d[q]}{dt} &= [p] \sum_{i=1}^n (0, i) - \sum_{i=1}^n (0, i) [p_i], \end{aligned} \right\} (7^*)$$

которые следует положить в основу вычисления вековых возмущений.

Здесь, как и при вычислении вековых возмущений больших планет, можно воспользоваться двумя способами. В первом способе, становясь на точку зрения собственно теории возмущений, подставим в правые части (7) и (7\*) истинные значения элементов, относящиеся к эпохе оскуляции, вследствие чего правые части примут постоянные значения, что непосредственно даст значения вековых изменений элементов. Второй способ состоит

в точном интегрировании уравнений. Оба метода успешно используются также и для малых планет. Так как периоды вековых возмущений в этом случае намного короче, чем это было в случае больших планет, то выражения для возмущений, получаемые при помощи первого метода, дают хорошее приближение к истинным значениям возмущений только на сравнительно коротких интервалах времени, и в связи с этим тригонометрическая форма возмущений может быть выгодна также с практической точки зрения. Поэтому мы рассмотрим только последний метод.

Сначала запишем коэффициенты  $(0, i)$  и  $[0, i]$  в наиболее подходящей для численных расчетов форме. Имеем  $k\sqrt{M} = n\Lambda^3$ , где  $n$  — среднее движение малой планеты. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} (0, i) &= \frac{1}{4} \frac{m_i}{M} naB_1(a, a_i), \\ [0, i] &= \frac{1}{4} \frac{m_i}{M} naB_2(a, a_i), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $aB_1$  и  $aB_2$  зависят только от отношения  $a$  к  $a_i$ . Ранее мы вывели формулы, удобные для вычисления этих величин [(9) § 3].

Из теории вековых возмущений больших планет выражения для  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $p_i$  и  $q_i$  известны. В обозначениях § 9 имеем

$$\left. \begin{aligned} [\xi_i] &= M_1^{(i)} \cos(s_1 t + \beta_1) + \dots + M_n^{(i)} \cos(s_n t + \beta_n), \\ [\eta_i] &= -M_1^{(i)} \sin(s_1 t + \beta_1) - \dots - M_n^{(i)} \sin(s_n t + \beta_n), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$\left. \begin{aligned} [p_i] &= N_1^{(i)} \cos(\sigma_1 t + \delta_1) + \dots + N_n^{(i)} \cos(\sigma_n t + \delta_n), \\ [q_i] &= -N_1^{(i)} \sin(\sigma_1 t + \delta_1) - \dots - N_n^{(i)} \sin(\sigma_n t + \delta_n). \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

Величины  $s_1, s_2, \dots, s_n$  все были положительны, а величины  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  — все отрицательны. Значения коэффициентов  $M$  и  $N$ , а также значения  $s_i, \sigma_i, \beta_i$  и  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) для планетной системы были указаны в названном параграфе.

Если подставить значения (9) и (9\*) в (7) и (7\*), то эти уравнения примут следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[\xi]}{dt} &= b[\eta] + \sum_{r=1}^n E_r \sin(s_r t + \beta_r), \\ \frac{d[\eta]}{dt} &= -b[\xi] + \sum_{r=1}^n E_r \cos(s_r t + \beta_r), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[p]}{dt} &= -b[q] - \sum_{r=1}^n F_r \sin(\sigma_r t + \delta_r), \\ \frac{d[q]}{dt} &= b[p] - \sum_{r=1}^n F_r \cos(\sigma_r t + \delta_r), \end{aligned} \right\} \quad (10^*)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^n (0, i), \\ E_r &= \sum_{i=1}^n [0, i] M_r^{(i)}, \\ F_r &= \sum_{i=1}^n (0, i) N_r^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} [\xi] &= A \cos(bt + B) + \sum_{r=1}^n \frac{E_r}{b - s_r} \cos(s_r t + \beta_r), \\ [\eta] &= -A \sin(bt + B) - \sum_{r=1}^n \frac{E_r}{b - s_r} \sin(s_r t + \beta_r), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} [p] &= C \cos(-bt + D) + \sum_{r=1}^n \frac{F_r}{[b + \sigma_r]} \cos(\sigma_r t + \delta_r), \\ [q] &= -C \sin(-bt + D) - \sum_{r=1}^n \frac{F_r}{[b + \sigma_r]} \sin(\sigma_r t + \delta_r). \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

Здесь  $A, B, C, D$  обозначают постоянные интегрирования.

Величины  $[0, i]$  и  $(0, i)$  зависят только от расстояния планеты от Солнца. В силу (11) это имеет место также и для величин  $b, E_r$  и  $F_r$ . Уравнения (12) показывают, что коэффициенты в решении, за исключением первого члена, имеют определенные значения для любого расстояния до Солнца. Исследуем их поведение более подробно при различных значениях этого расстояния.

Коэффициенты  $B_i (a, a_i)$  согласно (8) § 2 определяются следующей формулой:

$$B_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a a_i \cos i\varphi d\varphi}{[a^2 + a_i^2 - 2a a_i \cos \varphi]^{3/2}}.$$

По определению, они имеют конечные и положительные значения для любого  $a$ , за исключением  $a = a_1$ . При  $a = a_i$  значения этих коэффициентов равны бесконечности.

Отсюда следует, что  $b$ ,  $E_r$  и  $F_r$  при каждом значении  $a$  также конечны, за исключением значений  $a = a_1, a = a_2, \dots, a = a_n$ , для которых эти величины становятся бесконечно большими. Если на оси абсцисс отложить значения  $a$ , а на оси ординат — соответствующие им значения величин  $b$ ,  $E_r$  или  $F_r$ , то полученные таким образом кривые будут асимптотически приближаться с обеих сторон к прямым  $a = a_1, a = a_2, \dots, a = a_n$ .

Коэффициенты

$$\frac{E_r}{b - s_r}, \quad \frac{F_r}{b + \sigma_r}$$

для этих расстояний получают конечные значения. Так как величины  $b$ ,  $E_r$  и  $F_r$  становятся бесконечно большими одновременно, то получим

$$\lim_{a \rightarrow a_i} \frac{E_r}{b - s_r} = M_r^{(i)}, \quad \lim_{a \rightarrow a_i} \frac{F_r}{b + \sigma_r} = N_r^{(i)},$$

так что, в то время как большая полуось орбиты малой планеты стремится к большой полуоси большой планеты  $m_i$ , выражения для вековых возмущений элементов асимптотически приближаются к следующим значениям:

$$[\xi] = A \cos(bt + B) + \sum_{r=1}^n M_r^{(i)} \cos(s_r t + \beta_r),$$

$$[\eta] = -A \sin(bt + B) - \sum_{r=1}^n M_r^{(i)} \sin(s_r t + \beta_r),$$

$$[p] = C \cos(-bt + D) + \sum_{r=1}^n N_r^{(i)} \cos(\sigma_r t + \delta_r),$$

$$[q] = -C \sin(-bt + D) - \sum_{r=1}^n N_r^{(i)} \sin(\sigma_r t + \delta_r),$$

или, если вспомнить выражения (9) и (9\*),

$$[\xi] = A \cos(bt + B) + [\xi_i],$$

$$[\eta] = -A \sin(bt + B) + [\eta_i],$$

$$[p] = C \cos(-bt + D) + [p_i],$$

$$[q] = -C \sin(-bt + D) + [q_i],$$

то для упомянутых малых планет с точностью до произвольного члена  $A \cos(bt + B)$ ,  $A \sin(bt + B)$  и т. д. получим такие же

выражения для вековых возмущений элементов, как для больших планет  $m_1$ .

Хотя для расстояний, которые совпадают с расстояниями больших планет, все коэффициенты в аналитических выражениях для вековых возмущений малых планет конечны, отсюда еще не вытекает, что орбиты малых планет для таких значений следует считать устойчивыми.

Как будет показано, величина  $b$  в произвольном члене, которая в среднем совпадает со значением среднего движения перигелия и средним значением попятного движения узла, будет для указанных расстояний бесконечно большой, и средние движения перигелия и узла неограниченно возрастают, если эти расстояния стремятся друг к другу. Таким образом, можно представить, что имеет место разрушение таких планетных орбит, для которых благодаря быстрому движению перигелия и узла должно в скором времени произойти соударение с большой планетой или по крайней мере настолько тесное сближение с ней, что орбита малой планеты претерпит полное изменение. Само собой разумеется, что при этом периодические возмущения также должны играть большую роль, или даже главную.

Коэффициенты в выражениях для вековых возмущений становятся бесконечно большими, если расстояние от центрального тела имеет такое значение, что  $b$  становится равным одной из величин  $s_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) или  $-\sigma_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ). Этот случай более подробно мы исследуем в следующем параграфе.

Величины  $[0, i]$ ,  $(0, i)$  и  $b$  были затабулированы Нореном и Раабом [41]. Из их таблиц мы извлечем сводку значений  $b$  для нашей планетной системы.

Таблица IV

$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$
1,60	32",681	2,60	49",319	3,60	158",086
1,70	22,752	2,70	54,744	3,70	182,125
1,80	23,094	2,80	60,864	3,80	211,477
1,90	24,816	2,90	67,797	3,90	247,832
2,00	27,114	3,00	75,692	4,00	293,620
2,10	29,814	3,10	84,734	4,10	352,416
2,20	32,882	3,20	95,160	4,20	429,665
2,30	36,327	3,30	107,263	4,30	533,994
2,40	40,180	3,40	121,425		
2,50	44,490	3,50	138,146		

Подставим в (12) и (12\*) значения

$$\begin{aligned} [\xi] &= e \cos \pi, & [p] &= \sin i \cos \Omega, \\ [\eta] &= -e \sin \pi, & [q] &= -\sin i \sin \Omega, \end{aligned}$$

и воспользуемся обозначениями

$$G_r = \frac{E_r}{b - s_r}, \quad H_r = \frac{F_r}{b + \sigma_r};$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} e \cos \pi &= A \cos (bt + B) + \sum G_r \cos (s_r t + \beta_r), \\ e \sin \pi &= A \sin (bt + B) + \sum G_r \sin (s_r t + \beta_r), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sin i \cos \Omega &= C \cos (-bt + D) + \sum H_r \cos (\sigma_r t + \delta_r), \\ \sin i \sin \Omega &= C \sin (-bt + D) + \sum H_r \sin (\sigma_r t + \delta_r). \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

Постоянные интегрирования  $A, B, C, D$  определим следующим образом. Полагая  $t = 0$ , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} A \cos B &= e_0 \cos \pi_0 - \sum G_r \cos \beta_r, \\ A \sin B &= e_0 \sin \pi_0 - \sum G_r \sin \beta_r, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} C \cos D &= \sin i_0 \cos \Omega_0 - \sum H_r \cos \delta_r, \\ C \sin D &= \sin i_0 \sin \Omega_0 - \sum H_r \sin \delta_r, \end{aligned} \right\} \quad (14^*)$$

где  $e_0, \pi_0, i_0$  и  $\Omega_0$  обозначают значения элементов малой планеты для  $t = 0$ .

Теперь, как легко обнаружить, величины  $G_r$  и  $H_r$  будут в общем того же самого порядка, как эксцентриситеты и наклонности больших планет. Далее из (14) и (14\*) следует, что  $A$  и  $C$  имеют порядок эксцентриситета и наклонности малой планеты. Так как последние в среднем заметно больше соответствующих величин для больших планет, то отсюда следует, что для большей части планет  $A$  и  $C$  больше, чем  $G_r$  и  $H_r$ , а более подробное исследование показывает, что для многих малых планет справедливы неравенства

$$|A| > \sum |G_r|, \quad (15)$$

$$|C| > \sum |H_r|. \quad (15^*)$$

Отсюда можно получить интересные следствия. Если выполняются неравенства (15) и (15\*), то из анализа § 6 известно, что  $\lambda$  должно обладать средним движением  $b$ , а  $\Omega$  — средним движением  $-b$ . Среднее движение перигелия малой планеты и среднее

движение узла на неизменяемой плоскости суть величины, равные  $b$ . Среднее движение перигелия прямое, а среднее движение узла — обратное.

Так как по (14) и (14\*) коэффициенты  $A$  и  $C$  можно выбрать положительными, то будут иметь место уравнения

$$\begin{aligned}\pi &= bt + B + P_1, \\ \Omega &= -bt + D + P_2,\end{aligned}$$

где  $P_1$  и  $P_2$  обозначают периодические члены, которые численно меньше  $90^\circ$ .

Если не принимать во внимание астероид (433) Эрот, орбита которого расположена внутри орбиты Марса, то известные астероиды находятся на расстояниях от 1,95 а. е. до 4,30 а. е. от Солнца \*). Самая внутренняя планета — (434) Венгрия, большая полуось которой  $a$  равна 1,946, и самая внешняя малая планета (279) Туле с  $a = 4,263$ . Поэтому из табл. IV находим, что  $b$  лежит между  $25,82$  и  $488,26$ . Следовательно, в основном средние движения перигелия и узла для малых планет значительно больше, чем соответствующие значения для больших планет. Из табл. IV очевидно, что  $b$  принимает наименьшее значение между Юпитером и Марсом. Минимум имеет место при  $a = 1,73$  а. е. и составляет  $22,55$ .

Иначе ведут себя те планеты, для которых неравенство (15) или (15\*) не выполняется. Если, в частности, одна из величин  $G_r$ , скажем,  $G_7$ , которая обозначает максимальный коэффициент в большей части области, будет по своему числовому значению больше суммы абсолютных величин остальных коэффициентов, включая и  $A$ , так что

$$|G_7| > A + \Sigma' |G_r|, \quad (16)$$

то по § 6 перигелий должен обладать средним движением, равным  $s_7$ . Тогда, как говорят, имеет место либрация между малой планетой и Юпитером. Имеем, далее,

$$\pi = s_7 t + \beta_7 + P_3 \quad (16^*)$$

или

$$\pi = s_7 t + \beta_7 + P_4 + 180^\circ, \quad (16^{**})$$

где  $P_3$  и  $P_4$  суть периодические функции, меньшие  $90^\circ$ , причем формула (16\*) справедлива при  $G_7 > 0$ , а формула (16\*\*), наоборот, при отрицательных значениях  $G_7$ . Из § 9 известно, что

\*) К настоящему времени область средних расстояний расширилась. (Прим. перев.)

для Юпитера имеет место уравнение \*)

$$\pi^V = s_7 t + \beta_7 + P_5,$$

и, следовательно, среднее положение перигелия малой планеты для всех значений времени будет совпадать со средним положением перигелия Юпитера, если  $G_7$  положительно, и наоборот, среднее положение перигелия малой планеты будет совпадать со средним положением афелия Юпитера, если  $G_7$  имеет отрицательное значение. Для всех известных к настоящему времени малых планет, за исключением, вероятно, только (433) Эрот,  $G_7$  положительно.

Для малых планет, расположенных достаточно близко к Марсу, при некоторых условиях может иметь место также либрация с Сатурном, представляющая собой для небесной механики замечательный случай.

Подобные рассуждения справедливы и относительно среднего движения узла. Как уже известно из § 9, имеет место либрация в узле для Юпитера и Сатурна. Это либрационное движение может иметь место и для малых планет. Мы исследуем этот случай в следующем параграфе.

Из выполненного автором анализа [42], к которому мы сейчас перейдем, следует ожидать либрацию в перигелии (с Юпитером) для следующих планет:

(40) Гармония	(215) Энона
(117) Ломия	(286) Икля
(147) Протогеня	(292) Людовика
(189) Фтия	(300) Геральдина
(196) Филомела	(338) Будроза
(205) Марта	(357) Нинпина

Не исключено, что либрация имеет место также и для некоторых других планет. Для выяснения того, как обстоит дело с указанными планетами, необходимо вычислить коэффициенты  $G_1, G_2, \dots, G_n$  (табл. V) и постоянные интегрирования  $A$  и  $B$ . Для этой цели можно воспользоваться таблицами Ньюкома [43]. Находим, что коэффициенты  $G_6, G_7, G_8$  наибольшие. Если пренебречь остальными коэффициентами, то для названных планет получим значения для  $G_6, G_7, G_8$ , кроме того, по (14) вычисляем постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  (см. табл. VI).

Находим, что для этих планет коэффициент  $G_7$  больше  $A$ , а также больше и всех других коэффициентов. Для трех астероидов (147) Протогеня, (189) Фтия и (205) Марта  $G_7$  больше суммы других коэффициентов. Следовательно, эти три планеты обладают

\*) Под  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) мы понимаем периодическую функцию, численно меньшую  $90^\circ$ .

Таблица V

$a$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
2,2	+0,000 079	-0,000 162	+0,000 352	-0,000 597
2,3	+0,000 052	-0,000 109	+0,000 209	-0,000 343
2,4	+0,000 033	-0,000 073	+0,000 131	-0,000 203
2,5	+0,000 020	-0,000 050	+0,000 085	-0,000 126
2,6	+0,000 011	-0,000 034	+0,000 056	-0,000 081
2,7	+0,000 004	-0,000 022	+0,000 038	-0,000 054
2,8	-0,000 001	-0,000 014	+0,000 026	-0,000 037
2,9	-0,000 004	-0,000 008	+0,000 018	-0,000 025
3,0	-0,000 007	-0,000 004	+0,000 012	-0,000 017
3,1	-0,000 009	$\pm 0,000 000$	+0,000 008	-0,000 012
3,2	-0,000 011	+0,000 002	+0,000 006	-0,000 008

$a$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$
2,2	+0,000 049	+0,001 679	+0,024 174	+0,023 044
2,3	+0,000 051	+0,001 741	+0,024 960	+0,019 984
2,4	+0,000 053	+0,001 802	+0,025 743	+0,018 043
2,5	+0,000 055	+0,001 862	+0,026 523	+0,016 735
2,6	+0,000 057	+0,001 922	+0,027 299	+0,015 817
2,7	+0,000 059	+0,001 980	+0,028 070	+0,015 162
2,8	+0,000 061	+0,002 038	+0,028 837	+0,014 688
2,9	+0,000 063	+0,002 096	+0,029 598	+0,014 346
3,0	+0,000 065	+0,002 153	+0,030 355	+0,014 104
3,1	+0,000 067	+0,002 209	+0,031 107	+0,013 935
3,2	+0,000 069	+0,002 265	+0,031 854	+0,013 831

либрацией в долготе перигелия, т. е. долготы перигелиев этих трех планет никогда не отклоняются больше чем на  $90^\circ$  от долготы перигелия Юпитера. Здесь среднее движение перигелия равно  $s_7$  или  $3^{\circ}717$ , в то время как для других планет, которые находятся на том же расстоянии от Солнца, среднее движение равно  $b$  и, стало быть, значительно больше. Что касается остальных из указанных планет, то значения средних движений их перигелиев, если таковые вообще существуют, предварительно следует считать неизвестными. Во всяком случае они не совпадают с  $b$ .

Таблица VI

	$\varphi$	$\pi$	$\alpha$	$G_0$
(40) Гармония . . . . .	2°,67	0°,90	2,267	+0,00172
(117) Ломия . . . . .	1,53	38,19	2,993	+0,00215
(147) Протогеней . . . . .	2,04	13,98	3,136	+0,00223
(189) Фтия . . . . .	2,07	9,40	2,452	+0,00183
(196) Филомела . . . . .	1,18	-48,78	3,116	+0,00221
(205) Марта . . . . .	1,92	24,58	2,780	+0,00203
(215) Энона . . . . .	2,02	-20,70	2,766	+0,00202
(286) Икклея . . . . .	0,71	26,60	3,196	+0,00226
(292) Людовика . . . . .	1,61	-29,13	2,530	+0,00188
(300) Геральдина . . . . .	2,44	-34,73	3,209	+0,00227
(338) Будроза . . . . .	1,21	35,04	2,913	+0,00210

	$G_1$	$G_2$	$A$	$b$
(40) Гармония . . . . .	+0,02470	+0,02083	+0,01292	37",08
(117) Ломия . . . . .	+0,03030	+0,01412	+0,01729	74,93
(147) Протогеней . . . . .	+0,03137	+0,01389	+0,00380	88,10
(189) Фтия . . . . .	+0,02615	+0,01730	+0,00650	42,27
(196) Филомела . . . . .	+0,03123	+0,01392	+0,02477	86,11
(205) Марта . . . . .	+0,02868	+0,01477	+0,01151	59,44
(215) Энона . . . . .	+0,02858	+0,01483	+0,01545	58,56
(286) Икклея . . . . .	+0,03182	+0,01383	+0,02548	94,50
(292) Людовика . . . . .	+0,02676	+0,01643	+0,01702	45,78
(300) Геральдина . . . . .	+0,03193	+0,01382	+0,02971	95,94
(338) Будроза . . . . .	+0,02970	+0,01431	+0,01943	68,61

## § 12. Вековые возмущения малых планет (продолжение)

Выше мы уже обратили внимание на то, что коэффициенты  $G_r$  становятся бесконечными, когда расстояние от Солнца имеет такое значение, что для него величина  $b$  будет равна  $s_r$ ; точно так же  $H_r$  будет бесконечной, если  $b$  будет равно  $-\sigma_r$ . Мы установили, что между Марсом и Юпитером  $b$  принимает минимальное значение  $b_m = 22,55$ . Так как  $s_r$  равно  $22,46$ , и никакое из  $s_r$  не принимает большего значения, то коэффициенты  $G_r$  между

Марсом и Юпитером никогда не могут стать бесконечно большими. С членами в наклонности дело обстоит иначе. Здесь  $\sigma_7 = -25,93$ , и, стало быть, численно больше  $b_m$ . Знаменатель в  $H_7$  может, следовательно, обратиться в нуль, и, как следует из результатов Норена и Рааба [41], это имеет место, когда расстояние от Солнца равно 1,951 а. е.

Такое расстояние, для которого знаменатель в коэффициенте  $H_7$  или  $G_7$  уничтожается, назовем критическим. Если бы в возмущающей функции рассматривались только члены второго порядка, то получили бы результат, что для этих критических расстояний вековые возмущения становятся бесконечно большими.

Дело обстоит иначе, если в возмущающей функции учитываются члены высших порядков. Ниже покажем, что для этих критических расстояний вековые возмущения имеют конечные значения. Однако вместе с тем обнаруживаем, что критическое расстояние является особой точкой, в окрестности которой возмущения не возрастают неограниченно, но все же могут принимать весьма большие значения, где, кроме того, коэффициенты  $H_7$  скачком изменяют свои значения с отрицательных на положительные.

Если принимать во внимание члены третьего порядка и положить

$$\left. \begin{aligned} x &= \operatorname{tg} i \sin \Omega, \\ y &= \operatorname{tg} i \cos \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

то получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + y [b - c(x^2 + y^2)] &= \sum F_s \cos(\sigma_s t + \delta_s), \\ \frac{dy}{dt} - x [b - c(x^2 + y^2)] &= - \sum F_s \sin(\sigma_s t + \delta_s), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем здесь

$$c = \sum \frac{3m_i n \alpha^3}{32} (2b_{i/2}^{(0)} + b_{i/2}^{(2)}), \quad (2^*)$$

где  $b_{i/2}^{(0)}$  и  $b_{i/2}^{(2)}$  суть коэффициенты Лапласа, которые определяются следующими разложениями в ряды:

$$a_i^{2s} (a^2 - 2aa_i \cos \varphi + a_i^2)^{-s} = \frac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos \varphi + b_s^{(2)} \cos 2\varphi + \dots$$

Нет необходимости находить общее решение (2). Достаточно рассмотреть поведшие решения в окрестности критического расстояния, и для этой цели нужно найти только частное реше-

ние, которое при  $c = 0$  совпадает с выражением (12\*) предыдущего параграфа.

Если через  $\sigma$  обозначить ту величину, которая обуславливает критический член в решении, то достаточно рассмотреть следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + y [b - c(x^2 + y^2)] &= F \cos(\sigma t + \delta), \\ \frac{dy}{dt} - x [b - c(x^2 + y^2)] &= -F \sin(\sigma t + \delta). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Очевидно, что эти уравнения допускают частное решение

$$\left. \begin{aligned} x &= K \sin(\sigma t + \delta), \\ y &= K \cos(\sigma t + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и здесь на коэффициент  $K$  можно наложить условие, что он должен непрерывно стремиться к предельному значению  $F : (b + \sigma)$ , когда  $c$  стремится к нулю.

Из обоих уравнений (3) мы получим одно и то же уравнение для  $K$ , а именно:

$$\sigma K + K(b - cK^2) = F. \quad (5)$$

Величины  $b$ ,  $c$  и  $F$  суть известные функции от расстояния малой планеты до Солнца.

Для такого значения расстояния  $a$ , при котором

$$\sigma + b = 0,$$

т. е. в точке, которая названа критической, из (5) получим

$$K = -\sqrt[3]{\frac{F}{c}}. \quad (6)$$

Видим, что в этой точке  $K$  имеет конечное и определенное значение.

Однако здесь нет необходимости искать особую точку. Вернее сказать, она получается, когда  $a$  имеет такое значение, что уравнение (5) обладает двойным корнем. Если положить

$$\frac{b + \sigma}{3c} = \kappa, \quad -\frac{F}{2c} = \lambda, \quad (7^*)$$

то уравнение для определения  $K$  примет вид

$$K^3 - 3\kappa K - 2\lambda = 0. \quad (7)$$

Последнее уравнение имеет двойной корень, если  $\lambda^2 = \kappa^3$ .

Обозначим через  $a_0$  значение  $a$ , для которого выполняется это уравнение. Если теперь  $a > a_0$ , то  $\kappa^3 > \lambda^2$ , и все корни (7) суть действительные и различные. Если, наоборот,  $a < a_0$ , то  $\kappa^3 < \lambda^2$ , и уравнение (7) имеет только один действительный корень.

Теперь установим, что один из трех действительных корней в предыдущем случае стремится к  $F : (b + \sigma)$ , когда  $c$  стремится к нулю.

Три корня даются формулой

$$K = 2 \sqrt{\kappa} \cos \frac{\theta + 2p\pi}{3} \quad (p = 0, 1, 2), \quad (8)$$

где

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^3}}. \quad (8^*)$$

Если через  $\theta_0$  обозначить наименьшее положительное значение, которое получается для  $\theta$  из уравнения (8\*), то для корней  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  имеем значения

$$K_1 = 2 \sqrt{\kappa} \cos \frac{\theta_0}{3},$$

$$K_2 = 2 \sqrt{\kappa} \cos \left( \frac{\theta_0}{3} + 120^\circ \right),$$

$$K_3 = 2 \sqrt{\kappa} \cos \left( \frac{\theta_0}{3} + 240^\circ \right).$$

Так как знак  $F$  может быть выбран произвольно, то всегда можно предполагать, что  $\theta_0 < 90^\circ$ .

Рассмотрим теперь значения этих корней при нулевом значении  $c$ . Из формул для  $\kappa$  и  $\lambda$  следует, что  $\cos \theta$  равен нулю, если  $c$  принимает нулевое значение, и для малых значений  $c$  имеем

$$\theta_0 = 90^\circ - f \sqrt{c},$$

где  $f$  обозначает положительную и конечную величину.

Далее следует, что при  $c$ , стремящемся к нулю,  $K_1$  и  $K_2$  неограниченно возрастают, и что

$$\lim_{c \rightarrow 0} K_3 = \frac{F}{b + \sigma}.$$

Итак, для представления величины  $K$  при  $a > a_0$  нужно выбрать корень  $K_3$ . В то время как  $a$  стремится к значению  $a_0$ ,  $\theta_0$  стремится к нулевому значению, а  $K_3$  приближается к предельному значению  $-\sqrt{\kappa}$  или, что то же самое, к  $-\sqrt[3]{\lambda}$ .

Если, наоборот, рассматривать единственный действительный корень, удовлетворяющий при  $a < a_0$  уравнению (7), то

для него имеем значение

$$K = [\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \kappa^3}]^{1/2} + [\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \kappa^3}]^{1/2}. \quad (9)$$

В частности, при  $a = a_0$  ( $\lambda^2 = \kappa^3$ ) получаем

$$K = 2\sqrt[3]{\lambda}.$$

Итак, в окрестности особой точки  $a_0$  коэффициент  $K$  обладает следующим замечательным свойством:

Для  $a < a_0$  коэффициент  $K$  имеет значение (9), которое при  $a = a_0$  переходит в  $K = 2\sqrt[3]{\lambda}$ ; в то время как  $a$  переходит через значение  $a_0$ ,  $K$  меняет знак и, кроме того, уменьшается вдвое. Для  $a > a_0$  коэффициент  $K$  определяется формулой

$$K = 2\sqrt{\kappa} \cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^\circ\right), \quad (10)$$

где через  $\theta$  обозначен наименьший положительный угол, который удовлетворяет уравнению

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\kappa^3}}. \quad (10^*)$$

Таким образом, коэффициент  $K$  в особой точке терпит разрыв (непрерывности).

Чтобы применить эти результаты к планетной системе, нужно найти числовые значения величин  $F$ ,  $b$  и  $c$ . Из таблицы Ньюкома имеем для  $F_7$  следующие значения:

Таблица VII

$a$	$F_7$	$a$	$F_7$
2,2	-0",1753	2,8	-0,3456
2,4	-0,2192	3,0	-0,4209
2,6	-0,2733	3,2	-0,5467

Здесь мы выбрали для  $F$  отрицательный знак, чтобы получить положительное значение  $\lambda$ .

Особая точка, как мы скоро обнаружим, находится на расстоянии  $a_0 = 2,05$ . Из табл. VII находим, что без заметной ошибки можно положить  $F = -0,15$ , и это значение было использовано при вычислении  $\kappa$  и  $\lambda$ . Были приняты во внимание только возмущения от Юпитера и Сатурна и были получены значения  $b$  и  $c$  в окрестности особой точки (табл. VIII).

Таблица VIII

$a$	$b$	$c$	$b + \sigma_7$
1,821	21",54	21",58	-4",39
1,873	22 ,80	23 ,61	-3 ,13
1,925	24 ,15	26 ,04	-1 ,78
1,977	25 ,54	28 ,61	-0 ,39
2,029	27 ,00	31 ,39	+1 ,07
2,081	28 ,52	34 ,41	+2 ,59
2,131	30 ,10	37 ,67	+4 ,17
2,183	31 ,76	41 ,17	+5 ,83

Здесь  $\sigma_7$  принято равным  $-25",93$ .

При  $a = 1,99$  а. е. получаем  $b + \sigma_7 = 0$ . Это именно то расстояние, о котором Лаверье писал [44]: «Между Юпитером и Солнцем имеется место, характеризующееся тем, что если туда попадет малая планета, которая движется по орбите с малой наклонностью, то она удалится от своей первоначальной орбиты и приобретет большую наклонность относительно плоскости орбиты Юпитера вследствие возмущений от последнего и возмущений от Сатурна». Если учесть члены третьего порядка, то это утверждение изменится, поскольку, во-первых, рассматриваемая точка будет лежать несколько дальше от Солнца (мы найдем, что особой точке будет соответствовать  $a_0 = 2,05$  а. е.), во-вторых, изменения наклонности будут лежать в довольно узких пределах. Для  $\kappa$  и  $\lambda$  получим значения, приведенные в табл. IX.

Таблица IX

$a$	$\kappa$	$\lambda$	$\lambda^2 - \kappa^2$
1,821	-0,0678	+0,00348	+0,0003 239
1,873	-0,0442	+0,00318	+0,0000 964
1,925	-0,0228	+0,00288	+0,0000 201
1,977	-0,0045	+0,00262	+0,0000 070
2,029	+0,0114	+0,00239	+0,0000 042
2,081	+0,0251	+0,00218	-0,0000 110
2,131	+0,0367	+0,00199	-0,0000 463
2,183	+0,0472	+0,00182	-0,0001 019

Таблица X

$a$	$K_2$	$K_1$	$K_3$
1,821	+0,0340		
1,873	+0,0472		
1,925	+0,0774		
1,977	+0,1470		
2,029	+0,2334		
2,081	-0,0610	+0,2997	-0,2388
2,131	-0,0364	+0,3493	-0,3130
2,183	-0,0258	+0,3877	-0,3627

Положение особой точки непосредственно находится из последнего столбца таблицы. Соответствующее значение  $a$  будет  $a_0 = 2,05$  а. е. Находим, что эта точка не совпадает с критической, хотя и мало удалена от нее. Значения  $K$ , соответствующие особой точке  $a_0$ , суть

$K = -0,1326$  и  $K = +0,2652$ .

Последнее значение соответствует наклонности в  $14,8$ , если первоначальная наклонность планетной орбиты равна нулю.

Значения  $K$  в окрестности особой точки в соответствии с формулами (9) и (10) приведены в табл. X.

На рис. 23 приводится график, который дает ясное представление о характере решений в окрестности особой точки.

Просматривая список малых планет, находим два астероида, которые лежат в окрестности этой особой точки. Первая из них — весьма интересная планета (434) Венгрия, находящаяся на расстоянии  $a = 1,946$  а. е. от Солнца, а с другой стороны от особой точки находится планета 1893 С, которая обладает круговыми элементами и которая после своего открытия более никогда не наблюдалась.

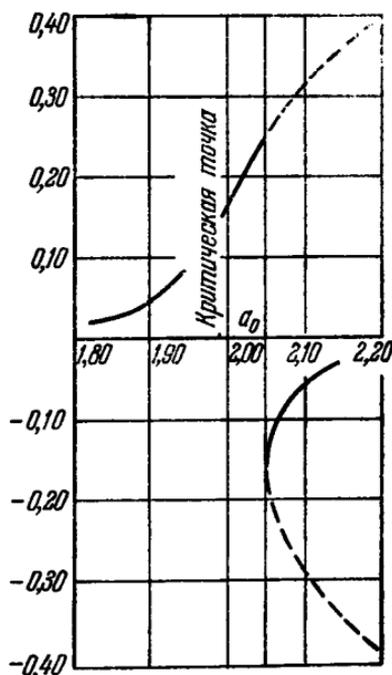


Рис. 23.

**Пример.** Применим приведенные рассуждения к планете (434) Венгрия, учитывая при этом только влияние планет Юпитера и Сатурна. Если взять только три члена, то вековые возмущения от Юпитера и Сатурна будут согласно § 9 выражаться следующими формулами:

$$\begin{aligned} 4: \quad \sin i_0^V \cos \Omega_0^V &= 0,001199 \cos (-0,6617t + 20^\circ 31') + \\ &+ 0,000879 \cos (-2,9161t + 133^\circ 56') + \\ &+ 0,006301 \cos (-25,9346t + 306^\circ 19'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}: \quad \sin i_0^{VI} \cos \Omega_0^{VI} &= 0,001158 \cos (-0,6617t + 20^\circ 31') - \\ &- 0,000718 \cos (-2,9161t + 133^\circ 56') - \\ &- 0,015693 \cos (-25,9346t + 306^\circ 19'). \end{aligned}$$

Далее, отсюда вычисляем значения  $F_5$ ,  $F_6$  и  $F_7$ . Они, в соответствии с (11) § 11, даются формулой

$$F_r = \sum (0, i) N_r^{(i)}.$$

Для коэффициентов  $(0, i)$  из таблиц Норена и Рааба ( $a = 1,9466$ ) получим значения

$$(0,5) = 23,765, \quad (0,6) = 0,9382$$

и отсюда

$$F_5 = 0,0296, \quad F_6 = 0,0202, \quad F_7 = 0,1350,$$

так что дифференциальные уравнения (2) запишутся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + y [b - c(x^2 + y^2)] &= 0,0296 \cos (-0,6617t + 20^\circ 31') + \\ &+ 0,0202 \cos (-2,9161t + 133^\circ 56') - \\ &- 0,1350 \cos (-25,9346t + 126^\circ 19'), \\ \frac{dy}{dt} + x [b - c(x^2 + y^2)] &= -0,0296 \sin (-0,6617t + 20^\circ 31') - \\ &- 0,0202 \sin (-2,9161t + 133^\circ 56') + \\ &+ 0,1350 \sin (-25,9346t + 126^\circ 19'). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь, чтобы получить для  $\lambda$  положительное значение, изменен знак последнего члена и одновременно уменьшен аргумент на  $180^\circ$ . Без большой ошибки значение  $c$  можно взять из приведенных таблиц. В этом случае получаем:  $c = 27,14$ . Небольшие ошибки в  $b$  сильно сказываются на результате, и поэтому эту величину лучше вычислить по точной формуле

$$b = \sum_{i=1}^8 (0, i),$$

учитывающей также влияние остальных планет, из коих Марс и Земля дают в  $b$  заметные поправки. Получаем  $(0,4) = 0,43$  и  $(0,3) = 0,51$ . Учтявая все планеты, из таблиц Норена и Рааба [41] получаем  $b = 25,834$ .

Если при интегрировании уравнений (11) пренебречь членами третьего порядка, то решение выразится в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin \Omega &= C \sin (-bt + D) + \\ &\quad + 0,00118 \sin (-0,6617t + 20^\circ 31') + \\ &\quad + 0,00088 \sin (-2,9161t + 133^\circ 56') + \\ &\quad + K \sin (-25,9346t + 126^\circ 19'), \\ \operatorname{tg} i \cos \Omega &= C \cos (-bt + D) + \dots, \end{aligned} \right\} (12)$$

где  $K = +1,350$ , и в наклонности получим возмущение, которое составляет более  $53^\circ$ . Так как различие в  $b$  и  $-\sigma_7$  составляет всего лишь  $0,100$ , то этот результат следует рассматривать как совершенно иллюзорный.

Обозначим через  $K$  истинное значение коэффициента в последнем члене в выражении (12); согласно (7) имеем

$$K^3 - 3\kappa K - 2\lambda = 0.$$

Из (7\*) для  $\kappa$  и  $\lambda$  получим значения  $\kappa = -0,001228$ ;  $\lambda = 0,002487$ .

Так как  $\lambda^2$  больше  $\kappa^3$ , то уравнение для  $K$  имеет один действительный корень, который можно вычислить при помощи (9).

Так как в этом случае  $\kappa$  весьма мало, то для вычисления достаточно воспользоваться формулой

$$K = \sqrt[3]{2\lambda} = -\sqrt[3]{\frac{F}{c}}.$$

Это дает значение  $K = +0,1707$ , которое почти в восемь раз меньше значения, полученного из членов первого порядка.

Остается еще упомянуть об определении постоянных интегрирования  $C$  и  $D$ . Из таблиц Псиландера [45] элементов малых планет, отнесенных к неизменяемой плоскости, получаем

$$i_0 = 22^\circ,01, \quad \Omega_0 = 178^\circ,29,$$

где долгота узла отнесена к эклиптике и равноденствию 1900,0. Величины Стокуелла относятся к эпохе и равноденствию 1850,0, и поэтому в (12) нужно подставить  $t = 50$ . Находим

$$C = +0,3283, \quad D = 203^\circ,16$$

и для малой планеты (434) Венгрия, пренебрегая членами с множителями 0,00118 и 0,00086, будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin \Omega = 0,3289 \sin (-25,834t + 202,53) + \\ + 0,1707 \sin (-25,935t + 125,97), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \cos \Omega = 0,3289 \cos (-25,834t + 202,53) + \\ + 0,1707 \cos (-25,935t + 125,97). \end{aligned}$$

Итак, для этой планеты либрации с Юпитером и Сатурном нет. Наклонность изменяется в пределах:

наименьшее	значение	наклонности	9°,0,
наибольшее	»	»	26°,0.

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

## § 1. Точные решения задачи трех тел

Хотя общее решение задачи трех тел до сих пор получить не удалось, тем не менее уже давно известны точные конфигурации трех тел, для которых могут быть получены решения. Эти решения, которые нашел Лагранж в одном из своих прекрасных сочинений [46], на первый взгляд кажутся имеющими только теоретическое значение\*). Различные исследования показали, что они представляют весьма большой интерес для общей задачи, и что они, вероятно, находятся в тесной связи с существенными особенностями общего решения. Эти лагранжевы решения являются порождающими для одного сорта периодических решений задачи трех тел и сами они могут быть рассматриваемы как простейшие периодические решения этой задачи. Поэтому настоящую главу мы начнем с указанных точных решений задачи трех тел.

При выводе лагранжевых решений мы будем следовать методу, данному Лапласом в его «Небесной механике», т. IV. Правда, он слабее методов Лагранжа, поскольку отчасти связан с геометрическими рассуждениями. Но именно благодаря этому он выявляет механическую природу этих решений, и позднее нам представится случай аналитическим путем вновь установить особые точки, соответствующие лагранжевым решениям.

Лаплас исходит из замечания о том, что точные и простые решения задачи  $n$  тел удастся установить при следующих условиях. Предполагая, что  $n$  тел в начальный момент расположены в плоскости так, что равнодействующая приложенных к каждой массе сил проходит через общий центр масс  $G$  и полагая, что эти равнодействующие по своей величине пропорциональны расстоянию от  $G$ , очевидно, получим, что массы всегда будут оставаться в одних и тех же взаимных положениях, если вся система будет вращаться вокруг  $G$  с такой угловой скоростью, что соответствующая вращению центробежная сила будет равна упомянутой равнодействующей.

\*) Сам Лагранж пишет [46]: «cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité».

Из геометрических рассуждений, которые будут развиты ниже, находим, что подобное равновесное состояние имеет место, когда начальные скорости масс наклонены к прямой, соединяющей массы с центром инерции, под одним и тем же углом и по величине пропорциональны расстоянию до  $G$ . Конфигурация масс в этом случае остается неизменной, изменяются только ее размеры. Возникает вопрос, какое необходимо для этого расположение масс?

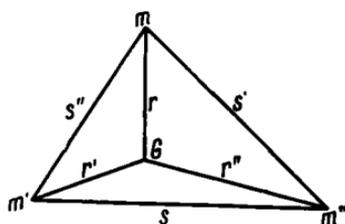


Рис. 24.

Мы предположим, что имеются три тела с массами  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ . Их прямоугольные координаты в системе координат с началом в  $G$  суть  $x$ ,  $y$ ;  $x'$ ,  $y'$ ;  $x''$ ,  $y''$ . Их расстояния от  $G$  обозначим через  $r$ ,  $r'$  и  $r''$ , а их взаимные расстояния через  $s$ ,  $s'$  и  $s''$ , так что

$$\begin{array}{lll} s & \text{— расстояние между } m' \text{ и } m'', \\ s' & \text{»} & \text{»} & m'' \text{ и } m, \\ s'' & \text{»} & \text{»} & m \text{ и } m'. \end{array}$$

Предположим также, что тела притягиваются с силой  $\Phi(s)$ , которая является функцией от взаимного расстояния  $s$ . Пусть проекции ускорений на ось  $X$  суть  $X$ ,  $X'$  и  $X''$ ; тогда

$$\left. \begin{array}{l} X = m' \frac{\Phi(s'')}{s''} (x' - x) + m'' \frac{\Phi(s')}{s'} (x'' - x), \\ X' = m'' \frac{\Phi(s)}{s} (x'' - x') + m \frac{\Phi(s'')}{s''} (x - x'), \\ X'' = m \frac{\Phi(s')}{s'} (x - x'') + m' \frac{\Phi(s)}{s} (x' - x''), \end{array} \right\} \quad (1)$$

и аналогичные выражения получим для проекций ускорений на ось  $Y$ .

Если равнодействующие сил, действующих на  $m$ ,  $m'$  и  $m''$ , проходят через начало координат, то

$$\left. \begin{array}{ll} X = Kx, & Y = Ky, \\ X' = K'x', & Y' = K'y', \\ X'' = K''x'', & Y'' = K''y''. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Модули равнодействующих соответственно равны

$$K \sqrt{x^2 + y^2}, \quad K' \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad K'' \sqrt{x''^2 + y''^2},$$

и если они предполагаются пропорциональными расстояниям от

$G$ , то должно быть

$$K = K' = K'', \quad (2^*)$$

что, впрочем, вытекает из свойства центра инерции. Уравнение (1) дает

$$mx + m'x' + m''x'' = 0, \quad (3)$$

что следует из свойства центра масс.

Если из первого из уравнений (1) при помощи (3) исключить  $x''$ , то, учитывая (2), получим

$$-Kx = x \left[ m' \frac{\Phi(s'')}{s''} + (m + m'') \frac{\Phi(s')}{s'} \right] + m'x' \left[ \frac{\Phi(s')}{s'} - \frac{\Phi(s'')}{s''} \right]. \quad (4)$$

Для координаты  $y$  получим аналогичное уравнение

$$-Ky = y \left[ m' \frac{\Phi(s'')}{s''} + (m + m'') \frac{\Phi(s')}{s'} \right] + m'y' \left[ \frac{\Phi(s')}{s'} - \frac{\Phi(s'')}{s''} \right]. \quad (4^*)$$

Из этих уравнений следует, что

$$x : x' = y : y', \quad (5)$$

если не будут иметь место равенства

$$\frac{\Phi(s')}{s'} - \frac{\Phi(s'')}{s''} = 0, \quad (6)$$

а также

$$m' \frac{\Phi(s'')}{s''} + (m + m'') \frac{\Phi(s')}{s'} = 0, \quad (6^*)$$

которые выполняются одновременно.

Сначала рассмотрим случай, в котором имеет место соотношение (6). Оно удовлетворяется, если

$$s' = s'',$$

откуда по (4)

$$-K = (m + m' + m'') \frac{\Phi(s')}{s'}. \quad (7)$$

Остальные уравнения (1) дают то же самое значение для  $K$  в предположении, что

$$s = s' = s''. \quad (8)$$

Следовательно, прямые, соединяющие три массы, образуют равносторонний треугольник. Ускорения трех масс суть

$$Kr, \quad Kr', \quad Kr'',$$

где  $K$  дается формулой (7).

Стороны треугольника  $s$ ,  $s'$ ,  $s''$  и расстояния от центра масс  $r$ ,  $r'$  и  $r''$  связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} (m + m' + m'')^2 r^2 &= -m' m'' s^2 + (m' + m'')(m'' s'^2 + m' s''^2), \\ (m + m' + m'')^2 r'^2 &= -m'' m s'^2 + (m'' + m)(m s''^2 + m' s^2), \\ (m + m' + m'')^2 r''^2 &= -m m' s''^2 + (m + m')(m' s^2 + m s'^2), \end{aligned} \right\} (9)$$

которые легко выводятся из свойств центра инерции.

Если  $s = s' = s''$ , то, значит,

$$s = \frac{m + m' + m''}{\sqrt{m'^2 + m' m'' + m''^2}} r, \quad (10)$$

и согласно (7) для ускорения массы  $m$  получается выражение

$$rK = -\sqrt{m'^2 + m' m'' + m''^2} \varphi \left( \frac{m + m' + m''}{\sqrt{m'^2 + m' m'' + m''^2}} r \right).$$

Для встречающегося в природе случая имеем

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2}$$

и, следовательно,

$$rK = -\frac{(m'^2 + m' m'' + m''^2)^{3/2}}{(m + m' + m'')^2 r^2}. \quad (11)$$

Движение происходит таким образом, как если бы каждая масса притягивалась центром инерции с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Таким образом, каждая масса описывает коническое сечение, фокус которого находится в центре инерции. Расстояния между массами всегда образуют равносторонний треугольник, и если конические сечения будут параболлами или гиперболами, то расстояния могут неограниченно возрастать. Это первое из найденных Лагранжем точных решений задачи трех тел.

Если не имеет места соотношение  $s = s' = s''$ , то согласно (5)  $x : x' = y : y'$ , так что  $m$  и  $m'$  лежат на прямой, проходящей через центр масс. Тогда все три массы лежат на одной прямой. Но их положение на этой прямой не может быть выбрано произвольно. Если расстояние между двумя массами определено, то положение третьей массы не может быть выбрано произвольно. Предположим, что тела на прямой расположены в последовательности  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ . Если положить

$$x' = -\mu x, \quad x'' = -\nu x,$$

то  $\nu$  обязательно положительное число, в то время как  $\mu$  может

быть как положительным, так и отрицательным. Далее получим

$$\begin{aligned} s &= (v - \mu)r, \\ s' &= (1 + v)r, \\ s'' &= (1 + \mu)r. \end{aligned}$$

Если эти значения подставить в (1), то получим

$$\left. \begin{aligned} K &= -m' \frac{\Phi(s'')}{s''} (1 + \mu) - m'' \frac{\Phi(s')}{s'} (1 + v), \\ -\mu K &= -m'' \frac{\Phi(s)}{s} (v - \mu) + m \frac{\Phi(s'')}{s''} (1 + \mu), \\ -v K &= m \frac{\Phi(s')}{s'} (1 + v) + m' \frac{\Phi(s)}{s} (v - \mu). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Соотношение (3) выразится следующим образом:

$$m - m'\mu - m''v = 0. \quad (13)$$

Если  $\Phi(s) = s^n$ , то имеем

$$\left. \begin{aligned} K &= -m' (1 + \mu)^n r^{n-1} - m'' (1 + v)^n r^{n-1}, \\ -\mu K &= -m'' (v - \mu)^n r^{n-1} + m (1 + \mu)^n r^{n-1} \\ -v K &= m (1 + v)^n r^{n-1} + m' (v - \mu)^n r^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если первое из этих уравнений умножить на  $(\mu + v)$  и сложить с оставшимися, то, поделив на  $r^{n-1}$  и приняв во внимание (13), получим

$$(m' - m'') [-v(1 + \mu)^n + \mu(1 + v)^n + (v - \mu)^n] = 0. \quad (15)$$

Следовательно, либо имеем уравнение

$$m' - m'' = 0 \quad (16)$$

либо

$$v(1 + \mu)^n - \mu(1 + v)^n - (v - \mu)^n = 0; \quad (17)$$

из них, однако, только (17) дает независимое решение.

Следуя Лапласу, положим

$$v - \mu = (1 + \mu)z;$$

тогда

$$1 + v = (1 + \mu)(1 + z)$$

и согласно (13)

$$1 + \mu = \frac{m + m' + m''}{m' + m''(1 + z)}, \quad 1 + v = \frac{(m + m' + m'')(1 + z)}{m' + m''(1 + z)}.$$

Предполагая, кроме того, что массы притягиваются по закону Ньютона, так что  $n = -2$ , для  $z$  получим следующее уравнение

пятой степени:

$$-mz^2 [1 - (1+z)^3] + m'(1+z)^2(1-z^3) + m''[(1+z)^3 - z^3] = 0, \quad (18)$$

которое имеет по крайней мере один действительный положительный корень \*). Этому корню всегда соответствует положительное значение  $v$ , так как

$$v = \frac{m + (m + m')z}{m' + m''(1+z)},$$

в то время как  $\mu$ , наоборот, может оказаться отрицательным, поскольку

$$\mu = \frac{m - m''z}{m' + m''(1+z)},$$

и, следовательно, положительному значению  $z$  может соответствовать отрицательное значение  $\mu$ . Если  $\mu$  отрицательно, то центр масс лежит между  $m'$  и  $m''$ .

Мы доказали следующую теорему:

Пусть даны три тела с произвольными массами  $m$ ,  $m'$  и  $m''$ . Пусть массы  $m$  и  $m''$  находятся друг от друга на произвольном расстоянии. Тогда на прямой линии между  $m$  и  $m''$  всегда имеется определенное положение для  $m'$ , которому соответствует точное решение задачи трех тел. Если массы различны по величине, то всегда имеются три различные конфигурации, которым соответствуют точные решения, в зависимости от того, наибольшая, наименьшая или третья масса лежит посередине.

Описываемые тремя массами орбиты в этом случае будут коническими сечениями, фокусы которых лежат в центре масс. В следующих параграфах нам представится случай изучить эти решения более подробно.

В начале этого параграфа согласно Лапласу утверждалось, что для существования точных решений не обязательно, чтобы начальная скорость была перпендикулярна к прямой, соединяющей массы с центром инерции, но достаточно, чтобы начальные скорости различных масс составляли один и тот же угол с этой прямой, если только величины начальных скоростей пропорциональны расстоянию до центра масс. Так как справедливость этого утверждения непосредственно не очевидна, то мы проведем доказательство.

Пусть  $A$  и  $B$  — начальные положения двух масс,  $G$  — общий центр масс всей системы.

---

\*) Ниже покажем, что это уравнение обладает единственным действительным корнем.

Предположим, что:

- 1) величины равнодействующих сил, приложенных к  $A$  и  $B$ , относятся как расстояния  $AG : BG$ ;
- 2) начальные скорости  $AA'$  и  $BB'$  находятся в том же отношении друг к другу ( $AG : BG$ ), и
- 3) угол  $A'AG$  равен углу  $B'BG$ .

В некоторый момент времени тела  $A$  и  $B$  занимают положение  $A'$  и  $B'$ . Покажем, что оба треугольника  $ABG$  и  $A'B'G$  подобны друг другу. Действительно, по предположению,

$$\left. \begin{aligned} A'A : AG &= B'B : BG, \\ \angle A'AG &= \angle B'BG. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Значит, подобны и треугольники  $A'AG$  и  $B'BG$  и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} AG : BG &= A'G : B'G, \\ \angle AGA' &= \angle BGB', \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

а также

$$\angle AGB = \angle A'GB'.$$

Принимая во внимание (b), находим, что треугольники  $ABG$  и  $A'B'G$  подобны. Но отсюда следует, что образованная массами конфигурация в некоторой момент будет подобна первоначальной конфигурации. Изменился только масштаб.

Во второй момент времени действующие силы таковы, что величины равнодействующих относятся друг к другу как  $A'G : B'G$ ; тогда предположения 2) и 3) будут оставаться справедливыми, и образованный массами треугольник всегда будет изменяться подобно, что и требовалось доказать.

Остается доказать, что уравнение Лагранжа (18) обладает одним действительным, более того, положительным, корнем. Для этой цели расположим члены по убывающим степеням  $z$ .

Уравнение примет такой вид:

$$(m + m')z^5 + (3m + 2m')z^4 + (3m + m')z^3 - (m' + 3m'')z^2 - (2m' + 3m'')z - (m' + m'') = 0. \quad (18^*)$$

Это уравнение допускает только одну переменную знаков и по теореме Декарта оно имеет не более одного положительного и не более четырех отрицательных корней. Но отрицательными корнями оно обладать не может. Если в (18) вместо  $z$  подставить  $-u$ , то получим уравнение

$$mu^2 [1 - (1 - u)^3] + m' (1 - u)^2 (1 + u^3) + m'' [(1 - u)^3 + u^3] = 0 \quad (18^{**})$$

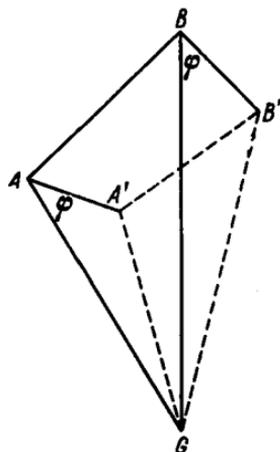


Рис. 25.

и коэффициенты при  $m$ ,  $m'$  и  $m''$  в правой части этого уравнения будут всегда положительны при положительных значениях  $u$ . Итак, уравнение (18) имеет только один и притом положительный корень.

Если задана последовательность, в которой расположены три массы на прямой, и выбрано для расстояния между двумя внешними массами определенное значение, то существует только одно положение среднего тела, которому соответствует лагранжево точное решение задачи трех тел. Если изменить порядок расположения масс, то получим три, вообще говоря, различных решения.

Те точки, которые определяют лагранжевы точные решения задачи трех тел, мы назовем, следуя Гильдену, точками либрации.

При применении этой теоремы к планетной системе особенно интересен тот случай, когда одна из масс значительно превосходит другие. Исследуем положение точек либрации в этом случае. Будем всегда предполагать, что три массы располагаются в последовательности  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ . Могут встретиться два случая: 1) либо наибольшая масса является самой внешней, 2) либо она лежит посередине между двумя малыми массами.

В первом случае будем предполагать, что  $m$  — весьма велико, а  $m'$  и  $m''$  малы. Из (18\*) непосредственно вытекает, что уравнение имеет положительный корень, который приближенно дается формулой

$$z = \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что расстояния масс  $m'$  и  $m''$  от центра инерции приближенно равны

$$r' = \frac{m}{m' + m''} r,$$

$$r'' = \frac{m}{m' + m''} (1 + z) r,$$

так что

$$r'' - r' = r' \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}} \quad (20)$$

или, с той же степенью приближения,

$$r'' - r' = r'' \sqrt[3]{\frac{m' + m''}{3m}}.$$

Точки либрации для масс  $m'$  и  $m''$  находятся весьма близко друг к другу.

Во втором случае предположим, что большая масса лежит посередине, так что  $m'$  велико; тогда (18) имеет корень, близкий

к единице. Подставим в (18)  $z = 1 + y$  и разложим по степеням  $y$ ; тогда придем к уравнению

$$m(1 + 2y + y^2)(7 + 12y + 6y^2 + y^3) + m'(4 + 4y + y^2)(3y + 3y^2 + y^3) + m''(7 + 9y + 3y^2) = 0,$$

и если учесть, что  $m'$  по сравнению с  $m$  и  $m''$  весьма велико, то найдем, что это уравнение имеет весьма малый по величине корень, значение которого приближенно дается формулой

$$y = -\frac{7(m - m'')}{12m'}. \quad (21)$$

Получаемые отсюда значения  $\mu$  и  $\nu$  суть

$$\mu = \frac{m - m''}{m'},$$

$$\nu = 1 + \frac{17}{12} \frac{m - m''}{m'},$$

а расстояния между тремя массами будут

$$s = \left(1 + \frac{5}{12} \frac{m - m''}{m'}\right) r,$$

$$s' = \left(2 + \frac{17}{12} \frac{m - m''}{m'}\right) r,$$

$$s'' = \left(1 + \frac{m - m''}{m'}\right) r.$$

Для неравных масс всегда можно предполагать, что  $m > m''$ . Если в точках либрации расположены равные массы, то они отстоят от  $m'$  на одинаковых расстояниях. В приведенных выше формулах  $r$  означает расстояние центра инерции от  $m$ . Расстояние большей массы от  $m'$  равно  $s''$ , и для расстояния  $s$  меньшей массы от  $m'$  получим значение

$$s = \left(1 - \frac{7}{12} \frac{m - m''}{m'}\right) s''. \quad (22)$$

Особенно интересен тот случай, в котором одна из меньших масс исчезающе мала, так что без заметной ошибки ее можно положить равной нулю. Обозначим наибольшую массу через  $M$ , а малую, но конечную массу, — через  $m$ . Далее обозначим через  $a$  расстояние между  $M$  и  $m$ , а через  $b$  — расстояние между  $M$  и бесконечно малой массой. Из (20), (20\*) и (22) получим для  $b$  следующие

значения:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= a \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \right), \\ b_2 &= a \left( 1 + \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \right), \\ b_3 &= a \left( 1 - \frac{7}{12} \frac{m}{M} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Три точки либрации, определяемые этими формулами, обозначим через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ . Их положения указаны на рис. 26.



Рис. 26.

Если учитывать только притяжение Солнца и одной планеты, то каждой планете в солнечной системе будут соответствовать три точки либрации, которые обладают тем свойством, что малая частица, например, метеорное тело, которая находилась бы в одной из точек либрации и обладала бы соответствующей начальной скоростью, всегда описывала бы вокруг Солнца эллипс под действием притяжения к Солнцу и указанной планете, и притом так, что эта частица всегда оставалась бы на прямой, проходящей через планету и Солнце.

Точки либрации для различных планет приведены в табл. XI.

Таблица XI

Точки либрации в планетной системе

	Расстояния от Солнца		
	$L_1$	$L_2$	$L_3$
Меркурий . . . . .	0,9966	1,0034	1—0,00000007
Венера . . . . .	0,9907	1,0093	1—0,00000143
Земля . . . . .	0,9899	1,0101	1—0,00000178
Марс . . . . .	0,9952	1,0048	1—0,00000019
Юпитер . . . . .	0,9332	1,0698	1—0,000557
Сатурн . . . . .	0,9550	1,0464	1—0,000167
Уран . . . . .	0,9758	1,0246	1—0,000026
Нептун . . . . .	0,9743	1,0261	1—0,000030

За единицу расстояния принято среднее расстояние соответствующей планеты от Солнца.

Точки либрации  $L_1$  и  $L_2$  для всех планет лежат вне орбит известных спутников планет. Для Земли точки  $L_1$  и  $L_2$  лежат примерно на учетверенном расстоянии Луны от Земли. В следующем параграфе найдем, что положение точки либрации тесно связано с устойчивостью движения.

## § 2. Периодические решения в окрестности точек либрации

Общее решение задачи трех тел с необходимым числом произвольных постоянных до сих пор неизвестно. В то же время найдены различные частные решения, которые зависят от некоторого числа произвольных постоянных. При этом в последнее время стали играть большую роль периодические решения, и с их помощью изучение задачи трех тел пошло по новым путям, которые имеют большой теоретический интерес. Исследование этих орбит продвинулось уже столь далеко, что открыло новые горизонты в числовых расчетах орбит небесных тел.

Периодические орбиты были введены в астрономию Хиллом в его прекрасной серии работ [47]. В этих сочинениях берут свои истоки многие важнейшие исследования в астрономии за последние десятилетия. В последующем мы часто будем иметь случаи возвращаться к этим основополагающим работам Хилла.

Общая теория периодических решений позднее была развита Пуанкаре с применением сильных математических методов, которые были в его распоряжении, сначала в его стохгольмском конкурсном сочинении в 1889 г. «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique», и затем детально в его классической работе «Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste». Периодические орбиты характеризуются тем, что тела через определенные интервалы времени возвращаются к имевшейся ранее конфигурации. Периодические орбиты целесообразно разделять на два класса. В первом классе изменения образуемых телами конфигураций всегда остаются бесконечно малыми, а во втором они конечны. Периодические орбиты второго класса, вообще говоря, могут проходить через любую произвольную точку или непрерывную область плоскости. Наоборот, периодические орбиты первого класса могут встречаться только при вполне определенных конфигурациях тел.

Орбиты первого класса аналитически исследуются легче. Поэтому мы начнем исследование периодических орбит с этого класса.

Мы ограничимся специальным частным случаем задачи трех тел, а именно тем, в котором одна из трех масс исчезающе мала, и, кроме того, обе конечные массы движутся по окружностям вокруг общего центра инерции. Движение обоих этих тел, на

которые бесконечно малая масса не оказывает влияния, должно происходить с постоянной скоростью.

Этот случай, который мы назовем астероидной задачей трех тел <sup>\*</sup>), в астрономии имеет большое значение, так как теория малых планет, создание которой представляет насущную потребность практической астрономии, основывается на этой задаче.

Оба тела конечной массы обозначим через  $m_1$  и  $m_2$ , а бесконечно малое тело — астероид (планетоид) — через  $P$ . Массу  $m_1$  примем за единицу массы,  $m_2$  будет иметь массу  $\mu$ . Мы предполагаем, что при нашем выборе единиц  $\mu$  является либо правильной дробью, либо единичей.

Расстояние между  $m_1$  и  $m_2$  примем за единицу длины, и пусть  $r_1$  и  $r_2$  суть расстояния тел  $m_1$  и  $m_2$  от их общего центра масс  $G$ . Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r_2 &= 1, \\ r_1 - \mu r_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Единица времени выбирается так, чтобы постоянная тяготения была равна единице. Время  $T$  одного оборота  $m_1$  и  $m_2$  вокруг  $G$  будет

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (2)$$

и, следовательно, угловая скорость  $n$  этого движения

$$n = \sqrt{1 + \mu}. \quad (2^*)$$

Предположим, наконец, что астероид движется в плоскости, в которой при своем движении находятся  $m_1$  и  $m_2$ .

В качестве начала координат выбран центр масс  $G$ . Движение точки  $P$  отнесено к прямоугольной системе координат  $XOY$ , которая вращается с постоянной скоростью; ось абсцисс направлена к  $m_1$ , а положительное направление оси  $Y$  образует с осью  $X$  угол  $90^\circ$  в направлении вращения.

В § 7 гл. I мы вывели для движения  $P$  следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>\*</sup>) Французы используют название «Le Problème restreint». (Прим. автора)  
В отечественной литературе чаще употребляется название «ограниченная круговая задача трех тел». Наряду с этой задачей рассматриваются также «ограниченная эллиптическая задача трех тел» и «ограниченная гиперболическая задача трех тел» (см. [48]). (Прим. перев.)

где

$$U = \frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+r_2)^2 + y^2}}.$$

Если расстояния от  $m$  до  $m_1$  и  $m_2$  обозначить через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , так что

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^2 &= (x - r_1)^2 + y^2, \\ \rho_2^2 &= (x + r_2)^2 + y^2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то будем иметь

$$U = \frac{1}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}. \quad (3^*)$$

Эти уравнения могут быть записаны в несколько более удобной форме. С учетом (4) имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^2 &= \left(x - \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2 + y^2, \\ \rho_2^2 &= \left(x + \frac{1}{1+\mu}\right)^2 + y^2, \end{aligned} \right\}$$

и следовательно,

$$\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = \frac{\mu}{1+\mu} \div (1+\mu)(x^2 + y^2) = \frac{\mu}{1+\mu} + n^2(x^2 + y^2).$$

Если положить

$$2\Omega = \rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1} + \mu\left(\rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2}\right), \quad (5)$$

то можно записать дифференциальные уравнения в следующей форме, впервые полученной Дарвином [49]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти уравнения обладают так называемым интегралом Якоби

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C, \quad (7)$$

где  $C$  будет называться постоянной Якоби. Если положить

$$q_1 = x, \quad q_2 = y,$$

$$p_1 = \frac{dx}{dt} - ny, \quad p_2 = \frac{dy}{dt} + nx,$$

$$2H = p_1^2 + p_2^2 + 2n(p_1q_2 - p_2q_1) - 2U, \quad (8^*)$$

то согласно (10) § 8 гл. I получим дифференциальные уравнения

в канонической форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь мы будем использовать дифференциальные уравнения в форме (6).

Если  $x = a$ ,  $y = b$  — координаты произвольной точки, которая не совпадает ни с  $m_1$ , ни с  $m_2$ , то из формулы для  $\Omega$  непосредственно очевидно, что функция  $\Omega$ , а равным образом и все ее производные от  $x$  и  $y$  могут быть разложены в ряды по положительным степеням  $x - a$  и  $y - b$ . Если  $x - a$  и  $y - b$  достаточно малы, то в этом разложении члены низшего порядка будут больше суммы всех остальных членов этого ряда.

Будем отыскивать те точки, в достаточной близости от которых существуют такие периодические решения дифференциальных уравнений (6), что бесконечно малая масса  $P$  может навсегда остаться в окрестности этой точки, двигаясь по орбите, которая замыкается.

Пусть  $(a, b)$  — такая точка. Положим

$$\begin{aligned} x &= a + \xi, \\ y &= b + \eta. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial a} + \xi \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} + \eta \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} + \dots, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial b} + \xi \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} + \eta \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Вторыми и высшими степенями  $\xi$  и  $\eta$  в этом разложении можно пренебречь, если мы ограничимся отысканием таких периодических орбит, которые лежат в близкой окрестности точки  $(a, b)$ .

Кривые, находящиеся на конечном удалении от  $(a, b)$ , принадлежат второму классу периодических орбит. Если в (9) удерживать только первые степени  $\xi$  и  $\eta$ , то очевидно, что при этом, для того чтобы  $\xi$  и  $\eta$  оставались малыми, должны иметь место следующие соотношения:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{\partial\Omega}{\partial b} = 0. \quad (10)$$

Эти уравнения определяют положение точки  $(a, b)$ .

Решение этих уравнений очень просто может быть получено следующим образом. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (a - r_1)^2 + b^2, \\ \rho_2^2 &= (a + r_2)^2 + b^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial a} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \frac{a - r_1}{\rho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \frac{a + r_2}{\rho_2} = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial b} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \frac{b}{\rho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \frac{b}{\rho_2} = 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения предполагают, что либо имеет место

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = 0, \quad (11)$$

либо

$$\begin{vmatrix} \frac{a - r_1}{\rho_1} & \frac{a + r_2}{\rho_2} \\ \frac{b}{\rho_1} & \frac{b}{\rho_2} \end{vmatrix} = -\frac{b}{\rho_1 \rho_2} (r_1 + r_2) = -\frac{b}{\rho_1 \rho_2} = 0. \quad (12)$$

Уравнения (11) могут быть записаны в следующей форме:

$$\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} = \rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} = 0$$

или

$$\rho_1 = \rho_2 = 1. \quad (13)$$

Эта точка  $(a, b)$  лежит в вершине равностороннего треугольника, сторона которого равна  $m_1 m_2$ .

Очевидно, что имеются такие две точки [которые обозначим через  $(a_4, b_4)$  и  $(a_5, b_5)$ ], что

$$\begin{aligned}a_4 = a_5 &= \frac{r_1 - r_2}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \mu}{1 + \mu}, \\ b_4 = -b_5 &= \frac{1}{2} \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Точка  $(a_4, b_4)$  лежит в верхней полуплоскости, а  $(a_5, b_5)$  в нижней.

Для точек, которые соответствуют решению (12), должно быть  $b = 0$ , и, значит, они лежат на оси  $X$ . Значение  $a$  для этих точек определяется уравнением

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \frac{a - r_1}{\rho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \frac{a + r_2}{\rho_2} = 0. \quad (14)$$

При нахождении корней этого уравнения следует различать три случая:

1.  $-r_2 < a < r_1$ ;
2.  $a < -r_2$ ;
3.  $r_1 < a$

Для этих трех случаев соответственно имеем

1.  $a - r_1 = -\rho_1, \quad a + r_2 = \rho_2;$
2.  $a - r_1 = -\rho_1, \quad a + r_2 = -\rho_2;$
3.  $a - r_1 = \rho_1, \quad a + r_2 = \rho_2.$

Уравнение (14) принимает следующие формы:

- 1)  $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = 0, \quad \rho_1 = 1 - \rho_2;$
- 2)  $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 + 1;$
- 3)  $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = 0; \quad \rho_1 = \rho_2 - 1.$

Во всех случаях для определения  $\rho_1$  или  $\rho_2$  получим уравнение пятой степени. Эти уравнения имеют такой вид:

- 1)  $(1 + \mu) \rho_2^5 - (3 + 2\mu) \rho_2^4 + (3 + \mu) \rho_2^3 - \mu \rho_2^2 + 2\mu \rho_2 - \mu = 0,$
  - 2)  $(1 + \mu) \rho_2^5 + (3 + 2\mu) \rho_2^4 + (3 + \mu) \rho_2^3 - \mu \rho_2^2 - 2\mu \rho_2 - \mu = 0,$
  - 3)  $(1 + \mu) \rho_1^5 + (2 + 3\mu) \rho_1^4 + (1 + 3\mu) \rho_1^3 - \rho_1^2 - 2\rho_1 - 1 = 0.$
- (15)

Каждое из этих уравнений имеет один действительный положительный корень и остальные четыре — комплексные.

При очень малых значениях  $\mu$  эти корни будут иметь следующие предельные значения:

- 1)  $\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}},$
- 2)  $\rho_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}},$
- 3)  $\rho_1 = 1 - \frac{7}{12} \mu.$

Более точные значения определяются уравнениями:

- 1)  $\rho_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3},$
- 2)  $\rho_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3},$
- 3)  $\rho_1 = 1 - \frac{7}{12} \mu + \frac{7}{12} \mu^2.$

Если приведенные уравнения пятой степени сравнить с уравнением (18\*) § 1, то легко получаем, что точка, в окрестности которой могут быть периодические орбиты, совпадает с той точкой,

в которой находилась бы  $P$ , если бы существовало точное лагранжево решение задачи трех тел.

Кроме того, в близкой окрестности масс  $m_1$  и  $m_2$  могут быть периодические орбиты. Более подробно мы исследуем эти орбиты в одном из следующих параграфов.

Ниже приводится сводка приближенных значений координат точек либрации:

$$\begin{aligned}
 L_1: \quad a_1 &= -\frac{1}{1+\mu} + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}, & b_1 &= 0, \\
 L_2: \quad a_2 &= -\frac{1}{1+\mu} - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}, & b_2 &= 0, \\
 L_3: \quad a_3 &= \frac{\mu}{1+\mu} + 1 - \frac{7}{12}\mu + \frac{7}{12}\mu^2, & b_3 &= 0, \\
 L_4: \quad a_4 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu}, & b_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
 L_5: \quad a_5 &= -\frac{1}{2} \frac{1-\mu}{1+\mu}, & b_5 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что при больших значениях  $\mu$  необходимо обратиться к уравнениям (15).

### § 3. Граничная кривая Хилла

Прежде чем перейти к детальному изучению периодических орбит в окрестности точек либрации, попытаемся изучить одно свойство орбит, вытекающее из интеграла Якоби [(7) § 2].

Интеграл Якоби представлялся в виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C. \quad (1)$$

В своей классической работе [47] Хилл отмечал, что кривая

$$2\Omega - C = 0 \quad (2)$$

играет важную роль для характеристики движения.

Именно из (1) следует, что во всякий момент времени координаты тела необходимо должны иметь такие значения, чтобы

$$2\Omega - C \geq 0.$$

Поэтому действительная плоскость делится кривой (2) на две области, причем движение возможно только в одной из этих областей. Если кривая состоит из одной или большего числа замкнутых ветвей, внутри которых  $2\Omega - C$  положительно, то  $P$  при своем движении всегда должна оставаться в замкнутой области. Мы будем именовать кривую (2) «граничной кривой» или «хилловой граничной кривой».

В гл. IX мы более подробно рассмотрим значение этой кривой в вопросе об устойчивости. В этой главе мы изучим форму граничной кривой в астероидальной задаче трех тел.

При каждом  $\mu$  кривая зависит только от значения параметра  $C$ . Этот параметр не может иметь произвольные значения, если кривая должна быть действительной. Если  $C$  отрицательно, то, очевидно,  $2\Omega - C$  никогда не может равняться нулю. Следовательно, постоянная  $C$  имеет определенное минимальное значение. Если  $C$  меньше этого значения, то никакой граничной кривой не существует, и тело  $m$  может занимать произвольное положение на плоскости.

Найдем это минимальное значение. Для этого должны выполняться уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = 0$$

и, как известно из предыдущего параграфа, это имеет место в точках либрации  $L_4$  и  $L_5$ . Соответствующее значение  $C$  получим из (2); положив  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , будем иметь

$$C_{\min} = 3(1 + \mu). \quad (3)$$

Если  $C$  принимает это минимальное значение, то кривая Хилла вырождается в две точки,  $L_4$  и  $L_5$ .

Исследование формы граничной кривой для различных значений  $C$  легко можно выполнить следующим образом. Для весьма больших значений  $C$  уравнение

$$\rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1} + \mu \left( \rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2} \right) = C, \quad (4)$$

очевидно, может выполняться для трех различных случаев. Во-первых, если  $\rho_1$  принимает очень малые значения, во-вторых, если  $\rho_2$  будет весьма малым, и в-третьих, если сумма  $\rho_1^2 + \mu \rho_2^2$  будет очень большой. Итак, при весьма больших значениях  $C$  граничная кривая состоит из трех различных ветвей: одной,  $\alpha$  — очень малой, которая охватывает массу  $m_1$ , другой,  $\beta$  — также малой, вокруг массы  $m_2$ , и еще одной —  $\gamma$ , очень большой, охватывающей обе массы.

Уравнения этих ветвей в биполярных координатах приближенно будут

$$\text{для } \alpha: \quad \frac{2}{\rho_1} = C,$$

$$\text{» } \beta: \quad \mu \frac{2}{\rho_2} = C,$$

$$\text{» } \gamma: \quad \rho_1^2 + \mu \rho_2^2 = C.$$

Следовательно, приближенно ветви  $\alpha$  и  $\beta$  являются окружностями. Радиус окружности  $\alpha$  больше радиуса окружности  $\beta$ . Если  $\mu = 1$ , то обе окружности одинаковы. Третья кривая имеет вид овала.

Если уменьшать  $C$  по величине, то радиусы обеих окружностей возрастают и одновременно стягиваются овал. При определенном значении  $C$ , которые мы обозначим через  $C_1$ , окружности будут касаться друг друга, и граничная кривая будет иметь

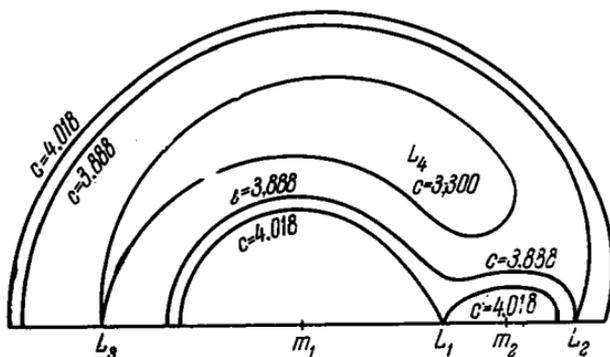


Рис. 27.

лемнискатоподобную форму (рис. 27). Здесь кривая имеет двойную точку, ордината которой равна нулю, а абсцисса удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение имеет следующую форму:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \frac{x - r_1}{\rho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \frac{x + r_2}{\rho_2} = 0. \quad (6)$$

Так как здесь

$$x - r_1 = -\rho_1, \quad x + r_2 = \rho_2,$$

то уравнение примет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = 0; \quad (6^*)$$

тогда двойная точка совпадает с точкой либрации  $L_1$ .

Если  $C$  меньше  $C_1$ , то лемниската переходит в кривую, по форме напоминающую песочные часы, которая при  $C = C_2$  соединяется с внешним овалом. Эта точка лежит на оси абсцисс за малой массой, так что  $\rho_1 = \rho_2 + 1$ . Уравнение (6), которое здесь также справедливо, поскольку это относится к двойной

точке, дает

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_2} = 0;$$

при сравнении с предыдущим параграфом находим, что эта двойная точка совпадает с точкой либрации  $L_2$ .

Граничная кривая принимает теперь подковообразную форму. Внутри кривой  $2\Omega - C$  отрицательно, и здесь, следовательно, никакого движения быть не может. При убывании  $C$  от значения  $C_2$  подковообразная кривая постепенно сужается и при значении  $C = C_3$  распадается на две кривые. Точка деления лежит на оси  $X$  со стороны большей массы; тогда легко находим, что двойная точка совпадает с точкой либрации  $L_3$ .

Для значений  $C$ , меньших  $C_3$ , граничная кривая состоит из двух отдельных замкнутых ветвей, которые при наименьшем значении  $C_4$  переходят в точки либрации  $L_4$  и  $L_5$ . Для еще более меньших значений  $C$ , как уже отмечалось, никакой граничной кривой не существует.

Рис. 27 дает ясное представление о приведенной выше эволюции граничной кривой. Она вычислялась Дарвином в его известной работе [49], где нахо-

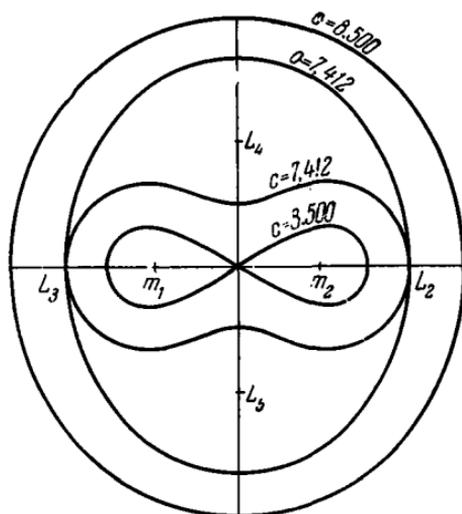


Рис. 28.

дится также всеобъемлющее рассмотрение хилловой граничной кривой. Положение точек либрации (соответственно двойных точек) видно из табл. XII.

Чтобы получить представление об изменении положения точек либрации при различных значениях  $\mu$ , мы еще приведем соответствующие числа для  $\mu = 1$ : 32000 и для  $\mu = 1$ . Положение точек либрации при  $\mu = 1$  было найдено Барроу [51]. Вид граничной кривой для различных значений  $C$  и при  $\mu = 1$  приведен на рис. 28. Следовало бы отметить, что при подготовке этого рисунка принимались во внимание только положения точек либрации и точек пересечения кривой с осью  $X$  и осью  $Y$ . Последние определялись по формуле

$$\rho^2 + \frac{2}{\rho} = \frac{C}{1 + \mu} = \frac{C}{2}, \quad (7)$$

Таблица XII  
 $\mu = 0,1$

$L_i$	$\rho_1$	$\rho_2$	$C_i$
$L_1$	0,7175	0,2825	4,0182
$L_2$	1,3470	0,3470	3,8876
$L_3$	0,9469	1,9469	3,4905
$L_4$ и $L_5$	1,0000	1,0000	3,3000

Таблица XIII  
 $\mu = 1 : 320\,000$

$L_i$	$\rho_1$	$\rho_2$	$C_i$
$L_1$	0,98990	0,01010	3,0009264
$L_2$	1,01017	0,01017	3,0009227
$L_3$	0,99999818	1,99999818	3,0000156
$L_4$ и $L_5$	1,0000	1,0000	3,000094

Для  $\mu = 1$  получим:

Таблица XIV  
 $\mu = 1$

$L_i$	$\rho_1$	$\rho_2$	$C_i$
$L_1$	0,5000	0,5000	8,500
$L_2$	1,6984	0,6984	7,412
$L_3$	0,6984	1,6984	7,412
$L_4$ и $L_5$	1,0000	1,0000	6,0000

где  $\rho$  обозначает расстояние от точки пересечения до какой-либо массы. Для определения точки пересечения с осью  $X$  служит уравнение

$$2\rho^4 + 4\rho^3 + (3 - C)\rho^2 + (5 - C)\rho + 2 = 0. \quad (7^*)$$

Необходимо учитывать только положительные корни уравнений (7) и (7\*).

#### § 4. Периодические решения в окрестности точек либрации (продолжение)

В силу соотношений (10) § 2 дифференциальные уравнения движения в окрестности точки либрации примут следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} \xi + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \eta, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \xi + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом, мы имеем дело с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Мы можем искать решение в следующей форме:

$$\xi = Ae^{\lambda t}, \quad \eta = Be^{\lambda t},$$

где  $A$  и  $B$  будут определяться следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} A \left( \lambda^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} \right) - B \left( 2n\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \right) &= 0, \\ A \left( 2n\lambda - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \right) + B \left( \lambda^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из этих соотношений мы получим уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} & - \left( 2n\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \right) \\ 2n\lambda - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} & \lambda^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left( \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} - 4(1 + \mu) \right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \right)^2 = 0. \quad (3)$$

Природа движения зависит от значений корней этого уравнения. Если  $\lambda^2$  имеет отрицательное значение, то периодические решения существуют. Если таких корней нет, то  $P$  в окрестности точки  $(a, b)$  может оставаться только конечное время. Для вычисления корней нам необходимо знать значения вторых производных от  $\Omega$  для пяти различных точек либрации.

Имеем

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial \rho_1^2} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial a} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial \rho_2^2} \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial a} \right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial a^2}.$$

Для  $\frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}$  имеем аналогичное соотношение. Далее,

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial \rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial a} \frac{\partial \rho_1}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial \rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial a} \frac{\partial \rho_2}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial a \partial b}.$$

С помощью этих выражений получим следующие значения производных в различных точках.

Таблица XV

	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}$
$L_1$	$1 + \mu + \frac{2}{\rho_1^3} + \frac{2\mu}{\rho_2^3}$	$1 + \mu - \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}$	0
$L_2$	$1 + \mu + \frac{2}{\rho_1^3} + \frac{2\mu}{\rho_2^3}$	$1 + \mu - \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}$	0
$L_3$	$1 + \mu + \frac{2}{\rho_1^3} + \frac{2\mu}{\rho_2^3}$	$1 + \mu - \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}$	0
$L_4$	$\frac{3}{4}(1 + \mu)$	$\frac{9}{4}(1 + \mu)$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - \mu)$
$L_5$	$\frac{3}{4}(1 + \mu)$	$\frac{9}{4}(1 + \mu)$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - \mu)$

Значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в трех точках  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  следует взять из уравнений (15) § 2.

Если положить

$$2f = \frac{1}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3},$$

то корни, соответствующие точкам  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , задаются формулой

$$\lambda^2 = -(1 + \mu - f) \pm \sqrt{9f^2 - 4(1 + \mu)f}. \quad (4)$$

Эти корни будут действительными, причем один из них положителен, а остальные отрицательные. Это было доказано Плюммером [50] следующим образом. Из (3) очевидно, что теорема будет доказана, если показать, что

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \right)^2 < 0.$$

Но теперь, согласно табл. XV, в точках  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} > 0$$

и, значит, достаточно показать, что

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} < 0. \quad (5)$$

Но при  $y = 0$  имеем

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2}, \quad (6)$$

В точке  $L_1$  будет

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} = \rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}$$

и, следовательно, выражение

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right)$$

будет отрицательным, так как  $\rho_1 < 1$ .

В точке  $L_2$  имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\rho_1^2} - \rho_1$$

и, значит,

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right);$$

так как  $\rho_1 = \rho_2 + 1$ , то первый сомножитель в этом выражении отрицателен, а второй положителен, следовательно,  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$  отрицательно. Наконец, в точке  $L_3$  также

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right)$$

и, так как здесь  $\rho_2 = \rho_1 + 1$ , то первый сомножитель положителен, а второй отрицателен, и в этом случае  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$  будет также отрицательным.

Отрицательному корню  $\lambda^2$  соответствует периодическое решение дифференциальных уравнений, следовательно, для всех  $\mu$  существуют периодические орбиты в окрестности  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ . Численное решение уравнения (4) дает следующие значения для корней при  $\mu = 1$ ,  $\mu = 0,1$  и  $\mu = 1 : 320000$ :

Таблица XVI

$\mu$	$L_1$		$L_2$		$L_3$	
1	28,63	-16,63	2,671	-3,531	2,671	-3,531
0,1	12,426	-7,482	4,695	-3,091	0,253	-1,261
1 : 320 000	6,413	-4,353	6,176	-4,234	0,000	-1,000

Предельные значения корней для нулевых значений  $\mu$  выражаются для  $L_1$  и  $L_2$  формулой

$$\lambda^2 = 1 \pm \sqrt{28}, \quad (4^*)$$

а для  $L_3$

$$\lambda^2 = -0,5 \pm 0,5. \quad (4^{**})$$

Периодические решения в окрестности  $L_4$  и  $L_5$  могут быть легко изучены. По данным значениям производных получим уравнения для  $\lambda$  в обеих точках:

$$4\lambda^4 + 4(1 + \mu)\lambda^2 + 27\mu = 0. \quad (7)$$

Корни этого уравнения действительны, если

$$(1 + \mu)^2 > 27\mu,$$

т. е. при

$$\mu < 0,0401. \quad (8)$$

Если  $\mu$  меньше этого значения, то оба значения отрицательны, и тогда имеем два различных типа периодических орбит.

Если  $\mu > 0,0401$ , то никаких периодических решений в окрестности этих точек не существует.

Барроу [51] выполнил некоторые расчеты для отыскания периодических орбит при  $\mu = 1$  в окрестности  $L_4$  и не обнаружил их, что и следовало ожидать, так как таковых, по крайней мере в близкой окрестности этой точки, при указанном значении  $\mu$  нет.

Итак, периодические решения для  $L_4$  и  $L_5$  существуют только при малых значениях  $\mu$ . Поэтому попытаемся разложить корни уравнения (7) по степеням  $\mu$ . Тогда для одного из корней (7)

$$\lambda^2 = -6,75\mu - 38,8125\mu^2,$$

а для другого

$$\lambda^2 = -1 + 5,75\mu + 38,8125\mu^2.$$

Каждому корню  $\lambda$  соответствует значение  $A : B$ . Общее решение (1) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^4 A_i e^{\lambda_i t}, \\ \eta &= \sum_{i=1}^4 B_i e^{\lambda_i t}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  связаны друг с другом соотношением

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{2\sqrt{1+\mu}\lambda_i + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b}}{\lambda_i^3 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}}. \quad (10)$$

Четыре из коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  могут быть выбраны произвольно. Эти произвольные постоянные мы обозначим через  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$ . Соответствующие значения  $A_i$  затем получаются из (10).

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два сопряженных чисто мнимых корня, так что, если положить  $v^2 = -\lambda^2$ , соответствующие  $v_1$  и  $v_2$  будут действительными. Для краткости положим также

$$r = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}, \quad t = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}.$$

Имеем, следовательно,

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{t}{v^2 + r} - \frac{2\sqrt{1+\mu}v_1}{v^2 + r}\sqrt{-1},$$

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{t}{v^2 + r} - \frac{2\sqrt{1+\mu}v_2}{v^2 + r}\sqrt{-1}.$$

Отделим в  $A_1$  и  $A_2$  действительные и мнимые части, полагая

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{-1},$$

$$A_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \sqrt{-1};$$

тогда можем написать

$$B_1 = \beta_1 + \beta_2 \sqrt{-1},$$

$$B_2 = \beta_1 - \beta_2 \sqrt{-1}.$$

Далее имеем

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = 2\alpha_1 \cos v_2 t + 2\alpha_2 \sin v_2 t.$$

Если произвольные постоянные  $B_3$  и  $B_4$  выбрать равными нулю, то будет существовать периодическое решение вида

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2\alpha_1 \cos v_2 t + 2\alpha_2 \sin v_2 t, \\ \eta &= 2\beta_1 \cos v_2 t + 2\beta_2 \sin v_2 t; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

здесь коэффициенты связаны зависимостью

$$\left. \begin{aligned} (v_2^2 + r) \alpha_1 &= -t\beta_1 - 2nv_2\beta_2, \\ (v_2^2 + r) \alpha_2 &= 2nv_2\beta_1 - t\beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

и тогда уравнение (3) примет вид

$$(v^2 + r)(v^2 + s) = 4n^2 v^2 + t^2. \quad (11^{**})$$

Из (11\*) и (11\*\*) получим

$$\begin{aligned} (v_2^2 + r)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) &= -t(\beta_1^2 + \beta_2^2), \\ (v_2^2 + r)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= -2nv_2(\beta_1^2 + \beta_2^2), \\ (v_2^2 + r)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) &= (v_2^2 + s)(\beta_1^2 + \beta_2^2). \end{aligned}$$

Уравнение орбиты, описываемой  $P$ , получим, исключая время, из уравнений (11). Таким путем находим

$$4 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \xi & \alpha_2 \\ \eta & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \xi \\ \beta_1 & \eta \end{vmatrix}^2$$

или

$$4 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2) \xi^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \eta^2 - 2 (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) \xi \eta$$

или, подставляя значения  $\alpha$  и  $\beta$ ,

$$R^2 = (v^2 + r) \xi^2 + (v^2 + s) \eta^2 + 2t \xi \eta, \quad (12)$$

где

$$R^2 = \frac{16n^2 v^2}{v^2 + r} (\beta_1^2 + \beta_2^2). \quad (12^*)$$

Принимая во внимание значения  $r$ ,  $s$  и  $t$ , из табл. XV находим, что кривая (12) для всех точек либрации представляет собой эллипс. Итак, для  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$   $t=0$  и большая ось эллипса лежит на оси абсцисс. Позже мы возвратимся к исследованию этой кривой. Для  $L_4$  и  $L_5$  оси системы координат нужно повернуть так, чтобы они совпали с осями эллипса. Если положить

$$\xi = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

$$\eta = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

то для угла  $\theta$  получим значение

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2t}{r-s} \quad (13)$$

или, по табл. XV,

$$\operatorname{tg} 2\theta = \pm \sqrt{3} \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad (13^*)$$

где знак «+» соответствует точке  $L_4$ , а знак «—» точке  $L_5$ . Когда существуют периодические решения, то масса  $\mu$  всегда меньше 0,004 и из (13\*) очевидно, что угол  $\theta$  по абсолютной величине не превышает  $30^\circ$ . Таким образом, одна из осей эллипса направлена примерно к большей массе, а другая пересекает эту линию под прямым углом. Для полуосей эллипса  $a$  и  $b$  получим значения

$$\frac{R^2}{a^2} = (v^2 + r) \cos^2 \theta + (v^2 + s) \sin^2 \theta + t \sin 2\theta,$$

$$\frac{R^2}{b^2} = (v^2 + r) \sin^2 \theta + (v^2 + s) \cos^2 \theta - t \sin 2\theta,$$

которые могут быть записаны также в форме

$$\frac{R^2}{a^2} \cos 2\theta = (v^2 + r) \cos^2 \theta - (v^2 + s) \sin^2 \theta,$$

$$\frac{R^2}{b^2} \cos 2\theta = (v^2 + s) \cos^2 \theta - (v^2 + r) \sin^2 \theta.$$

Можно легко получить точные значения полуосей. Принимая во внимание, что для периодических решений величина  $\mu$  мала, можно рекомендовать использовать разложения в ряды по степеням  $\mu$ . Приближенно имеем

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \mu,$$

$$\cos^2 \theta = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \mu,$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \mu.$$

Далее имеем (точно)

$$r = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \mu,$$

$$s = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \mu.$$

Следует различать два случая для  $v^2$ , которые соответствуют двум корням (11\*):

$$1) \quad v^2 = 6,75 \mu.$$

Здесь

$$R^2 = 144\mu (\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

$$a^2 = 16 (\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

$$b^2 = 48\mu (\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

так что

$$b = \sqrt{3\mu a}. \quad (14)$$

Эксцентриситет эллипса всегда близок к единице. Наибольшее значение  $b : a$ , которое может встретиться, будет

$$\max \frac{b}{a} = \sqrt{0,12} = 0,35.$$

Если  $m_2$  — Земля, для которой положим  $\mu = 1 : 320\,000$ , то  $\frac{b}{a} = 0,00306$ . Если  $\mu$  — масса Юпитера (мы предполагаем, что  $m_1$  обозначает массу Солнца), то большая ось эллипса в 19 раз больше малой оси.

Для второго корня (11\*)

$$2) \quad v^2 = 1 - 5,75\mu$$

имеем

$$R^2 = \frac{61}{7} - \frac{848}{49}\mu,$$

и далее,

$$a^2 = \frac{64}{7}(\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

$$b^2 = \frac{16}{7}(\beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Обе оси остаются конечными при нулевом значении  $\mu$ . Большая ось вдвое превосходит малую.

Итак, через каждую точку, достаточно близкую к точке  $L_4$  или  $L_5$ , можно провести две кривые, которые соответствуют двум различным периодическим решениям задачи.

Необходимо заметить, что значения полуосей эллипсов в случаях 1) и 2) непосредственно не сравнимы друг с другом, так как  $\beta_1^2 + \beta_2^2$  зависит не только от начальных значений координат, но также и от значения корня  $v$ , который в обоих случаях оказывается различным.

Выразим  $a$  и  $b$  непосредственно через начальные значения координат. Если их обозначить через  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , то по (11\*\*)

$$\frac{16n^2v^2}{v^2+r}(\beta_1^2 + \beta_2^2) = R^2 = (v^2+r)\xi_0^2 + (v^2+s)\eta_0^2 + 2t\xi_0\eta_0.$$

Предположим, ради простоты, что  $\eta_0 = 0$ ; тогда

$$16 n^2v^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) = (v^2 + r)^2 \xi_0^2, \quad (15)$$

следовательно, в случае 1)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{1}{192\mu} \xi_0^2,$$

а в случае 2)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{49}{256} \xi_0^2,$$

так что полуоси эллипса принимают следующие значения:

$$1) \quad \left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{12\mu} \xi_0^2, \\ b^2 &= \frac{1}{4} \xi_0^2, \end{aligned} \right\}$$

$$2) \quad \left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{7}{4} \xi_0^2, \\ b^2 &= \frac{7}{16} \xi_0^2. \end{aligned} \right\}$$

Во всех этих формулах  $\xi_0$  представляет собой значение абсциссы той точки, в которой кривая пересекается с осью  $\xi$ .

Следует отметить, что для всех кривых этого семейства эксцентриситет имеет одно и то же значение, а именно: для 1)  $\sqrt{1-3\mu}$  и для 2)  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ . Малые оси обеих кривых также имеют конечное значение. Большая ось во втором случае также имеет конечное значение, в то время как в первом случае большая ось неограниченно возрастает, если  $\mu$  стремится к нулю.

Интересно отметить, что периодические орбиты можно классифицировать по значениям постоянной Якоби. Каждому значению  $C$  соответствует не более одной периодической кривой в окрестности каждой из точек либрации. Интеграл Якоби записывается в виде

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 2\Omega - C.$$

Выразим  $C$  через начальные значения координат  $\xi_0$  и  $\eta_0$ . Из (11) получаем

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -2\nu_2\alpha_1 \sin \nu_2 t + 2\nu_2\alpha_2 \cos \nu_2 t, \\ \eta' &= -2\nu_2\beta_1 \sin \nu_2 t + 2\nu_2\beta_2 \cos \nu_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

Полагая в этих уравнениях и в (11)  $t = 0$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= 2\alpha_1, & \xi'_0 &= 2\nu_2\alpha_2, \\ \eta_0 &= 2\beta_1, & \eta'_0 &= 2\nu_2\beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При помощи (11\*) можно  $\xi'_0$  и  $\eta'_0$  выразить через  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , а затем также и через  $\xi_0$  и  $\eta_0$ . Имеем

$$\begin{aligned} 2\nu_2\alpha_2 &= t\alpha_1 + (\nu^2 + s)\beta_1, \\ 2\nu_2\beta_2 &= -(\nu^2 + r)\alpha_1 - t\beta_1, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} 2n\xi'_0 &= t\xi_0 + (\nu^2 + s)\eta_0, \\ 2n\eta'_0 &= -(\nu^2 + r)\xi_0 - t\eta_0, \end{aligned}$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned} 4n^2 (\xi_0'^2 + \eta_0'^2) &= [t^2 + (\nu^2 + r)^2]\xi_0^2 + \\ &+ [t^2 + (\nu^2 + s)^2]\eta_0^2 + [\nu^2 + r + \nu^2 + s] 2t\xi_0\eta_0. \end{aligned}$$

Если  $\Omega$  разложить по степеням  $\xi$  и  $\eta$ , то получим, учитывая соотношения (10) § 2,

$$2\Omega = 2\Omega_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} \xi^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b} \xi\eta + \dots,$$

где  $\Omega_0$  обозначает величину  $\Omega$  в соответствующей точке либра-

ции. Если мы, как и ранее, точку  $(\xi_0, \eta_0)$  выберем так, чтобы  $\eta_0 = 0$ , то получим

$$C = 2\Omega_0 + \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} - \frac{1}{4n^2} (t^2 + (v^2 + r)^2) \right] \xi_0^2. \quad (17)$$

При помощи ранее найденных значений производных и корней для точек  $L_4$  и  $L_5$  получаем в случае 1)

$$C = 2\Omega_0 + \frac{3}{16} \xi_0^2,$$

в случае 2)

$$C = 2\Omega_0 - \frac{7}{16} \xi_0^2.$$

Из этих выражений мы находим, что семейству кривых 1) соответствуют такие значения  $C$ , которые несколько превышают  $2\Omega_0$ , а второму семейству, наоборот, значения  $C$ , меньшие  $2\Omega_0$ . Кривые, которые соответствуют первому корню, мы назовем семейством  $d$ -кривых, а кривые, соответствующие второму корню, семейством  $e$ -кривых. Каждому значению  $\xi_0$  соответствуют два значения  $C$ , в то время как каждому значению  $C$ , мало отличающемуся от  $2\Omega_0$ , только одно значение  $\xi_0$ .

Как было доказано в предыдущем параграфе, для  $L_4$  и  $L_5$  имеем

$$2\Omega_0 = 3(1 + \mu). \quad (17^*)$$

Это наименьшее значение  $C$ , для которого кривая Хилла имеет действительную ветвь. Возьмем значение  $C$ , которое несколько превышает минимальное значение (17\*). В этом случае граничная кривая Хилла состоит из двух эллипсоподобных ветвей, окружающих точки  $L_4$  и  $L_5$ . Уравнения этих эллипсов суть

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \xi \eta = C - 3(1 + \mu).$$

Сопоставляя эти эллипсы с эллипсами (12), находим, что оси обоих эллипсов параллельны. Периодические орбиты семейства  $d$  охватывают подобные эллипсы, которые образуют граничную кривую для значений  $C$ , несколько больших  $3(1 + \mu)$ .

Для  $C < 3(1 + \mu)$  никакой граничной кривой не существует. Однако также имеются периодические решения, а именно, кривые семейства  $e$ . Барроу впервые заметил, что существование граничной кривой не является необходимым условием для существования периодических решений.

Период обращения  $P$  по орбите может быть легко найден. Если период обращения по орбите семейства  $d$  обозначить через

$\tau_4$ , а для орбиты семейства  $e$  через  $\tau_5$ , то в общем случае

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}.$$

Период обращения  $m_1$  и  $m_2$  вокруг общего центра масс задавался уравнением

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}},$$

так что

$$\tau = \frac{\sqrt{1+\mu} T}{\nu}. \quad (18)$$

Если здесь вместо  $\nu$  подставить те значения, которые соответствуют семействам  $d$  и  $e$ , то найдем следующие приближенные значения периодов:

$$\tau_4 = \frac{T}{\sqrt{6,75\mu}},$$

$$\tau_5 = T(1 + 3,375\mu).$$

Период обращения для всех орбит одного семейства общий. Для семейства  $e$  период обращения приблизительно равен  $T$ , а для семейства  $d$  период весьма велик.

Возьмем, например,  $\mu = 1 : 320\,000$ , т. е.  $m_2$  будет обозначать массу Земли, а  $m_1$  — массу Солнца; тогда будем иметь  $\tau_4 = 217,8$  лет,  $\tau_5 = 1$  год + 5,546 минуты.

Возвратимся теперь к рассмотрению периодических орбит в окрестности точек либрации  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ . Эти орбиты определялись уравнением

$$R^2 = (\nu^2 + r)\xi^2 + (\nu^2 + s)\eta^2,$$

где  $R^2$  имеет значение (12\*). Полуоси эллипсов в силу соотношения (12\*) имеют значения

$$a^2 = \frac{16n^2\nu^2}{(\nu^2 + r)^2} (\beta_1^2 + \beta_2^2),$$

$$b^2 = \frac{16n^2\nu^2}{(\nu^2 + r)(\nu^2 + s)} (\beta_1^2 + \beta_2^2) = 4(\beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Подставляя сюда вместо  $\beta_1^2 + \beta_2^2$  выражение (15), получим

$$a^2 = \xi_0^2,$$

$$b^2 = \frac{(\nu^2 + r)^2}{4n^2\nu^2} \xi_0^2 = \frac{\nu^2 + r}{\nu^2 + s} \xi_0^2. \quad (19)$$

Эксцентриситет этих эллипсов не зависит от  $\xi_0$  и имеет для всех орбит, охватывающих точки  $L_1$ ,  $L_2$  или  $L_3$ , одно и то же значение.

Из табл. XV для  $r$  и  $s$  следует, что

$$v^2 + r > v^2 + s$$

и, следовательно,  $b$  является большой полуосью эллипсов. Малая полуось, как и можно было ожидать, равна  $\xi_0$ .

При помощи табл. XV мы получили числовые значения постоянных, характеризующих эллипсы около  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  для  $\mu = 1$ ,  $\mu = 0,1$  и  $\mu = 1 : 320\,000$  (см. табл. XVII—XIX). Следуя Дарвину, мы относим эти кривые соответственно к семействам периодических орбит  $a$ ,  $\beta$  и  $c$ ;  $\tau^0$  — угол поворота линии  $m_1 m_2$  за промежуток времени, в течение которого  $P$  совершает один оборот по своей орбите.

Таблица XVII

Семейство периодических орбит  $a$ 

	$\mu = 1$	$\mu = 0,1$	$\mu = 1 : 320\,000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+34,000	+15,388	+9,120
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	-14,000	-6,044	-3,060
$v^2$	+16,63	+7,482	+4,353
$v^2 \div r$	+50,63	+22,87	+13,473
$v^2 \div s$	+2,63	+1,438	+1,293
$b : a$	4,387	3,938	3,227
$e$	0,974	0,968	0,951
$\tau : T$	0,347	0,384	0,479
$\tau^0$	124°8	138°0	172°6

Мы еще должны определить направление движения по различным орбитам. Для этой цели достаточно положить  $\eta_0 = 0$ , и в таком случае направление движения можно определить по знаку  $\eta_0$ . Но

$$2n\eta_0 = -(v^2 + r)\xi_0.$$

Так как  $v^2 + r$  для всех кривых положительно, то все орбиты описываются в одном направлении, которое противоположно направлению обращения масс  $m_1$  и  $m_2$  вокруг их общего центра инерции.

При помощи (17) можно выразить постоянную интеграла Якоби через начальное значение  $\xi_0$  координаты  $\xi$ . Получим значения постоянной Якоби.

Таблица XVIII

Семейство периодических орбит  $b$ 

	$\mu = 1$	$\mu = 0,1$	$\mu = 1 : 320\,000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+8,280	+6,703	+8,884
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	-1,140	-1,704	-2,942
$v^2$	+3,531	+3,091	+4,234
$v^2 + r$	+11,811	+9,799	+13,118
$v^2 + s$	+2,391	+1,387	+1,292
$b : a$	2,221	2,659	3,187
$e$	0,893	0,929	0,951
$\tau : T$	0,752	0,597	0,486
$\tau^0$	270°9	214°8	175°0

Таблица XIX

Семейство периодических орбит  $c$ 

	$\mu = 1$	$\mu = 0,1$	$\mu = 1 : 320\,000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+8,280	+3,484	+3,000
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	-1,140	-0,032	0,000
$v^2$	+3,531	+1,261	+1,000
$v^2 + r$	+11,811	+4,745	+4,000
$v^2 + s$	+2,391	+1,169	+1,000
$b : a$	2,221	2,015	2,000
$e$	0,893	0,869	0,867
$\tau : T$	0,752	0,934	1,000
$\tau^0$	270°9	336°2	360°0

Через каждую точку в окрестности  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  можно провести одну, и притом только одну периодическую орбиту первого класса. Для орбит семейства  $a$  постоянная Якоби всегда меньше  $C_1$ , что является необходимым, так как граничная кривая при  $C = C_1$  имеет двойную точку в  $L_1$ . По аналогичным соображениям  $C$  должно быть меньше  $C_2$  для семейства  $b$ , а для семейства  $c$  меньше чем  $C_3$ .

Таблица XX

Семейство	$\mu = 1$	$\mu = 0,1$	$\mu = 1 : 320\,000$
<i>a</i>	8,500—286,0 $\xi_0^2$	4,0182—103,5 $\xi_0^2$	3,0009264—36,22 $\xi_0^2$
<i>b</i>	7,412—9,16 $\xi_0^2$	3,8876—15,12 $\xi_0^2$	3,0009227—34,16 $\xi_0^2$
<i>c</i>	7,412—9,16 $\xi_0^2$	3,4905—1,63 $\xi_0^2$	3,0000156—1,00 $\xi_0^2$
<i>d</i>	—	—	3,000094 + $\frac{3}{16} \xi_n^2$
<i>e</i>	—	—	3,000094 — $\frac{7}{16} \xi_n^2$

Наоборот, через каждую точку в окрестности  $L_4$  и  $L_5$  можно всегда провести две периодические орбиты, одна из которых, принадлежащая к семейству *d*, с весьма большим периодом, возрастающим неограниченно при уменьшающихся значениях  $\mu$ , а другая — с периодом, несколько большим периода обращения  $m_1$  и  $m_2$  вокруг их общего центра масс.

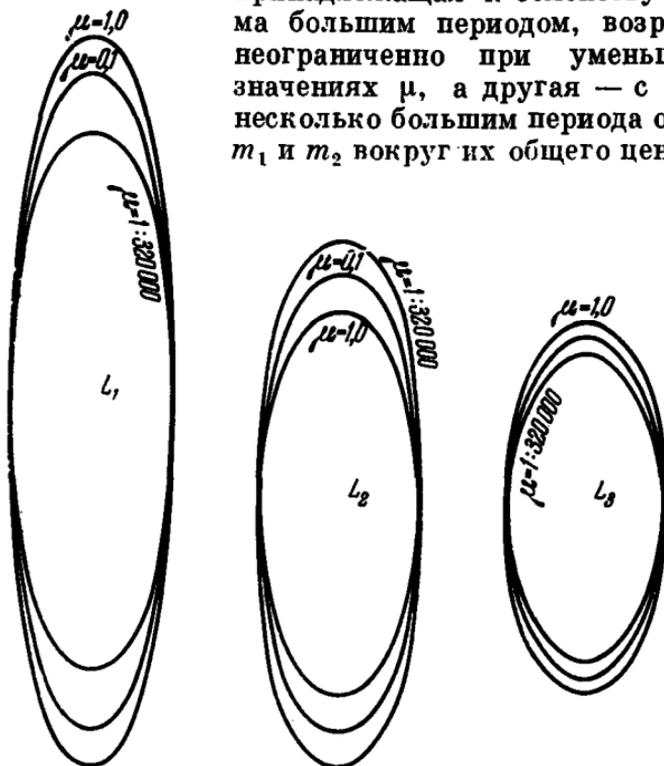


Рис. 29.

На рис. 29 представлены орбиты, характеристики которых приведены в таблицах XVII — XIX. Расстояние точки пере-

сечения кривой с осью  $\xi$  до соответствующей точки либрации для всех орбит одно и то же. Кривые вокруг  $L_3$  изображены

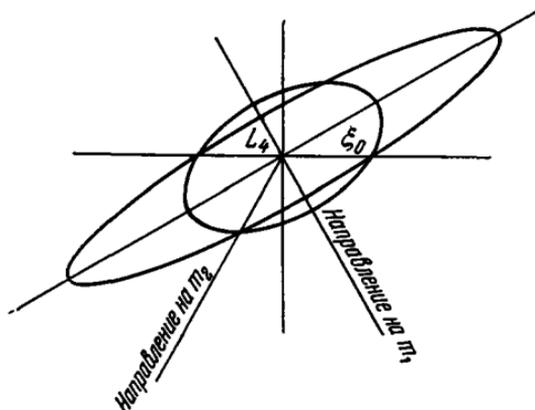


Рис. 30.

несколько неточно, поскольку при  $\mu = 0,1$  и  $\mu = 1 : 320\,000$  по масштабу они должны почти совпадать.

На рис. 30 представлены периодические орбиты вблизи  $L_4$  для  $\mu = 0,01$  а не для,  $\mu = 1 : 320\,000$ , так как в последнем случае большая ось эллипса семейства с была бы весьма большой.

### § 5. Периодические решения в окрестности масс

Если астероид  $P$  находится в одной из масс  $m_1$  или  $m_2$ , то  $\rho_1$  или  $\rho_2$  будет равно нулю и, следовательно,  $\Omega$  становится бесконечно большим. Значит, потенциал  $\Omega$  в окрестности точек  $m_1$  и  $m_2$  нельзя разложить в ряды по возрастающим степеням координат. Поэтому исследование периодических орбит в окрестности притягивающих масс связано с большими трудностями, чем исследование орбит в окрестности точек либрации. Рассматриваемую здесь проблему также нельзя считать полностью решенной, несмотря на то, что благодаря очень глубоким и в высшей степени интересным исследованиям Хилла открыты важные свойства решений.

Если поместить начало координат в центре масс  $m_1$  и  $m_2$ , то дифференциальные уравнения движения  $P$  запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где постоянную тяготения мы положили равной единице, а единицы массы и расстояния оставили неопределенными. Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= \frac{m_1 + m_2}{a^3}, \\ U &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}, \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

где  $a$  обозначает расстояние между  $m_1$  и  $m_2$ . Здесь

$$\rho_1^2 = \left( x - \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \right)^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = \left( x + \frac{m_1}{m_1 + m_2} a \right)^2 + y^2,$$

и, следовательно,

$$m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 = (m_1 + m_2) (x^2 + y^2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2$$

или, учитывая (1\*),

$$\frac{m_1}{a^3} \rho_1^2 + \frac{m_2}{a^3} \rho_2^2 = n^2 (x^2 + y^2) + n^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} a^2.$$

Если положить

$$2\Omega = m_1 \left( \frac{\rho_1^2}{a^3} + \frac{2}{\rho_1} \right) + m_2 \left( \frac{\rho_2^2}{a^3} + \frac{2}{\rho_2} \right), \quad (2^*)$$

то уравнения движения можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти уравнения при  $a = m_1 = 1$  переходят в уравнения (6) § 2. Выбор единиц мы сделаем несколько позже.

Для исследования движения в окрестности одной из масс, например,  $m_2$ , положим

$$\left. \begin{aligned} x &= - \frac{m_1}{m_1 + m_2} a + \xi, \\ y &= \eta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\Omega$  дается формулой (2\*).

Все члены в  $\Omega$ , за исключением

$$\frac{m_1}{\rho_2} = \frac{m_2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

можно разложить в ряды по степеням  $\xi$  и  $\eta$ . Имеем

$$\rho_1^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2,$$

$$\rho_2^2 = \xi^2 + \eta^2 = \rho^2$$

и

$$\frac{1}{\rho_1} = (a^2 + \rho^2 - 2a\xi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{\xi}{a} - \frac{\rho^2}{2a^2} + \frac{3}{2} \frac{\xi^2}{a^2} + \dots \right);$$

следовательно,

$$\frac{\rho_1^2}{a^3} + \frac{2}{\rho_1} = \frac{3}{a} + \frac{3\xi^2}{a^3} + \dots$$

Постоянные члены и члены третьего и высших порядков отбросим; тогда будем иметь

$$2\Omega = \frac{3m_1\xi^2}{a^3} + m_2 \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^3} + \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \quad (5)$$

или

$$2\Omega = 3n^2\xi^2 - \frac{2m_2}{a^3}\xi^2 + \frac{m_2}{a^3}\eta^2 + \frac{2m_2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Распорядимся теперь единицами расстояния и массы так, чтобы

$$n = m_2 = 1, \quad (6)$$

и тогда получим

$$2\Omega = 3\xi^2 + \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - \frac{2}{a^3}\xi^2 + \frac{1}{a^3}\eta^2$$

или

$$2\Omega = \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + 3\xi^2 - \frac{2}{1+m_1}\xi^2 + \frac{1}{1+m_1}\eta^2. \quad (5^*)$$

Вследствие сделанного выбора единиц расстояние  $a$  между  $m_1$  и  $m_2$  определится формулой

$$a = \sqrt[3]{1+m_1}. \quad (6^*)$$

Если, например, обе массы равны друг другу, то  $a = \sqrt[3]{2}$ , а если  $m_1$  — Солнце,  $m_2$  — Земля, то имеем

$$a = \sqrt[3]{1+320\,000} = 68,4. \quad (6^{**})$$

При выбранных единицах дифференциальные уравнения движения  $P$  в окрестности массы  $m_2$  будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2 \frac{d\eta}{dt} + \left( \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} - 3 + \frac{2}{1+m_1} \right) \xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2 \frac{d\xi}{dt} + \left( \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} - \frac{1}{1+m_1} \right) \eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Уравнения (7) допускают интеграл Якоби:

$$\left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\rho} + \left( 3 - \frac{2}{1+m_1} \right) \xi^2 + \frac{1}{1+m_1} \eta^2 - C, \quad (8)$$

а граничная кривая Хилла определяется уравнением

$$\frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \left( 3 - \frac{2}{1+m_1} \right) \xi^2 + \frac{1}{1+m_1} \eta^2 - C = 0. \quad (8^*)$$

Проведенные Хиллом исследования периодических орбит в окрестности массы относятся к случаю, когда масса  $m_1$  весьма велика по сравнению с  $m_2$ . Его метод, впрочем, может быть применен при произвольном значении  $m_1$ . Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, исследованного Хиллом и имеющего важные астрономические приложения.

Если  $m_1$  весьма велико, то находим, что последние члены уравнений (7) намного меньше предыдущих. Так как эти уравнения были получены в предположении, что членами третьего и высших порядков в  $\Omega$ , а следовательно, членами второго и высших порядков в (7) можно пренебречь, то членами

$$\frac{2x}{1+m_1} \quad \text{и} \quad \frac{\eta}{1+m_1}$$

при очень больших значениях  $m_1$  также можно пренебречь, ибо они сравнимы по величине с  $\xi^2$  и  $\eta^2$ . При этих предположениях уравнения (7) примут форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2 \frac{d\eta}{dt} + \left( \frac{1}{\rho^3} - 3 \right) \xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2 \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{\rho^3} \eta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\rho^3 = \xi^2 + \eta^2.$$

Эти уравнения были положены Хиллом в основу его исследований. Они своеобразны, так как не содержат какого-либо параметра, и поэтому рассматриваются как канонические уравнения задачи. Это свойство связано с выбором единиц массы и расстояния, и на этом основании Хилл называет эти единицы канониче-

скими. Заметим, однако, что это свойство утрачивается, если массы  $m_1$  и  $m_2$  одного порядка, и в этом случае надлежит использовать уравнения (7).

Из (9) получим интеграл

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\rho} + 3\xi^2 - C. \quad (10)$$

Тогда уравнение граничной кривой будет

$$\frac{2}{\rho} + 3\xi^2 - C = 0. \quad (10^*)$$

Эта кривая, конечно, представляет упрощенную форму общей граничной кривой астероидной задачи трех тел, которая была обстоятельно исследована в § 3, поэтому мы лишь вскользь упомянем о свойствах кривой (10\*).

Каждому значению  $\xi$  соответствует определенное значение  $\rho$ , значит, граничная кривая симметрична относительно оси  $\xi$ . Каждому значению  $\rho$  соответствует либо два значения  $\xi$ , либо ни одного. Эти значения равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Кривая также симметрична относительно оси  $\eta$ . Она является алгебраической кривой шестого порядка.

Координата  $\xi$  не может быть произвольно большой. Очевидно, что максимальное значение дается неравенством

$$-\sqrt{\frac{C}{3}} < \xi < \sqrt{\frac{C}{3}}.$$

Когда  $\eta$  неограниченно возрастает, то  $\xi$  стремится к одному из этих предельных значений, и кривая имеет две прямолинейные асимптоты, параллельные оси  $\eta$ , расположенные на расстоянии  $\xi = \pm \sqrt{\frac{C}{3}}$ . Расположение кривой между этими линиями зависит от значений  $C$ .

Ось  $\eta$  пересекается только в двух точках, которые даются формулой

$$\eta = \pm \frac{2}{C}. \quad (11)$$

Для определения точек пересечения кривой с осью  $X$  получим уравнение третьей степени:

$$\xi^3 - \frac{1}{3}C\xi + \frac{2}{3} = 0. \quad (12)$$

Если  $C$  весьма велико, то кривая состоит из очень малой замкнутой кривой около  $m_2$  и двух ветвей, неограниченно приближающихся к асимптотам (рис. 31).

Если уменьшать  $C$ , то в конце концов придем к такому значению  $C_1$ , при котором внутренняя кривая соприкоснется с внешними. Тогда уравнение (12) должно обладать двойным корнем. Это имеет место при

$$C = 3\sqrt[3]{3}, \quad (13)$$

т. е. при  $C = 4,326$ . Соответствующее значение  $\xi$  будет

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 0,6934. \quad (13^*)$$

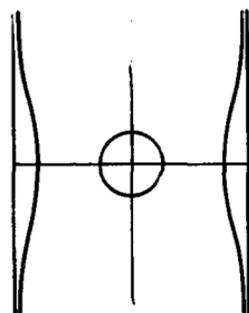


Рис. 31.

Определенные таким образом точки совпадают с точками либрации  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 32).

Если  $C < 4,326$ , то граничная кривая состоит из двух незамкнутых ветвей (рис. 33). Когда  $C > 4,326$ , то любая орбита в окрестности массы  $m_2$  должна оставаться во внутренней ветви

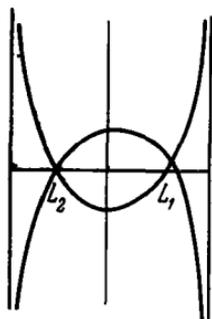


Рис. 32.

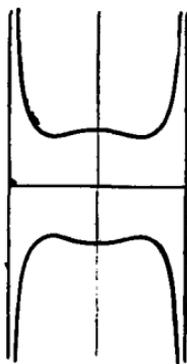


Рис. 33.

граничной кривой, и тогда можно сказать, что движение является устойчивым.

Если рассматривать систему Земля — Солнце, то расстояние между  $m_1$  и  $m_2$  в канонических единицах равно 68,4. Точка либрации отстоит от  $m_2$  на расстоянии  $\frac{a}{100}$ , что согласуется с результатами § 1.

При отыскании периодических решений дифференциальных уравнений (9) можно избрать два различных пути. Можно исходить из определенных начальных условий, вычислять при помощи численного интегрирования соответствующие орбиты и варьировать начальные условия до тех пор, пока не получим кривой,

которая замыкается, либо можно в (9) подставить вместо  $\xi$  и  $\eta$  периодические ряды и разыскивать при помощи уравнений (9) коэффициенты этих рядов.

Учитывая сложную структуру уравнений (9), едва ли представляется целесообразным испытывать последний метод. Тем не менее Хилл имел смелость приняться за решение этой проблемы и ему действительно удалось преодолеть трудности задачи и решить ее по крайней мере для одного важного на практике случая.

Главным препятствием на этом пути является наличие в дифференциальных уравнениях отрицательных степеней расстояния  $\rho$ . Очевидно, что трудности преодолеть не удастся, если непосредственно пользоваться уравнениями (9) и строить рекуррентные формулы для коэффициентов.

Эту трудность Хилл преодолел, исключив из дифференциальных уравнений  $\frac{1}{\rho}$  при помощи интеграла Якоби. Исключение было выполнено следующим образом.

Умножая уравнения (9) соответственно на  $-\eta$  и  $\xi$  и складывая результаты, получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt}\right) + 3\xi\eta &= 0, \\ \xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{1}{\rho} - 3\xi^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Но интеграл Якоби дает

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} C,$$

и при помощи его второе из уравнений (14) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) + \\ + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{9}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} C = 0. \end{aligned} \quad (14^*)$$

Можно заменить исходные дифференциальные уравнения (9) уравнением (14\*) и первым из уравнений (14). Постоянную  $C$  будем считать известной. Вводя для  $\xi$  и  $\eta$  ряды Фурье, для их коэффициентов получим рекуррентные формулы второго порядка, которые содержат все бесконечное число коэффициентов. Уравнения (9) привели бы к рекуррентным формулам восьмого порядка. Вывод рекуррентных формул был выполнен Хиллом следующим образом.

Сначала он ввел вместо  $\xi$  и  $\eta$  две новые зависимые переменные  $u$  и  $s$  при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} u &= \xi + \sqrt{-1} \eta, \\ s &= \xi - \sqrt{-1} \eta, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

так что

$$us = \xi^2 + \eta^2 = \rho^2,$$

и получил новые уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + 2\sqrt{-1} \frac{du}{dt} + \frac{u}{(us)^{3/2}} - \frac{3}{2}(u+s) &= 0, \\ \frac{d^2s}{dt^2} - 2\sqrt{-1} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{(us)^{3/2}} - \frac{3}{2}(u+s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Целесообразно вместо  $t$  ввести новую независимую переменную. Если эти уравнения допускают периодическое решение с периодом  $\frac{2\pi}{\nu}$ , то согласно теореме Фурье координаты можно разложить по положительным и отрицательным степеням величины

$$\zeta = e^{\sqrt{-1} \nu(t-t_0)}, \quad (17)$$

где  $t_0$  обозначает постоянную интегрирования. Значение числа  $\nu$  пока не определено. Вводя с помощью (17)  $\zeta$  в качестве независимой переменной, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 \zeta^2 \frac{d^2u}{d\zeta^2} + (\nu^2 + 2\nu) \zeta \frac{du}{d\zeta} - \frac{u}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) &= 0, \\ \nu^2 \zeta^2 \frac{d^2s}{d\zeta^2} + (\nu^2 - 2\nu) \zeta \frac{ds}{d\zeta} - \frac{s}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 \zeta \frac{d \left[ \zeta \frac{du}{d\zeta} \right]}{d\zeta} + 2\nu \zeta \frac{du}{d\zeta} - \frac{u}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) &= 0, \\ \nu^2 \zeta \frac{d \left[ \zeta \frac{ds}{d\zeta} \right]}{d\zeta} - 2\nu \zeta \frac{ds}{d\zeta} - \frac{s}{(us)^{3/2}} + \frac{3}{2}(u+s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

Выгодно ввести следующий использованный Хиллом оператор

$$D = \zeta \frac{d}{d\zeta}, \quad (19)$$

так что по (18\*)

$$\begin{cases} \left[ v^2 D^2 + 2vD + \frac{3}{2} - \frac{1}{(us)^{3/2}} \right] u + \frac{3}{2} s = 0, \\ \left[ v^2 D^2 - 2vD + \frac{3}{2} - \frac{1}{(us)^{3/2}} \right] s + \frac{3}{2} u = 0, \end{cases}$$

или, если положить  $v = \frac{1}{m}$ ,

$$\left. \begin{cases} \left[ D^2 + 2mD + \frac{3}{2} m^2 - \frac{m^2}{(us)^{3/2}} \right] u + \frac{3}{2} m^2 s = 0, \\ \left[ D^2 - 2mD + \frac{3}{2} m^2 - \frac{m^2}{(us)^{3/2}} \right] s + \frac{3}{2} m^2 u = 0. \end{cases} \right\} \quad (19^*)$$

Во введенных переменных интеграл Якоби записывается в виде

$$Du Ds + \frac{2m^2}{\sqrt{us}} + \frac{3}{4} m^2 (u + s)^2 = C. \quad (20)$$

Член 1:  $(us)^{3/2}$  при помощи (20) будет исключен из (19\*) следующим образом. Умножая уравнения (19\*) соответственно на  $s$  и  $u$ , складывая и вычитая, получим уравнения

$$uD^2s + sD^2u - 2m(uDs - sDu) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 + s^2 + 2us) - \frac{2m^2}{\sqrt{us}} = 0,$$

$$uD^2s - sD^2u - 2m(uDs + sDu) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = 0,$$

или, если первое из этих уравнений сложить с (20), будет:

$$\left. \begin{cases} uD^2s + sD^2u - 2m(uDs - sDu) + Du Ds + \frac{9}{4} m^2 (u + s)^2 = C, \\ uD^2s - sD^2u - 2m(uDs + sDu) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = 0. \end{cases} \right\} \quad (21)$$

Для оператора  $D$  справедливо следующее свойство:

$$D(ab) = aDb + bDa,$$

так что

$$D(uDs - sDu) = uD^2s - sD^2u,$$

$$D^2(us) = uD^2s + sD^2u + 2DuDs,$$

и, следовательно, из (21) получаем дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{cases} D^2(us) - Du Ds - 2m(uDs - sDu) + \frac{9}{4} m^2 (u + s)^2 = C, \\ D[uDs - sDu - 2mus] + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = 0, \end{cases} \right\} \quad (22)$$

в той изящной форме, которая была использована Хиллом, и которая позволяет достаточно легко получить рекуррентные формулы для коэффициентов.

Из периодических орбит, допускаемых данными дифференциальными уравнениями, мы рассмотрим только те, которые в какой-либо момент времени пересекают ось абсцисс  $\xi$  под прямым углом. К этой категории орбит принадлежат те, для которых точка  $P$  после одного оборота вокруг  $m_2$  возвращается в прежнее положение. Если для постоянной интегрирования  $t_0$  выбрать такое значение, что орбита будет пересекать ось абсцисс  $\xi$  под прямым углом в момент  $t_0$ , то, очевидно, для такой орбиты координата  $\xi$  выразится рядом Фурье, в котором будут содержаться только косинусы кратных  $\nu(t - t_0)$ , в то время как координата  $\eta$  представится соответствующим рядом по синусам. Свои исследования Хилл ограничивает такими орбитами, которые в момент  $t_0$  пересекают ось  $\xi$  под прямым углом.

Покажем, что в этом случае ряды Фурье могут содержать только нечетные кратные  $\nu(t - t_0)$ , так что

$$\xi = A_0 \cos \nu(t - t_0) + A_1 \cos 3\nu(t - t_0) + A_2 \cos 5\nu(t - t_0) + \dots,$$

$$\eta = B_0 \sin \nu(t - t_0) + B_1 \sin 3\nu(t - t_0) + B_2 \sin 5\nu(t - t_0) + \dots,$$

или, если положить

$$A_i = a_i + a_{-i-1},$$

$$B_i = a_i - a_{-i-1},$$

и ввести

$$\tau = \nu(t - t_0), \quad (23)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cos(2i+1)\tau, \\ \eta &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \sin(2i+1)\tau. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Вводя сюда определенную при помощи (17) переменную  $\zeta$  и одновременно  $u$  и  $s$ , получим ряды

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \zeta^{2i+1}, \\ s &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{-i-1} \zeta^{2i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

которые необходимо подставить в (22), чтобы получить искомые рекуррентные формулы для коэффициентов  $a_i$ .

Если перемножить два степенных ряда вида

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \zeta^{2i+1} \quad \text{и} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^{2j+1}$$

друг на друга, то их произведением будет степенной ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \zeta^{2i+1} \times \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^{2j+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{j-i-1} \right) \zeta^{2j}, \quad (26)$$

а так как, далее,

$$Du = \sum (2i+1) a_i \zeta^{2i+1}, \quad Ds = \sum (2i+1) a_{-i-1} \zeta^{2i+1},$$

то для  $us$ ,  $u^2$  и т. д. получим следующие ряды:

$$us = \sum_j \left( \sum_i a_i a_{i-j} \right) \zeta^{2j},$$

$$u^2 = \sum_j \left( \sum_i a_i a_{-i-j-1} \right) \zeta^{2j},$$

$$s^2 = \sum_j \left( \sum_i a_i a_{-i-j-1} \right) \zeta^{2j},$$

$$DuDs = - \sum_j \left[ \sum_i (2i+1)(2i-2j+1) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j},$$

$$uD_s - sDu = - \sum_j \left[ \sum_i (4i-2j+2) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j}.$$

$$uD_s + sDu = \sum_j \left[ \sum_i 2j a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j},$$

и, далее,

$$D^2(us) = \sum_j \left[ \sum_i (2j)^2 a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j},$$

$$(u+s)^2 = \sum_j \left[ \sum_i a_i (a_{-i+j-1} + a_{-i-j-1} + 2a_{i-j}) \right] \zeta^{2j},$$

$$u^2 - s^2 = \sum_j \left[ \sum_i a_i (a_{-i+j-1} - a_{-i-j-1}) \right] \zeta^{2j},$$

$$uD^2s - sD^2u = - \sum_j \left[ \sum_i 2j(4i-2j+2) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j} = D(uD_s - sDu).$$

В этих формулах  $i$  и  $j$  принимают все целые числовые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Если теперь приведенные выражения подставить в (22) и определить  $a_i$  таким образом, чтобы коэффициент при  $\zeta^{2j}$  обратился бы в нуль, то получим следующие рекуррентные формулы:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ 4j^2 a_i a_{i-j} + (2i+1)(2i-2j+1) a_i a_{i-j} + 2m(4i-2j+2) a_i a_{i-j} + \frac{9}{4} m^2 a_i (a_{-i+j-1} + a_{-i-j-1} + 2a_{i-j}) \right] = 0,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ 2j(-4i-2j+2) - 2m \right] a_i a_{i-j} + \frac{3m^2}{2} a_i (a_{-i+j-1} - a_{-i-j-1}) = 0,$$

или

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ (2i+1)(2i-2j+1) + 4j^2 + 4(2i-j+1)m + \frac{9}{2} m^2 \right] a_i a_{i-j} + \frac{9}{4} m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (a_{-i+j-1} + a_{-i-j-1}) = 0, \quad (27)$$

$$4j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2i-j+1+m) a_i a_{i-j} - \frac{3}{2} m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (a_{-i+j-1} - a_{-i-j-1}) = 0. \quad (28)$$

Эти формулы справедливы при всех значениях  $j$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , за исключением значения  $j=0$ , для которого получим

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ (2i+1)^2 + 4(2i+1)m + \frac{9}{2} m^2 \right] a_i^2 + \frac{9}{4} m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2 a_i a_{-i-1} = C. \quad (29)$$

Уравнения (27) и (28) взаимно зависимы \*). Это можно показать следующим образом. Если умножить (27) на 2, а (28) на 3, а

\*) Второе из уравнений (28) удовлетворяется тождественно. (Прим. ред.)

затем сложить и вычесть, то получим

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} [8i^2 - 8i(4j-1) + 20j^2 - 16j + 2 + 4m(4i-5j+2) + 9m^2] a_i a_{i-j} + 9m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{-i+j-1} = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} [8i^2 + 8i(2j+1) - 4j^2 + 8j + 2 + 4m(4i+j+2) + 9m^2] a_i a_{i-j} + 9m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{-i-j-1} = 0. \quad (31)$$

Легко видеть, что эти два уравнения идентичны. Действительно, если в (30)  $i$  заменить на  $i+j$ , а затем  $j$  на  $-j$ , то это уравнение перейдет в (31). Следовательно, как для положительных, так и для отрицательных значений  $j$  следует рассматривать только одно из этих уравнений.

Уравнения (31) и (29) представляют собой бесконечную систему уравнений второго порядка, из которой надлежит определить бесконечное множество коэффициентов  $a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2} \dots$  и т. д.\*). Хилл не испугался этой задачи. Однако при этом он вынужден был наложить на задачу одно ограничение. В приведенных уравнениях наряду с коэффициентами  $a_i$  и целыми числами  $i$  и  $j$  входит величина  $m$ , которую можно рассматривать как параметр. Коэффициенты  $a_i$  и  $a_j$  следует рассматривать как функции этого параметра; а priori можно ожидать, что эти функции имеют сложную структуру. Получить общие выражения для  $a_i$ , справедливые при любых значениях  $m$ , вряд ли возможно. Поэтому необходимо исследовать значения  $a_i$  в окрестности определенного значения  $m$ . Эти исследования сравнительно легко проводятся в окрестности  $m=0$ . Соответствующие ряды очень важны в приложениях к практическим задачам астрономии и были подробно рассмотрены Хиллом.

Так как период равен  $2\pi m$ , то при малых  $m$  имеем дело с такими орбитами, которые замыкаются через короткий промежуток времени, даже после одного оборота вокруг  $m_2$ . Нет сомнения в том, что существуют также периодические орбиты долгого периода (эти орбиты в одном из следующих параграфов мы будем изучать с другой точки зрения), и особенный интерес представляют орбиты, которые соответствуют очень большим значениям  $m$ . Поэтому было бы весьма важно исследовать решение уравне-

\* ) Автор употребляет слово *eliminieren*. (Приж. ред.)

ний (31) в окрестности  $m = \infty$ , хотя это исследование представляется связанным с трудностями (можно, вероятно, показать, что для таких орбит ряды Фурье непригодны).

Что касается разложения в окрестности  $m = 0$ , то без труда находим, что ряды для  $a_j$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_j &= m^{2j} (a_j^{(0)} + a_j^{(1)} m + a_j^{(2)} m^2 + \dots), \\ a_{-j} &= m^{2j} (a_{-j}^{(0)} + a_{-j}^{(1)} m + a_{-j}^{(2)} m^2 + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где  $a_j^{(s)}$  обозначают определенные числовые коэффициенты. Однако Хилл не искал непосредственно  $a_{\pm j}$  в виде ряда по степеням  $m$ , а избрал путь, имеющий определенные практические преимущества.

Если в (30) и (31) положить  $i$  равным нулю и затем равным  $j$ , то найдем, что эти уравнения содержат следующие члены: в (30)

$$\begin{aligned} & [20j^2 - 16j + 2 - 4(5j - 2)m + 9m^2] a_0 a_{-j} + \\ & \quad + [-4j^2 - 8j + 2 - 4(j - 2)m + 9m^2] a_0 a_j \end{aligned}$$

и в (31)

$$\begin{aligned} & [-4j^2 + 8j + 2 + 4(j + 2)m + 9m^2] a_0 a_{-j} + \\ & \quad + [20j^2 + 16j + 2 + 4(5j + 2)m + 9m^2] a_0 a_j. \end{aligned}$$

Далее находим, что в (30) и (31) содержатся также и другие члены, которые имеют множителем  $a_j$  и  $a_{-j}$ , однако эти члены имеют форму  $m^4 a_{\pm j}$  или умножаются на степени  $m$  выше четвертой. Кроме того, можно вывести, что все члены в (30) и (31), если для коэффициентов предполагается форма (32), по крайней мере порядка  $m^{2j}$ , и что в членах порядка  $m^{2j}$  имеются только коэффициенты  $a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \dots, a_{\pm 3}, \dots, a_{\pm j}$ . Таким образом, эти уравнения пригодны для определения коэффициентов  $a_{\pm j}$  методом последовательных приближений.

Для этой цели Хилл сначала получил уравнения, которые содержат только  $a_j$  и не содержат  $a_{-j}$ , что, очевидно, получается, если уравнение (30) умножить на

$$-4j^2 + 8j + 2 + 4(j + 2)m + 9m^2,$$

а уравнение (31) на

$$-20j^2 + 16j - 2 + 4(5j - 2)m - 9m^2,$$

и сложить результаты.

Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 48ij [4i(j-1) + 4j^2 + 4j - 2 - 4m(i-j+1) + m^2] a_i a_{i-j} - \\ - 9m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} [-4j^2 + 8j + 2 + 4(j+2)m + 9m^2] a_i a_{-i+j-1} - \\ - 9m^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} [-20j^2 + 16j - 2 + 4m(5j-2) - 9m^2] a_i a_{-i-j-1} = 0. \end{aligned}$$

Если это уравнение разделить на коэффициент при  $a_j a_0$ , равный  $48j^2 [8j^2 - 2 - 4m + m^2]$ ,

и ввести обозначения Хилла

$$\left. \begin{aligned} [j, i] &= -\frac{i}{j} \cdot \frac{4(j-1)i + 4j^2 + 4j - 2 - 4m(i-j+1) + m^2}{8j^2 - 2 - 4m + m^2}, \\ [j] &= -\frac{3m^2}{16j^2} \cdot \frac{4j^2 - 8j - 2 - 4m(j+2) - 9m^2}{8j^2 - 2 - 4m + m^2}, \\ (j) &= -\frac{3m^2}{16j^2} \cdot \frac{20j^2 - 16j + 2 - 4m(5j-2) + 9m^2}{8j^2 - 2 - 4m + m^2}, \end{aligned} \right\} \quad (33^*)$$

то уравнение примет вид

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} [j, i] a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{-i-j-1} = 0. \quad (33)$$

Коэффициенты обладают свойством

$$[j, 0] = 0, \quad [j, j] = -1,$$

за исключением коэффициента  $[0, 0]$ , который остается неопределенным.

В (33)  $j$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Вторая или третья сумма (33), в зависимости от знака  $j$ , на четыре порядка меньше членов низшего порядка уравнения, и поэтому приближенно уравнение можно записать в одной из следующих форм:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [j, i] a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{-i+j-1} = 0, \\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} [-j, i] a_i a_{i+j} + (-j) \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{-i+j-1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33^{**})$$

Если здесь последовательно полагать  $j = 1, 2, 3, \dots$  и т. д., то получим следующие уравнения, которые позволят найти значения  $a_{\pm j}$  с большой степенью точности. В каждом случае ошибка в  $a_{\pm j}$  будет порядка  $m^{2j+4}$ :

$$a_0 a_1 = [1] a_0 a_0,$$

$$a_0 a_{-1} = (-1) a_0 a_0,$$

$$a_0 a_2 = [2] (a_0 a_1 + a_1 a_0) + [2, 1] a_1 a_{-1},$$

$$a_0 a_{-2} = (-2) (a_0 a_1 + a_1 a_0) + [-2, -1] a_1 a_{-1},$$

$$a_0 a_3 = [3] (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [3, 1] a_1 a_{-2} + [3, 2] a_2 a_{-1},$$

$$a_0 a_{-3} = (-3) (a_0 a_2 + a_1 a_2 + a_2 a_0) + [-3, -1] a_{-1} a_2 + \\ + [-3, -2] a_{-2} a_1$$

и т. д.

Здесь Хилл впервые ввел разложения по степеням  $m$ . Если приведенные выражения разложить в ряд по степеням  $m$ , то сходимость этих разложений будет зависеть от сходимости разложения знаменателей правой части. Эти знаменатели имеют форму  $8j^2 - 2 - 4m + m^2$  и их разложения по степеням  $m$  очевидно сходятся тем быстрее, чем больше  $j$ . Наиболее неблагоприятный случай для сходимости — при  $j = 1$ , когда знаменатель имеет вид

$$6 - 4m + m^2.$$

Если дробь с этим знаменателем будет разлагаться по степеням  $m$ , то это разложение будет сходиться для  $m$ , по модулю меньших, чем корни уравнения

$$6 - 4m + m^2 = 0,$$

т. е. при  $|m| < \sqrt{6}$ . Теперь воспользуемся известной теоремой из теории рядов: если дан степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

с радиусом сходимости  $R$ , то имеет место соотношение

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

Чем больше радиус сходимости, тем быстрее уменьшаются по абсолютной величине коэффициенты  $A_n$ . Итак, если возможно вместо  $m$  ввести величину  $x$ , которая мало отличается от  $m$ , и если будет показано, что разложение по степеням  $x$  обладает большим радиусом сходимости, чем  $\sqrt{6}$ , то разложение коэффициентов  $a_i$  по степеням  $x$  предпочтительнее, чем разложение по степеням  $m$ .

Поскольку задача неопределенна, то функциональную зависимость между  $m$  и  $x$  можно выбрать произвольно. Примем, следуя Хиллу, что

$$m = \frac{x}{1 + \alpha x},$$

и оставим  $\alpha$  пока неопределенным; тогда знаменатель выразится через  $x$  в форме

$$(1 - 4\alpha + 6\alpha^2)x^2 - (4 - 12\alpha)x + 6.$$

Полагая это выражение равным нулю, для квадрата модуля корня получим выражение

$$\frac{6}{1 - 4\alpha + 6\alpha^2},$$

которое имеет максимум при  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Этот максимум равен 18, так что разложение знаменателя при  $|x| < \sqrt{18}$  сходится. Так как здесь положили

$$m = \frac{x}{1 + \frac{1}{3}x}, \quad (34)$$

то необходимо разложить в ряд по степеням  $x$  знаменатель  $1 + \frac{1}{3}x$ . Это разложение сходится только для  $|x| < 3$ . Таким образом, радиус сходимости равен 3, в то время как радиус сходимости при разложении по степеням  $m$  равен  $\sqrt{6} = 2,45$ . Хилл добился более быстрой сходимости, разлагая в ряд по степеням  $x$ . Он мог бы добиться еще более сильной сходимости, если бы принял для  $\alpha$  другое значение. Выбор, очевидно, получается наиболее выгодным, если абсолютная величина корней знаменателя будет равна корню уравнения  $1 + \alpha x = 0$ ; таким образом, если

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{6}{1 - 4\alpha + 6\alpha^2},$$

т. е. при  $\alpha = \frac{1}{4}$ , делаем подстановку

$$m = \frac{x}{1 + \frac{1}{4}x},$$

и в этом случае радиус сходимости будет равен 4.

Задавая  $x$  с помощью (34), Хилл разложил коэффициенты  $a_i$  в ряды по степеням  $x$ . Первые члены этих разложений с точностью

до шестых степеней  $x$  будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_0} &= \frac{3}{16} x^2 + \frac{3}{8} x^3 + \frac{21}{144} x^4 - \frac{1}{6} x^5 - \frac{103\,767}{331\,776} x^6 - \dots, \\ \frac{a_{-1}}{a_0} &= -\frac{19}{16} x^2 - \frac{7}{8} x^3 + \frac{11}{144} x^4 + \frac{5}{36} x^5 - \frac{2644}{331\,776} x^6 + \dots, \\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{25}{256} x^4 + \frac{553}{1920} x^5 + \frac{7486}{28\,800} x^6 + \dots, \\ \frac{a_{-2}}{a_0} &= \frac{69}{1920} x^5 + \frac{1863}{28\,800} x^6 + \dots, \\ \frac{a_3}{a_0} &= \frac{833}{12\,288} x^6 - \dots, \\ \frac{a_{-3}}{a_0} &= \frac{64}{12\,288} x^6 + \dots\end{aligned}$$

Мы предпочтем в последующем использовать параметр  $m$ . Тогда, согласно Хиллу, предыдущие выражения примут вид:

$$\left. \begin{aligned}\frac{a_1}{a_0} &= \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 - \frac{30\,749}{2^{12} \cdot 3^8} m^6 - \dots, \\ \frac{a_{-1}}{a_0} &= -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{36} m^4 - \frac{14}{27} m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4} m^6 + \dots, \\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{25}{256} m^4 + \frac{803}{1920} m^5 + \frac{6109}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} m^6 + \dots, \\ \frac{a_{-2}}{a_0} &= \frac{23}{640} m^5 + \frac{299}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2} m^6 + \dots, \\ \frac{a_3}{a_0} &= \frac{833}{2^{12} \cdot 3} m^6 + \dots, \\ \frac{a_{-3}}{a_0} &= \frac{1}{192} m^6 + \dots\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Формула (29) дает нам  $C$  выраженным через  $a_0$  и  $m$ . Если подставить приведенные значения  $a_1$ ,  $a_{-1}$  и т. д., то получим

$$C = a_0^2 \left( 1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 + * - \frac{1147}{128} m^4 - \frac{1399}{96} m^5 - \frac{2047}{256} m^6 - \dots \right). \quad (36)$$

Из величин  $a_0$ ,  $C$  и  $m$  только одну следует рассматривать как произвольную. Если в интеграл Якоби

$$Du Ds + \frac{2m^2}{\sqrt{us}} + \frac{3}{4} m^2 (u + s)^2 = C$$

подставить вместо  $u$  и  $s$  ряды, то, очевидно, полагая в левой части

постоянный член равным  $C$ , получим выражение вида

$$C = a_0^2 P_1 + \frac{P_2}{a_0},$$

где  $P_1$  и  $P_2$  обозначают степенные ряды по  $m$ , из которых  $P_2$  умножен на  $m^2$ . Если из этого уравнения и (36) исключить  $C$ , то  $a_0$  выразится через  $m$ . Таким образом, получаем

$$a_0 = m^{2/3} \left( 1 - \frac{2}{3} m + \frac{7}{18} m^2 - \frac{4}{81} m^3 + \frac{19565}{62208} m^4 - \dots \right). \quad (37)$$

Этот ряд записывается Хиллом в форме

$$a_0 = \frac{m^{2/3}}{(1+m)^{2/3}} \left( 1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2304} m^4 - \right. \\ \left. - \frac{67}{288} m^5 - \frac{45}{41} \frac{293}{472} m^6 - \dots \right).$$

Из (36) и (37) для  $C$  получим ряд

$$C = m^{4/3} \left( 1 + \frac{8}{3} m + \frac{7}{18} m^2 - \frac{140}{81} m^3 - \frac{39533}{7776} m^4 - \dots \right). \quad (38)$$

Этим полностью завершается аналитическое представление периодической орбиты в окрестности одной из притягивающих масс. Если задан синодический период бесконечно малой массы (спутника), то приведенные формулы непосредственно дают выражения для координат как функций времени. Предпочтительнее несколько изменить формулы (24), введя полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$ , так что

$$\xi = \rho \cos \varphi,$$

$$\eta = \rho \sin \varphi.$$

Тогда уравнения (24) могут быть записаны в форме

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos(\varphi - \tau) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cos 2i\tau, \\ \rho \sin(\varphi - \tau) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \sin 2i\tau. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Синодический период обращения Луны в 12,37 раза меньше года. Полагая  $m = 1 : 12,37$ , получим периодическую орбиту спутника, который обладает тем же самым синодическим периодом обращения, что и Луна. Ряды (39) имеют здесь следующие

выражения:

$$\begin{aligned} r \cos(\varphi - \tau) &= \\ &= a_0 (1 - 0,007180039455 \cos 2\tau + 0,000006042459 \cos 4\tau + \\ &\quad + 0,000000032576 \cos 6\tau + 0,00000000180 \cos 8\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \sin(\varphi - \tau) &= a_0 (0,010211454396 \sin 2\tau + 0,000005714879 \sin 4\tau + \\ &\quad + 0,000000027499 \sin 6\tau + 0,00000000157 \sin 8\tau), \end{aligned}$$

где

$$a_0 = 0,999093141962 \frac{m^{3/2}}{(1+m)^{3/2}}.$$

Следует помнить, что здесь в основу положена каноническая единица длины, значение которой для этого случая ранее было нами дано. Эти выражения, используемые Хиллом в его теории движения Луны, представляют прекрасный пример быстрой сходимости рядов.

Все периодические орбиты, которые рассматриваются здесь, пересекают ось абсцисс под прямым углом. Интересно выяснить зависимость между расстоянием этой точки пересечения  $\xi_0$  от  $m_2$  и параметром  $m$ . При  $t = t_0$  получим

$$\xi_0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$$

и из (35) и (37) найдем

$$\xi_0 = m^{3/2} \left( 1 - \frac{2}{3} m - \frac{11}{18} m^2 - \frac{89}{162} m^3 + \frac{1477}{7775} m^4 - \dots \right). \quad (40)$$

Обращение этого ряда имеет вид

$$m = \xi_0^{2/3} (1 + \alpha_1 \xi_0^{2/3} + \alpha_2 \xi_0^{4/3} + \alpha_3 \xi_0^{2/3} + \dots). \quad (40^*)$$

При этом следует вспомнить, что период имел выражение  $2\pi m$ . Формула (40\*) показывает, что для рассматриваемых периодических орбит период возрастает вместе с расстоянием  $\xi_0$ , по крайней мере при весьма малых  $m$ . В этом состоит главное различие между периодическими орбитами в окрестности  $m_2$  и периодическими орбитами в окрестности точек либрации. Для последних период не зависел от расстояния до точек либрации, но имел определенное значение, которое было общим для всех периодических орбит в окрестности каждой точки либрации.

Хотя  $\xi_0$  при малых значениях  $m$  монотонно возрастает вместе с  $m$ , однако это не имеет места, когда  $m$  становится большим. При возрастании  $m$  достигается максимальное значение, для

которого

$$\frac{d\xi_0}{dm} = 0, \quad (41)$$

и если  $m$  принимает еще бóльшие значения, то точка пересечения периодической кривой с осью абсцисс смещается обратно в направлении к  $m_2$ .

Применяя ряд (40), вместо (41) получаем уравнение следующего вида:

$$\frac{2}{3} - \frac{10}{9} m - \frac{44}{27} m^2 - \frac{979}{486} m^3 - \dots = 0,$$

корень которого  $m = 1 : 2,86$ . Однако следует заметить, что здесь члены четвертого и высших порядков, которыми мы пренебрегаем, могут дать заметную поправку к этому значению.

Хилл рассматривал этот вопрос не с помощью своих аналитических формул, которые позволяют выполнить достаточно точное исследование этого вопроса, а при помощи численного интегрирования. Для значения  $m$ , которое соответствует максимальному значению  $\xi_0$ , он получил приближенно 2,8.

Полагая в формуле (39)  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , получим расстояние точки пересечения кривой с осью  $\eta$ . Если это расстояние обозначить через  $\eta_0$ , то согласно (24)

$$\eta_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{-1} + a_2 - a_3 + \dots,$$

или, по (35),

$$\eta_0 = a_0 \left( 1 + m^2 + \frac{7}{6} m^3 + \frac{1633}{2304} m^4 + \dots \right).$$

Если сюда подставить значение  $a_0$  из (37), то получим

$$\eta_0 = m^{2/3} \left( 1 - \frac{2}{3} m + \frac{25}{18} m^2 + \frac{73}{162} m^3 - \dots \right). \quad (42)$$

При весьма малых значениях  $m$  величина  $\eta_0$  возрастает вместе с периодом. Для более детального исследования значения  $\eta_0$  приведенное представление недостаточно, и, видимо, здесь недостаточно учитывать члены высшего порядка, а необходимо воспользоваться либо численным интегрированием, либо разложением по степеням времени.

Полагая в (39)  $m = \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}$  и т. д., получим формулы, справедливые для спутников, содержащих за промежуток времени  $T$  10, 9, 8 и т. д. синодических оборотов. Этим способом, а также частично при помощи численного интегрирования, Хилл получил табл. XXI.

Периодические орбиты в окрестности  $m_1$ 

Число сино- дических оборотов за время $T = \frac{1}{m}$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\eta_0 : \xi_0$	Скорость в соединении, $v_0$	Скорость в квадратуре, $v_1$	$v_1 : v_0$	$C$
$12\frac{59}{160}$	0,17610	0,17864	1,01446	2,22295	2,16484	0,97386	6,50888
10	0,19965	0,20418	1,02271	2,06163	1,97693	0,95892	5,88686
9	0,21209	0,21813	1,02849	1,98730	1,88501	0,94853	5,61562
8	0,22652	0,23485	1,03678	1,90904	1,78250	0,93372	5,33873
7	0,24342	0,25543	1,04934	1,82721	1,66572	0,91162	5,05535
6	0,26332	0,28167	1,06969	1,74333	1,52851	0,87677	4,76409
5	0,28660	0,31699	1,10605	1,66247	1,35953	0,81777	4,46103
4	0,31232	0,36897	1,18138	1,60111	1,13480	0,70876	4,13277
3	0,33235	0,45973	1,38329	1,62141	0,79387	0,48962	3,72018
2	0,302	0,684	2,26	2,00	0,18	0,09	2,89
1,78265	0,27180	0,78190	2,87676	2,24102	0,00000	0,00000	2,55788

Первый из этих спутников имеет такой же период обращения, что и Луна вокруг Земли. Спутник, приведенный в последней строке, будет рассмотрен ниже более детально.

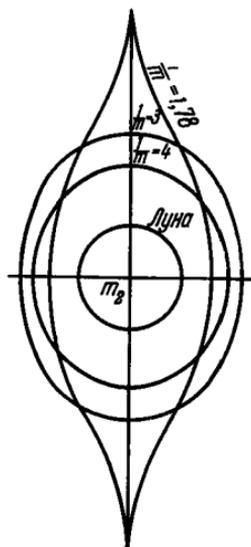


Рис. 34.

На рис. 34 показаны некоторые периодические орбиты, содержащиеся в табл. XXI, а именно те, которые соответствуют значениям  $\frac{1}{m} = 4; 3; 1,78$  и, кроме того, орбита Луны. Видно, что при  $\frac{1}{m} < 3$  точка пересечения с осью  $\xi$  приближается к массе  $m_2$ .

Все рассмотренные здесь периодические орбиты пересекают ось  $\xi$ , а равным образом и ось  $\eta$ , под прямым углом, или, говоря более точно, всегда имеется точка, в которой эти орбиты пересекаются с осями под прямым углом. Но это не препятствует тому, чтобы в других точках, которые являются двойными, орбиты могли бы составлять с осями острый угол. Такие «петли» можно изучать, как показал Пуанкаре [2], вполне успешно при помощи разложений в ряды по степеням времени.

Если периодическая орбита в момент  $t = 0$  пересекает ось ординат под прямым углом, то в окрестности этой точки координаты можно выразить в виде степенных рядов вида

$$\left. \begin{aligned} \xi &= v_0 t + A_3 t^3 + A_5 t^5 + \dots, \\ \eta &= \eta_0 + A_2 t^2 + A_4 t^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Подставляя эти ряды в дифференциальные уравнения (9), для коэффициентов получим рекуррентные формулы, из которых следуют значения

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot 2 A_2 &= -2v_0 - \eta_0^{-2}, \\ 2 \cdot 3 A_3 &= 4A_2 + 3v_0 - \eta_0^{-3} v_0, \\ 3 \cdot 4 A_4 &= -6A_3 + \frac{1}{2} \eta_0^{-4} (3v_0^2 + 4\eta_0 A_2), \\ 4 \cdot 5 A_5 &= 8A_4 + 3A_3 + \frac{3}{2} \eta_0^{-5} (v_0^2 + 2v_0 A_2) v_0 - \eta_0^{-3} A_3, \end{aligned} \right\} \quad (43^*)$$

и, таким образом, имеем

$$\xi = v_0 t - \left( \frac{1}{3\eta_0^2} + \frac{v_0}{6} + \frac{v_0}{6\eta_0^3} \right) t^3 + \dots \quad (44)$$

Для того чтобы на оси  $\eta$  появилась «петля», необходимо, чтобы  $\xi$  обращалось в нуль для трех близких значений  $t$ . Первое условие для возникновения такой точки состоит, следовательно, в том, что  $v_0$  весьма мало, так что уравнение (44) приближенно будет иметь вид

$$\xi = v_0 t - \frac{1}{3\eta_0^2} t^3 + \dots \quad (44^*)$$

Если  $v_0$  отрицательно, то ось  $\eta$  будет пересекаться с орбитой в прямом направлении и может обращаться в нуль только при одном значении  $t$ , а именно при  $t = 0$ . Но если ось  $\eta$  пересекается в противоположном направлении, то  $v_0$  положительно, и координата  $\xi$  может обращаться в нуль при трех значениях  $t$ , а именно, при

$$\left. \begin{aligned} t &= 0, \\ t &= \pm \eta_0 \sqrt{3v_0}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Так как здесь было сделано предположение, что  $v_0$  мало, то такие «петли» должны встречаться всякий раз, когда скорость движения спутника по орбите мала, движение происходит в направлении, обратном движению  $m_1$  и  $m_2$  вокруг их центра масс, а ось  $\eta$  пересекается под прямым углом. Но отсюда отнюдь не следует, что все подобные орбиты являются также периодическими. Для этого необходимо, чтобы «петля» была на определенном расстоянии от  $m_2$ . В капонических единицах длины это расстояние равно 0,7819. Хилл при помощи численного интегрирования нашел, что спутник, который будет выброшен со скоростью, равной 2,2410, на расстоянии 0,2718 под прямым углом к оси  $\xi$ , достигнет оси  $\eta$  с нулевой скоростью на расстоянии 0,7819 (см. последнюю строку таблицы). Хилл назвал этот спутник «the moon of the last lunation», а Пуанкаре показал указанным выше образом, что аналитическое продолжение орбиты этой «луны» приводит к нетлеобразной орбите.

Такие точки могут встретиться и на оси абсцисс. Если орбита перпендикулярна к оси  $\xi$ , то можно написать

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + B_2 t^2 + B_4 t^4 + \dots, \\ \eta &= v_0 t + B_3 t^3 + B_5 t^5 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

тогда из дифференциальных уравнений (9) получим

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot 2 B_2 &= 2v_0 + 3\xi_0 - \xi_0^{-2}, \\ 2 \cdot 3 B_3 &= -4B_2 - \xi_0^{-3} v_0, \\ 3 \cdot 4 B_4 &= 6B_3 + 3B_2 + \frac{1}{2} \xi_0^{-4} (3v_0^2 + 4\xi_0 B_2), \\ 4 \cdot 5 B_5 &= -8B_4 + \frac{3}{2} \xi_0^{-5} (v_0^2 + 2\xi_0 B_2) - \xi_0^{-3} B_3. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Хилл приводит значения коэффициентов  $B$  до  $B_9$ . Итак, имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \frac{1}{2} \left( 2v_0 + 3\xi_0 - \frac{1}{\xi_0^2} \right) t^2 + \dots, \\ \eta &= v_0 t - \left( \frac{2}{3} v_0 + \frac{v_0}{6\xi_0^3} + \xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2} \right) t^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (45^*)$$

Если  $v_0$  весьма мало, то приближенно будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \frac{3}{2} \left( \xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2} \right) t^2 + \dots, \\ \eta &= v_0 t - \left( \xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2} \right) t^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (46^{**})$$

Координата  $\eta$  может обращаться в нуль при трех близких значениях, а именно:

$$\left. \begin{aligned} t &= 0, \\ t &= \pm \sqrt{\frac{v_0}{\xi_0 - \frac{1}{3\xi_0^2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

если под знаком корня стоит положительная величина. Таким образом, необходимо различать два случая:

$$(a) \quad \xi_0 > \frac{1}{3\xi_0^2}, \quad \xi_0 > \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

в котором  $v_0$  должно быть положительным. Значит, здесь «петли» встречаются в том случае, если ось абсцисс пересекается орбитой в прямом направлении при малой скорости. Расстояние двойной точки здесь больше  $\xi_0$ .



Рис. 35.

$$(b) \quad \xi_0 < \frac{1}{3\xi_0^2}.$$

Петля имеет место при отрицательных значениях  $v_0$ . Граничная точка между этими двумя случаями, абсцисса которой равна

$1 : \sqrt[3]{3}$ , согласно (13\*) совпадает с точкой либрации  $L_1$ .

Следовательно, бесконечно малые петли могут встречаться в каждой точке оси  $\xi$ , если тела бросаются с перпендикулярной к оси  $\xi$  скоростью. При этом для возникновения «петли» направления, в котором тела проходят ось  $\xi$ , должны быть вне  $L_1$  прямыми, а внутри  $L_1$  — обратными.

Без специальных исследований нельзя установить, встречаются ли периодические орбиты с такими «петлями». Но, вероятно, существует периодическая орбита, которая имеет в  $L_1$  вершину, причем скорость при приближении тела к точке  $L_1$  стремится к нулю. Аналитическим продолжением этих орбит будут кривые, которые образуют «петли» вокруг  $L_1$ . Из вычислений Дарвина мы находим, что периодические орбиты этого рода существуют.

Приведенные исследования о бесконечно малых «петлях» будут неполны, поскольку они непосредственно неприменимы к «петлям» в точке  $L_1$  или близкой окрестности этой точки. В упомянутой точке не следует пренебрегать в коэффициенте при  $v_0$  в (46\*) множителем с  $t^3$ .

Для орбиты, которая пересекает под прямым углом ось  $\xi$  в точке  $L_1$ , справедливы степенные ряды

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + v_0 t^2 + \dots, \\ \eta &= v_0 t - \left( \frac{2}{3} v_0 + \frac{v_0}{6\xi_0^3} \right) t^3 + \dots,\end{aligned}$$

или, так как

$$\frac{1}{\xi_0^3} = 3,$$

то

$$\eta = v_0 \left( t - \frac{7}{6} t^3 + \dots \right).$$

Следовательно, координата  $\eta$  обращается в нуль при  $t = 0$  и также (в предположении, что это должно быть справедливым при отбрасывании членов с  $t^5$ ,  $t^7$  и т. д.) при  $t = \pm \sqrt{\frac{6}{7}}$ . Но это значение  $t$  не является весьма малым, что в приведенном выводе являлось необходимым предположением, и, следовательно, в  $L_1$  нет никаких бесконечно малых петель. Правильнее было бы сказать, что здесь нет никаких петель, которые описывались бы за бесконечно малое время. Более того, возможно, что здесь могут быть бесконечно малые петли, которые описываются за конечное время, и действительно, известно, что этот случай имеет место, так как периодические орбиты семейства  $a$ , которые мы исследовали в § 4, как раз и обладают этим свойством. Период обращения по этим орбитам будет иметь конечную величину также и в том случае, когда размеры орбит бесконечно малы.

Поэтому будет справедливым предположить, что имеются периодические орбиты, которые описывают петлю вокруг  $L_1$ . Время, необходимое спутнику для описания этой петли, согласно

(4\*) § 4 равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{28}-1}} = 0,483 \cdot 2\pi,$$

и корни уравнения  $\eta = 0$  в окрестности  $L_1$  должны быть

$$t = 0,$$

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\sqrt{28}-1}} = 1,52.$$

Этот результат мог бы быть установлен непосредственно из рядов (46\*), если бы эти разложения были сходящимися для столь больших значений  $t$ .

Если исходить из точных уравнений (4) ограниченной круговой задачи трех тел, то выводы Хилла претерпят некоторые изменения, в основном связанные с тем, что периодические орбиты в окрестности  $m_2$  больше не будут симметричными относительно оси  $\eta$ . Спутник «of the last lunation» также будет иметь место, а в равной мере и петлеобразные периодические орбиты, хотя двойная точка больше не будет расположена на оси  $\eta$ .

### § 6. Теорема существования Коши. Теорема Пуанкаре

Наиболее общие исследования периодических решений принадлежат Пуанкаре, который в [2] дал новые и общие методы их построения. При этом он исходил из фундаментальной теоремы о решении дифференциального уравнения, которую мы сначала намерены доказать.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), \quad (1)$$

и пусть функцию  $\varphi$  можно разложить в окрестности  $t = t_0$ ,  $x = x_0$  по степеням  $t - t_0$  и  $x - x_0$ , а значению  $t = t_0$  соответствует значение  $x = x_0$ ; тогда интеграл (1) можно записать в форме ряда

$$x = x_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \dots, \quad (2)$$

который сходится в определенной конечной окрестности  $t = t_0$ . Коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$  и т. д. определяются однозначным образом, и ряд (2) представляет собой некоторый аналитический интеграл, который при  $t = t_0$  принимает значение  $x = x_0$ .

Это и составляет знаменитую теорему существования Коши.

Эта теорема получила существенное развитие в работе Пуанкаре, благодаря чему он смог сделать в небесной механике далеко идущие выводы. Теорему Пуанкаре мы разделим на три части.

Сначала мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t) \quad (3)$$

и предположим, что функция  $\varphi$  может быть разложена в ряд по степеням  $x$ , а также, что это разложение сходится при  $|x| < a$  и всех значениях  $t$ , таких, что

$$0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Мы не будем предполагать, что функция  $\varphi$  внутри области (4) может быть разложена по степеням  $t$ . Мы рассматриваем  $\varphi$  как аналитическую функцию  $t$  в области (4), которая может быть разложена по степеням  $t - \alpha$  в каждой точке  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < T$ ), но это не означает, что радиус сходимости столь велик, что разложение по степеням  $t$  сходится во всей области (4).

Рассмотрим интеграл уравнения (3), который при  $t = 0$  обращается в нуль. Для этой цели введем функцию  $x'$ , которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x', t), \quad (3^*)$$

где относительно функции  $\varphi'$  в правой части (3\*) делается предположение, что она может быть разложена для  $|x'| < a$  по степеням  $x'$ , а также для всех значений  $t$  из области (4). Записывая это разложение в форме

$$\varphi' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x'^n \quad \left( \begin{array}{l} |x'| < a \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right), \quad (4^*)$$

предположим еще, что все коэффициенты  $B_n$  в области (4) положительны.

Если соответствующий ряд для  $\varphi$  имеет форму

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad \left( \begin{array}{l} |x| < a \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right), \quad (5)$$

то предположим, наконец, что

$$|A_n| < B_n. \quad (6)$$

Когда две функции  $\varphi$  и  $\varphi'$  удовлетворяют неравенству (6), то Пуанкаре выражает это символом

$$\varphi \ll \varphi' \quad (6^*)$$

или, полнее,

$$\varphi \ll \varphi' \quad (\text{Arg } x).$$

Как  $A_n$ , так и  $B_n$  суть произвольные функции  $t$ , для которых должно выполняться неравенство (6) во всей области (4).

Если теперь при  $t = 0$   $x' = 0$ , то можно доказать, что

$$|x| < x' \quad (7)$$

во всей области  $0 \leq t \leq T$ . Действительно, при  $t = 0$  имеем

$$\varphi = \varphi(0, 0) = A_0,$$

$$\varphi' = \varphi'(0, 0) = B_0,$$

и так как по (6)

$$|A_0| < B_0,$$

то, значит,

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| < \frac{dx'}{dt}, \quad (8)$$

причем последнее неравенство сохраняет свою силу для достаточно малых положительных значений  $t$ . Для этих значений  $t$  имеем

$$|x| < x'. \quad (8^*)$$

Неравенство (8\*) должно быть выполнено, если выполняется (8).

Предположим, что (8\*) справедливо от  $t = 0$  до  $t = t_1 < T$  и тогда докажем, что оно должно иметь место также и для значений  $t$ , несколько бóльших  $t_1$ . При  $t = t_1$  имеем

$$x = x_1, \quad x' = x'_1,$$

причем, по предположению,  $|x_1| < x'_1$ . Далее, для  $t = t_1$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x_1, t_1) = \sum A_n(t_1) x_1^n,$$

$$\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x'_1, t_1) = \sum B_n(t_1) x_1'^n,$$

и согласно (6\*) при  $t = t_1$  имеем  $\left| \frac{dx}{dt} \right| < \frac{dx'}{dt}$ , так что (8\*) справедливо для значений  $t$ , несколько бóльших, чем  $t = t_1$ . Таким образом, мы будем продолжать рассуждения до тех пор, пока не достигнем значения  $t = T$ .

Доказав эту лемму, сделаем второй шаг, предположив, что в рассматриваемое дифференциальное уравнение входит параметр  $\mu$ . Относительно дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu) \quad (9)$$

сделаем предположение, что функция  $\varphi(x, t, \mu)$  для  $|x| < a$ ,  $|\mu| < p$  может быть разложена по степеням  $x$  и  $\mu$  при всех

$0 \leq t \leq T$ . Тогда можно записать

$$\varphi = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} A_{ij} x^i \mu^j = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \mu^m \tag{9*}$$

$$\left( \begin{array}{l} |x| < a \quad |\mu| < p \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right).$$

Будем отыскивать интеграл (9), который обращается в нуль при  $t = 0$  и разлагается в ряд по степеням  $\mu$ . Положим

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \tag{10}$$

и получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, \mu) = & \varphi(x_0, t, 0) + \frac{\mu}{1!} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} + \\ & + \frac{\mu^2}{2!} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right)_{\mu=0} + \dots \end{aligned}$$

или согласно (10)

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, \mu) = & \varphi(x_0, t, 0) + \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \\ & + \mu^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial \mu} x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \right) + \dots \\ & \dots + \mu^m \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_m + X_m \right), \end{aligned}$$

где  $X_m$  разлагается в ряд по степеням  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  и, кроме того, зависит от  $x_0$  и  $t$ .

Тогда для  $x_0, x_1$  и т. д. имеем дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \varphi(x_0, t, 0), \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial \mu} x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_m}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_m + X_m. \end{aligned}$$

Затем мы рассмотрим аналогичное уравнение

$$\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x', t, \mu), \tag{11}$$



сначала находим из уравнений (так как при  $t = 0$   $x_1 = x'_1 = 0$ )

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu},$$

$$\frac{dx'_1}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_0} x'_1 + \frac{\partial \varphi'}{\partial \mu},$$

что при малых положительных значениях  $t$  должно иметь место неравенство  $|x_1| < x'_1$ . Повторяя приводившиеся выше рассуждения, приходим к выводу, что это неравенство должно выполняться для всех значений  $t$  между 0 и  $T$ .

Предположим, что таким образом показано, что

$$|x_1| < x'_1, \quad |x_2| < x'_2, \quad \dots, \quad |x_{m-1}| < x'_{m-1};$$

докажем тогда, что справедливо также

$$|x_m| < x'_m.$$

Действительно,  $X_m$  является целой рациональной функцией от  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ , коэффициенты которой суть частные производные от функции  $\varphi$  по  $x_0$  и  $\mu$ ; аналогичное заключение имеет место и для  $X'_m$ . Следовательно,  $|X_m| < X'_m$ . Уравнения

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} x_m + X_m,$$

$$\frac{dx'_m}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_0} x'_m + X'_m,$$

показывают, что, так как при  $t = 0$   $x_m = x'_m = 0$ , то для  $t = 0$

$$\left| \frac{dx_m}{dt} \right| < \frac{dx'_m}{dt}$$

и, следовательно, для малых положительных значений  $t$  должно быть  $|x_m| < x'_m$ . А это позволяет провести те же рассуждения, которые были при доказательстве первой леммы; тогда неравенство (13) должно выполняться для всех  $t$  между 0 и  $T$ .

О вспомогательной функции  $\varphi'(x', t, \mu)$  предполагалось, что

- 1) ее разложение по степеням  $x'$  и  $\mu$  сходится для  $|x'| < a$  и  $|\mu| < p$  при всех  $t$  между 0 и  $T$ .

- 2) коэффициенты в этом разложении больше соответствующих коэффициентов в разложении  $\varphi(x, t, \mu)$  по степеням  $x$  и  $\mu$ .

Теперь задача сводится к построению такой вспомогательной функции.

Если разложение  $\varphi(x, t, \mu)$  по степеням  $x$  и  $\mu$  справедливо также для  $|x| = a$  и  $\mu = p$  (что всегда можно предполагать,

так как в противном случае радиус сходимости можно взять несколько меньший), то всегда имеется такое положительное число  $M$ , что при  $|x| \leq a$ ,  $|\mu| \leq p$  имеем  $|\varphi(x, t, \mu)| < M$ . Тогда по теореме Коши

$$\frac{1}{i! j!} \left| \frac{\partial^{i+j} \varphi}{\partial x^i \partial \mu^j} \right| < \frac{M}{a^i p^j}$$

и, следовательно,

$$\varphi(x, t, \mu) \ll M \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{\mu}{p}\right)^j,$$

или

$$\varphi(x, t, \mu) \ll \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{\mu}{p}\right)}. \quad (14)$$

Функция в правой части (14) удовлетворяет условиям, которые были наложены на вспомогательную функцию  $\varphi'$ . Однако Пуанкаре предпочитает строить другую вспомогательную функцию, так как вспомогательная функция (14) приводит к сложной квадратуре.

Во-первых, заметим, что

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{\mu}{p}\right)} \ll \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \alpha \mu)},$$

если только  $\alpha$  выбрано равным большему из двух чисел  $\frac{1}{a}$  и  $\frac{1}{p}$ .

Далее, очевидно,

$$\frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \alpha \mu)} \ll \frac{1}{1 - \alpha(x + \mu)},$$

что непосредственно находится разложением в ряд по степеням  $x$  и  $\mu$ . Но

$$\frac{\alpha M(x + \mu)}{1 - \alpha(x + \mu)} = \frac{M}{1 - \alpha(x + \mu)} - M,$$

и окончательно имеем

$$\frac{\alpha M(x + \mu)}{1 - \alpha(x + \mu)} \ll \frac{\alpha M(x + \mu)(1 + \alpha(x + \mu))}{1 - \alpha(x + \mu)}.$$

Если выбрать усиливающую функцию  $\varphi'$  так, что

$$\varphi' = \frac{M(x + \mu)(1 + \alpha(x + \mu))}{1 - \alpha(x + \mu)}, \quad (15)$$

то

$$\varphi(x, t, \mu) \ll \varphi' \quad (\text{Arg } x, \mu),$$

если, кроме того, предполагать, что  $\varphi$  обращается в нуль при  $\mu = x = 0$ .

Прежде всего наша задача состоит в интегрировании уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M(x + \mu)(1 + \alpha(x + \mu))}{1 - \alpha(x + \mu)}. \quad (16)$$

Полагая

$$s = \alpha(x + \mu), \quad (17)$$

имеем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Ms(1 + s)}{1 - s},$$

что дает

$$\ln \frac{s}{(1 + s)^2} = Mt + C,$$

где  $C$  обозначает произвольную постоянную.

По предположению, интеграл должен удовлетворять условию, что при  $t = 0$   $x = 0$ . Следовательно,

$$C = \ln \frac{\alpha\mu}{(1 + \alpha\mu)^2},$$

и поэтому

$$\frac{s}{(1 + s)^2} = e^{Mt} \frac{\alpha\mu}{(1 + \alpha\mu)^2}. \quad (18)$$

Интеграл  $s$  должен разлагаться в ряд по степеням  $\mu$ . Полагая

$$A = e^{Mt} \frac{\alpha\mu}{(1 + \alpha\mu)^2}, \quad (19)$$

(18) можно записать в форме

$$s^2 + 2\left(1 - \frac{1}{2A}\right)s + 1 = 0.$$

Отсюда имеем

$$s = \frac{1 - 2A - \sqrt{1 - 4A}}{2A}. \quad (18^*)$$

Выбирая перед квадратным корнем знак минус, получим именно тот интеграл, который при  $\mu = 0$  обращается в нуль. Тот интеграл, которому соответствует перед квадратным корнем знак плюс, наоборот, при  $\mu = 0$  обращается в бесконечность.

Правую часть (18\*) можно разложить в ряд по положительным степеням  $A$ ; тогда получим ряд

$$s = A + 2A^2 + 5A^3 + \dots,$$

который сходится при  $|A| < \frac{1}{4}$ , т. е., если  $\mu$  обозначает положи-

тельное число, при

$$\frac{4\alpha\mu}{(1+\alpha\mu)^2} < e^{-Mt}. \quad (19^*)$$

С другой стороны,  $A$  разлагается по степеням  $\mu$ , если только  $\mu < \frac{1}{\alpha}$ ; это неравенство всегда выполняется по предположению.

Если  $t$  имеет конечное, но произвольно большое значение, то  $\mu$  всегда можно выбрать столь малым, чтобы неравенство (19\*) было выполнено. Следует, однако, заметить, что при возрастании  $t$  до бесконечности радиус сходимости по  $\mu$  стремится к нулю. Таким образом, положить  $t = \infty$  невозможно.

Итак, результат, к которому мы пришли, сводится к следующему.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu). \quad (20)$$

Пусть функция  $\varphi$  обладает следующими свойствами:

1. При всех значениях  $t$  и при  $\mu = x = 0$  она обращается в нуль, так что

$$\varphi(0, t, 0) = 0.$$

2. Она может быть разложена в степенной ряд по степеням  $x$  и  $\mu$ , который сходится, если  $x$  по модулю меньше  $a$ , а положительный параметр  $\mu$  меньше  $p$ , и притом для всех  $t$ , принадлежащих области  $0 \leq t \leq T$ . Тогда можно найти два положительных числа  $M$  и  $\alpha$  таких, что если

$$\varphi' = \frac{M(x + \mu)(1 + \alpha(x + \mu))}{1 - \alpha(x + \mu)},$$

то

$$\varphi \ll \varphi' \quad (\arg x, \mu).$$

Во-вторых, мы доказали, что интеграл дифференциального уравнения  $\frac{dx'}{dt} = \varphi'(x', t, \mu)$  можно разложить в ряд

$$x' = x'_0 + \mu x'_1 + \mu^2 x'_2 + \dots,$$

который сходится при всех  $t$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq t \leq T$  и при достаточно малых  $\mu$ . Верхняя граница  $T$  для  $t$  должна быть конечной, но она может быть взята сколь угодно большой.

Интеграл (20) можно также разложить в ряд

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \quad (21)$$

и так как мы доказали, что  $x \ll x'$ , то ряд (21) также сходится для всех  $t$ , которые принадлежат области  $0 \leq t \leq T$ , при достаточно малых значениях  $\mu$ .

Если, в частности, разложение  $\varphi(x, t, \mu)$  по степеням  $x$  и  $\mu$  будет сходиться для всех действительных значений  $t$ , то ряд (21) сходится для любых сколь угодно больших значений  $t$ , если только  $\mu$  выбрано достаточно малым. Чем меньше выбрано  $\mu$ , тем в общем больше область для  $t$ , в которой (21) сходится. Но мы не можем заключить, что ряд (21) сходится также и для  $t = \infty$ . Сходимость, по терминологии Вейерштрасса, будет условной, если радиус сходимости по  $\mu$  зависит от  $t$  (или, точнее, от  $T$ ).

Здесь предполагается, что рассматривается тот интеграл, который обращается в нуль при  $t = 0$ . Если же  $x$  для  $t = 0$  не равен нулю, а, скажем, равен  $\beta$ , то положим

$$x = \xi + \beta$$

и будем иметь

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi + \beta, t, \mu) = \psi(\xi, t, \mu, \beta). \quad (22)$$

Если функцию  $\psi$  можно разложить по степеням  $\xi$ , то можно использовать ранее доказанную теорему и  $x$  также можно разложить в ряд по степеням  $\mu$ , при условии, что при  $x = \beta$  функция  $\varphi$  не обращается в бесконечность и вообще не имеет какой-либо особой точки.

Условие, которое было оговорено выше, что функция  $\varphi(x, t, \mu)$  при  $\mu = x = 0$  должна обратиться в нуль, также не является необходимым. Действительно, подставляя в (20)

$$x = \xi + \theta(t),$$

находим

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi + \theta, t, \mu) - \frac{d\theta}{dt},$$

и если функцию  $\theta$  определить так, чтобы

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi(\theta, t, 0), \quad (23)$$

то получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi + \theta, t, \mu) - \varphi(\theta, t, 0), \quad (24)$$

и правая часть (24) является функцией от  $\xi$ ,  $t$  и  $\mu$ , которая обращается в нуль при  $\xi = \mu = 0$ . Если еще выбрать начальное значение  $\theta$  при  $t = 0$  равным начальному значению  $\beta$ , тогда интеграл (24), а, значит, также и (20), можно разложить по степеням  $\mu$ . Для этого еще необходимо, чтобы правая часть (24) разлагалась в ряд по степеням  $\xi$ . Говоря иными словами,  $x = \theta(t)$  не проходит ни через одну особую точку функции  $\varphi(x, t, \mu)$ , когда  $t$  принимает все действительные значения от 0 до  $T$ .

## Интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu),$$

в котором функция  $\varphi(x, t, \mu)$  может быть разложена по положительным степеням  $\mu$  в сходящийся ряд для всех  $t$  из области  $0 \leq t \leq T$ , в свою очередь в той же области  $t$  может быть разложен в ряд по положительным степеням  $\mu$ ,

$$x = x_0(t) + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots,$$

если только  $\mu$  взято достаточно малым, и кроме того,  $\varphi(x, t, \mu)$  можно разложить по положительным степеням  $x - x_0(t)$  для всех  $t$  между нулем и  $T$ .

Таково содержание обобщенной Пуанкаре теоремы существования Коши.

Если при  $t = 0$   $x = \beta$ , то согласно (22) имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \psi(\xi, t, \mu, \beta).$$

Если здесь рассматривать  $\beta$  как параметр и если  $\psi$  можно разложить по степеням  $\beta$ , то согласно с изложенным интеграл  $\xi$ , а значит, также и  $x$ , разлагается в ряд по степеням  $\beta$ . Следовательно, при сделанных предположениях интеграл  $x$  можно разложить в ряд по степеням как  $\mu$ , так и постоянной интегрирования  $\beta$ .

Выше предполагалось, что имеется только одно дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \mu).$$

Пусть надлежит проинтегрировать два совместных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, t, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi(x, y, t, \mu);$$

тогда можно провести аналогичные рассуждения и результат совпадет, *mutatis mutandis*, с тем, который имеет место для одного уравнения. Аналогичные результаты справедливы для системы дифференциальных уравнений произвольного порядка.

В задаче  $n$  тел в качестве параметров будут массы планет  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ . Здесь решения можно разложить по степеням  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  для  $0 \leq t \leq T$ , если только предполагать массы достаточно малыми, и если кеплеровы эллипсы, которые

получаются при

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 0,$$

взаимно не пересекаются, ибо в последнем случае возмущающая функция в определенный момент времени становится бесконечно большой. Эти следствия из теоремы Пуанкаре мы рассмотрим более подробно в одном из следующих параграфов.

На этой теореме Пуанкаре основывал свои исследования о периодических решениях в задаче трех тел, которые мы рассмотрим в следующих параграфах.

### § 7. Метод Пуанкаре построения периодических решений

Предположим, что даны дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

и что  $X_i$  суть определенные функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и времени  $t$  и, кроме того, содержат параметр  $\mu$ . Предположим еще, что если время входит явно в правые части (1), то  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) суть периодические функции от  $t$  периода  $T$ . Пусть

$$x_i = \theta_i(t, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

решение уравнений (1).

Если функции  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t, \mu)$  можно разложить по положительным степеням  $\mu$  и  $x_i - \theta_i(t, 0)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то из предыдущего параграфа нам известно, что решение  $\theta_i(t, \mu)$  можно разложить по положительным степеням  $\mu$  и постоянных интегрирования

$$\beta_i = \theta_i(0, \mu) - \theta_i(0, 0). \quad (3)$$

Если разложения  $X_i$  по степеням  $\mu$  и  $x_i - \theta_i$  сходятся при всех действительных значениях  $t$  (достаточно, чтобы они сходились для  $0 \leq t \leq T$ ), то сходится также и разложение решения при сколь угодно большом значении  $t$ , если только  $\mu$  достаточно мало. Следовательно, при этом предположении мы можем написать

$$\begin{aligned} x_i = \theta_i(t, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu) = \\ = \theta_i(t, 0) + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} \beta_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} \beta_n + \\ + \frac{\partial x_i}{\partial \mu} \mu + \text{члены высших порядков,} \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты при различных степенях  $\beta_1, \dots, \beta_n$  и  $\mu$  суть определенные функции времени  $t$ .

Разложение (4) сходится при сколь угодно больших значениях  $t$ , если  $\mu$  взято достаточно малым. Если решения (4) суть периодические функции времени, то эти ряды должны оставаться сходящимися для всех значений  $t$  (следовательно, и для  $t = \infty$ ). При этом достаточно отыскать решение, которое сходится от  $t = 0$  до  $t = T$ . Задача сводится к тому, чтобы отыскать те условия, при которых движение, определяемое при помощи (1), будет периодическим. Пуанкаре формулирует эту проблему следующим образом.

Мы предположим, что функции  $X_i$  зависят от параметра  $\mu$  (в задаче трех тел в качестве параметра принимают одну из возмущающих масс). Предположим, что при  $\mu = 0$  дифференциальные уравнения (1) проинтегрированы, и что в этом случае найдено определенное периодическое решение; спрашивается, при каких условиях мы имеем право сделать отсюда вывод, что существуют также периодические решения при малых значениях  $\mu$ ?

В простейшем случае, который может встретиться, координаты  $x$  при  $t = T$  и  $t = 0$  принимают одни и те же значения. Тогда согласно (1) для обоих моментов времени производные от координат также принимают те же самые значения, и движение обязательно должно быть периодическим.

Но это отнюдь не необходимое условие для существования периодических решений. Как здесь будет предполагаться, речь идет о движении точечных масс; тогда периодические решения существуют всякий раз, когда конфигурации масс и их мгновенные скорости одни и те же при  $t = 0$  и при  $t = T$ .

Рассмотрим сначала первый случай. Решение уравнений (1) мы записали в форме

$$x_i = \theta_i(t, \mu),$$

или, если мы возьмем разности начальных условий  $\beta_i$ :

$$\beta_i = \theta_i(0, \mu) - \theta_i(0, 0),$$

$$x_i = \theta_i(t, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu).$$

Пусть при  $\mu = 0$  движение является периодическим с периодом  $T$ , так что

$$\theta_i(T, 0) = \theta_i(0, 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Когда существуют движения, которые и при  $\mu = 0$  также будут периодическими? Это, очевидно, будет в том случае, когда

$$\theta_i(T, \mu) = \theta_i(0, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, согласно (4), если

$$\psi_i = \left[ \left( \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \right)_T - \left( \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \right)_0 \right] \beta_1 + \dots + \left[ \left( \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} \right)_T - \left( \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} \right)_0 \right] \beta_n + \left[ \left( \frac{\partial x_i}{\partial \mu} \right)_T - \left( \frac{\partial x_i}{\partial \mu} \right)_0 \right] \mu + \dots = 0 \quad (5)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Для  $\psi_i$  из (1) можно найти следующее более удобное выражение:

$$\psi_i = \int_0^T X_i dt \quad (6)$$

или

$$\psi_i = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_2} dt + \dots + \beta_n \int_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_n} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \mu} dt + \text{члены высших порядков}, \quad (6^*)$$

где в подынтегральные функции следует подставить  $\mu = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ . Запишем это выражение в форме

$$\psi_i = A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \dots + A_{in}\beta_n + A_{i0}\mu + \text{члены высших порядков}, \quad (7)$$

так что

$$A_{ij} = \int_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \beta_j} dt \quad (7^*)$$

и

$$A_{i0} = \int_0^T \frac{\partial X_i}{\partial \mu} dt. \quad (7^{**})$$

Если уравнения (5) или

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0 \quad (8)$$

можно разрешить относительно  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , то получим  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  в виде степенных рядов, расположенных по степеням  $\mu$ :

$$\beta_i = p_i(\mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Начальные значения координат были

$$(x_i)_{t=0} = \theta_i(0, 0) + \beta_i, \quad (9^*)$$

и, следовательно, при помощи (9) определяются начальные значения, которые приводят к периодическим решениям дифференциальных уравнений (4).

Согласно § 3 гл. I решения (9) суть простые решения уравнений (8), если определитель

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{vmatrix} \quad (10)$$

отличен от нуля. Вообще в механике уравнения (8) являются зависимыми. Предположим, что существует интеграл уравнений (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C,$$

который периодичен по  $t$  с периодом  $T$ ; тогда имеем

$$F[\theta_1(T, \mu), \dots, \theta_n(T, \mu), T] = F[\theta_1(0, \mu), \dots, \theta_n(0, \mu), 0] = \\ = F[\theta_1(T, \mu), \dots, \theta_n(T, \mu), 0]$$

или, так как

$$\theta_i(T, \mu) = \theta_i(0, \mu) + \psi_i,$$

то

$$F[\theta_1(0, \mu) + \psi_1, \dots, \theta_n(0, \mu) + \psi_n, 0] - \\ - F[\theta_1(0, \mu), \dots, \theta_n(0, \mu), 0] = 0. \quad (11)$$

Правая часть (11) может быть разложена по степеням  $\psi_1, \dots, \psi_n$  и обращается в нуль, если  $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0$ . Значит, если  $n - 1$  из величин  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  равны нулю, то обращается в нуль также и последняя величина. В частности, при

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{n-1} = 0$$

должно быть также и  $\psi_n = 0$ , если  $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$ . Если такого рода интеграл существует, то уравнения (8) будут зависимы. Тогда достаточно рассмотреть  $n - 1$  уравнение

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{n-1} = 0, \quad (12)$$

и для существования простого решения достаточно, чтобы определитель

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

Одна из величин  $\beta_i$  в этом случае может быть выбрана произвольно, или можно к (12) присовокупить уравнение  $F = C$ , где  $C$  может быть выбрано произвольно.

Если имеются два подобных интеграла, то вообще можно два из уравнений (8) рассматривать как следствие  $n - 2$  остальных и т. д.

Второй случай, в котором могут встретиться периодические решения, был рассмотрен Пуанкаре при частном предположении. Этот случай характеризуется одинаковыми конфигурациями при  $t = 0$  и  $t = T$ .

Пусть даны канонические дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (13)$$

где  $F$  является функцией от  $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s$  и  $\mu$  со следующими свойствами:

1.  $F$  может быть разложена при всех действительных значениях  $y_1, y_2, \dots, y_s$  по положительным степеням  $\mu$ :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots \quad (13^*)$$

2.  $F_0$  зависит только от  $x_1, x_2, \dots, x_s$ .

3.  $F$  периодична относительно  $y_1, y_2, \dots, y_s$  с периодом  $2\pi$ .

Дифференциальные уравнения (13) могут быть легко решены при  $\mu = 0$ . Действительно, при  $\mu = 0$

$$\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i} = n_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (14)$$

которые дают

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_i, \\ y_i &= n_i t + \omega_i \\ (i &= 1, 2, \dots, s), \end{aligned} \right\} \quad (14^*)$$

где  $a_i$  и  $n_i$  обозначают постоянные величины.

Если теперь

$$n_1 T, n_2 T, \dots, n_s T$$

кратны  $2\pi$ , то движение периодически с периодом  $T$ . Когда же здесь существуют периодические решения при  $\mu \neq 0$  с тем же самым периодом  $T$ ? Очевидно, что вообще для этого мы должны несколько изменить начальные значения  $x_i$  и  $y_i$ . Пусть при  $t = 0$

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + \beta_i, \\ y_i &= \omega_i + \gamma_i, \end{aligned}$$

и введем вместо  $x_i$  и  $y_i$  новые переменные  $\phi_i$  и  $\psi_i$  при помощи

уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_i + \beta_i + \varphi_i, \\ y_i &= n_i t + \omega_i + \gamma_i + \psi_i \\ (i &= 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial \omega_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i} - n_i \\ (i &= 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Если  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  при  $t = 0$  и  $t = T$  принимают одни и те же значения (здесь нули), то движение является периодическим с периодом  $T$ .

Сначала рассмотрим уравнения

$$\psi_i(T) = \psi_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (17)$$

Так как уравнения (13) обладают интегралом

$$F = C,$$

то уравнения (17) не будут независимыми. Мы предположим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} \neq 0,$$

так как уравнение  $\psi_s(T) = 0$  будет следствием других уравнений (17). Следовательно, мы должны рассматривать  $s - 1$  уравнений

$$\psi_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s - 1), \quad (17^*)$$

и можно выбрать одну из величин  $\beta_i$  произвольно. Положим

$$\beta_s = 0. \quad (18)$$

Теперь, в соответствии с (6\*), получим

$$\left. \begin{aligned} \psi_i(T) &= -\beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_1} dt - \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_2} dt - \\ &\dots - \beta_{s-1} \int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_{s-1}} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial a_i} dt + \text{члены} \\ &\hspace{15em} \text{высшего порядка} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s - 1).$$

Так как  $F_0$  зависит только от  $x_1, x_2, \dots, x_s$  и не зависит от  $y_1, y_2, \dots, y_s$ , то в (19) содержатся члены, умноженные на  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ , а также на  $\mu$ , которые здесь не выписаны. Так как  $\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_j}$  постоянно, то уравнение (19) после деления на  $T$  примет форму

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_1} \beta_1 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_2} \beta_2 + \dots + \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_{s-1}} \beta_{s-1} + \frac{\mu}{T} \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial a_i} dt + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, s-1). \quad (19^*)$$

Эти уравнения определяют значения  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$ . Решение будет простым, если определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_{s-1}} \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_{s-1} \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_{s-1} \partial a_{s-1}} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Но этот определитель есть не что иное, как гессиан от  $F_0$  относительно  $x_1, x_2, \dots, x_{s-1}$ . Следовательно, условие существования простого решения уравнений (17) состоит в том, что гессиан от  $F_0$  относительно  $s-1$  из величин  $x_1, x_2, \dots, x_s$  отличен от нуля.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений

$$\varphi_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (20)$$

Здесь мы можем считать величины  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  известными и, следовательно, принять во внимание в (20) только члены, умноженные на  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$  и  $\mu$ . Если мы применим формулу (6\*) для вычисления  $\varphi_i(T)$ , то получим

$$\varphi_i(T) = \gamma_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_1} dt + \dots + \gamma_s \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_s} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial \mu} dt + \dots = 0.$$

Но мы предполагали, что  $F_0$  не зависит от  $y_1, y_2, \dots, y_s$ , следовательно, под знаки интегралов вместо  $F$  необходимо подставить величины  $\mu F_1$ ; все члены в  $\varphi_i(T)$  имеют множитель  $\mu$ , что также справедливо и для тех членов в этой формуле, которыми мы пренебрегли. Поэтому, деля на множитель  $\mu$ , получим

$$\frac{\varphi_i(T)}{\mu} = \gamma_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i \partial y_1} dt + \dots + \gamma_s \int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_i \partial y_s} dt + \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial y_i} dt + \dots = 0. \quad (21)$$

Чтобы рассматриваемые решения были аналитическим продолжением того решения, которое получается при  $\mu = 0$ , очевидно, необходимо, чтобы значения  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ , которые мы получим из (21), обращались в нуль вместе с  $\mu$ . Но уравнение (21) содержит один член, который не имеет множителя  $\mu$ , и, следовательно, этот член должен обращаться в нуль. Если решение периодическое, то должны иметь место следующие уравнения:

$$\int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial y_i} dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (22)$$

Уравнения (22) показывают, что для существования периодических решений необходимо, чтобы между величинами  $x_i$  и  $y_i$  при  $\mu = 0$ , т. е. между  $a_i$  и  $\omega_i$ , имели место определенные зависимости.

Исследование уравнений (22) было выполнено Пуанкаре следующим образом. Положим

$$[F_1] = \frac{1}{T} \int_0^T F_1 dt. \quad (23)$$

Величина  $[F_1]$ , таким образом, обозначает «среднее значение» функции  $F_1$ . Уравнения (22) примут вид

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial y_i} = \frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (22^*)$$

Эти уравнения (22\*) свидетельствуют о том, что  $[F_1]$ , рассматриваемая как функция  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ , должна принимать или максимальное или минимальное значение.

Пусть  $F_1$  — периодическая функция  $y_1, y_2, \dots, y_s$ . Тогда по теореме Фурье имеем

$$F_1 = \sum A \cos(m_1 y_1 + \dots + m_s y_s + h),$$

где  $m_1, \dots, m_s$  принимают любые целые (положительные или отрицательные) значения. Имеем здесь

$$y_i = n_i t + \omega_i,$$

так что

$$F_1 = \sum A \cos \omega,$$

где

$$\omega = (m_1 n_1 + m_2 n_2 + \dots + m_s n_s)t + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_s \omega_s + h.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega_i} = - \sum A m_i \sin \omega$$

и

$$[F_1] = \frac{1}{T} \int_0^T F_1 dt = S A \cos \omega, \quad (24)$$

где знак  $S$  означает, что суммирование распространяется на все такие значения  $m_1, \dots, m_s$ , для которых

$$\sum m_i n_i = 0. \quad (24^*)$$

Условие (22\*) принимает вид

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = - S m_i A \sin \omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (25)$$

В § 12 рассматриваются следствия из этого уравнения применительно к задаче трех тел.

### § 8. Метод Пуанкаре построения периодических решений (продолжение)

Условия существования периодических решений уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ (i &= 1, 2, \dots, s), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

и  $F_0$  зависит только от  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , согласно предыдущему параграфу записывалось в виде

$$H(F_0) \neq 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

где  $H(F_0)$  обозначает гессиан от  $F_0$  по  $s-1$  из величин  $x_1, x_2, \dots, x_s$ .

Если решение (21) относительно  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$  должно быть простым, то, кроме указанного, должно иметь место условие

$$H([F_1]) \neq 0, \quad (4)$$

где гессиан надлежит вычислять относительно  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ . В том случае, когда  $F_0$  зависит не от всех  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , условие (2) не выполняется. Хотя рассмотрение этого случая легко получается из сказанного, тем не менее мы особо рассмотрим его, так как он часто встречается в задаче трех тел. Простоты ради предположим, что имеется четыре степени свободы, и что  $F_0$  зависит только от  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда получаем

$$n_1 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1}, \quad n_2 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2}, \quad n_3 = n_4 = 0,$$

и при  $\mu = 0$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1, & x_2 &= a_2, & x_3 &= a_3, & x_4 &= a_4, \\ y_1 &= n_1 t + \omega_1, & y_2 &= n_2 t + \omega_2, & y_3 &= \omega_3, & y_4 &= \omega_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнения (6\*) предыдущего параграфа здесь примут после замены обозначений следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(T) = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} dt + \\ + \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \mu} dt + \dots = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(T) = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} dt + \\ + \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial \mu} dt + \dots = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3(T) = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_3} dt + \\ + \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial \mu} dt + \dots = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4(T) = \beta_1 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_1} dt + \beta_2 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_2} dt + \beta_3 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_3} dt + \\ + \beta_4 \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial x_4} dt + \mu \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial \mu} dt + \dots = 0. \end{aligned}$$

Так как  $F_0$  содержит только  $x_1$  и  $x_2$ , то находим, что третье и четвертое уравнения имеют множителем  $\mu$ ; подставляя везде

$F_0$  вместо  $\mu F_1$ , преобразуем уравнения к виду

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{\psi_3}{\mu} = \frac{\psi_4}{\mu}. \quad (6)$$

Первые два из этих уравнений имеют следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A_{11}\beta_1 + A_{12}\beta_2 + \text{члены, равные нулю при } \mu = 0, \\ 0 &= A_{21}\beta_1 + A_{22}\beta_2 + \text{»} \text{ »} \text{ »} \text{ »} \mu = 0, \end{aligned} \right\} (7)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} dt. \quad (7^*)$$

В соответствии с (7),  $\beta_1$  и  $\beta_2$  можно разложить в степенные ряды по  $\mu$ , которые обращаются в нуль вместе с  $\mu$ , если предположить, что определитель

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель не что иное, как гесснан от  $F_0$  по  $x_1$  и  $x_2$ . Итак, предположим, что

$$H(F_0) \neq 0 \quad (\text{Arg } x_1, x_2). \quad (8)$$

Два последних уравнения

$$\frac{\psi_3}{\mu} = \frac{\psi_4}{\mu} = 0$$

содержат как члены, пропорциональные  $\beta_i$  и  $\mu$ , так и член, не обращающийся в нуль вместе с  $\mu$  и  $\beta_i$ . Поэтому начальные условия должны быть определены таким образом, чтобы эти члены равнялись нулю. Следовательно, мы получим условия

$$\frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial \mu} dt = \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dt = 0,$$

$$\frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_4 \partial \mu} dt = \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x_4} dt,$$

или, если ввести функцию  $[F_1]$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial [F_1]}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Что касается уравнений  $\varphi_i(T) = 0$ , то на них распространяются результаты предыдущего параграфа. Необходимо, чтобы

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

Значения  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  будут представлять простое решение, если гессиан от  $[F_1]$  по  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\omega_4$  не обращается в нуль.

В том случае, когда  $F_0$  зависит только от  $x_1$  и  $x_2$ , начальные условия для  $x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ , т. е. значения, которые эти величины принимают при  $t = 0$  и  $\mu = 0$ , необходимо определить так, чтобы  $[F_1]$ , как функция этих величин, имела бы максимум или минимум.

### § 9. Форма разложения возмущающей функции

Для исследования периодических решений необходимо вывести некоторые ранее не дававшиеся формы разложения возмущающей функции. При этом мы ограничимся первыми степенями возмущающих масс, т. е. обозначенной через  $F_1$  функцией, хотя большую часть последующих результатов легко распространить и на полное разложение возмущающей функции, если использовать якобиевы канонические элементы.

Возмущающая функция зависит от трех расстояний  $r, r'$  и  $r''$ ; имеем

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  обозначает угол между двумя радиусами-векторами  $r$  и  $r'$ . Они выражаются через эксцентрические аномалии  $w$ :

$$r = a(1 - e \cos w)$$

и

$$r' = a'(1 - e' \cos w'),$$

где  $w$  и  $w'$  связаны со средними аномалиями при помощи формул

$$w - e \sin w = l, \quad (2)$$

$$w' - e' \sin w' = l'. \quad (2^*)$$

Эти формулы показывают, что  $r$  и  $r'$  могут быть разложены в ряды Фурье соответственно по кратным  $l$  и  $l'$ :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{1}{2} B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos il, \\ r' &= \frac{1}{2} B'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B'_i \cos il'. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Значения коэффициентов даются в § 9 гл. IV. Если (2) запишем в форме

$$w - l - e \sin(w - l + l) = 0$$

или

$$w - l = e \cos l \sin(w - l) + e \sin l \cos(w - l),$$

то по теореме Лагранжа очевидно, что  $w - l$  может быть представлено рядом по степеням  $e \cos l$  и  $e \sin l$ :

$$w - l = P_1(e \cos l, e \sin l), \quad (4)$$

который обращается в нуль при  $e = 0$ .

Аналогично имеем

$$w' - l' = P'_1(e' \cos l', e' \sin l'). \quad (4^*)$$

Для истинной аномалии  $v$  имеем следующее известное выражение через оскулирующие элементы:

$$v = \pi + l + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin il, \quad (5)$$

где  $\alpha_i$  могут быть представлены при помощи степенных рядов относительно  $e$ . Эти коэффициенты представляются в форме

$$\alpha_i = a_0^{(i)} e^i + a_1^{(i)} e^{i+2} + a_2^{(i)} e^{i+4} + \dots,$$

а отсюда, как и в аналогичном случае в § 2, гл. VI, следует, что  $\alpha_i \sin il$  можно разложить по степеням  $e \cos l$  и  $e \sin l$ . Следовательно, получим

$$\left. \begin{aligned} v &= \pi + l + P_2(e \cos l, e \sin l), \\ v' &= \pi' + l' + P'_2(e' \cos l', e' \sin l'). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Что касается представления угла  $\varphi$  в (1), то мы сначала рассмотрим случай, когда движение трех тел происходит в одной плоскости. Тогда

$$\varphi = v - v',$$

и из (5) находим, что в этом случае  $\varphi$  зависит от  $l$ ,  $l'$  и  $\pi - \pi'$ . Очевидно, что  $r''$ , а также и возмущающая функция являются периодическими функциями относительно этих переменных. Это можно заключить из § 10 гл. V. Из (3) и (5) непосредственно следует, что  $r$ ,  $r'$  и  $r''$ , а поэтому и возмущающая функция, остаются неизменными при замене  $l$  на  $-l$ ,  $l'$  на  $-l'$ ,  $\pi - \pi'$  на  $\pi' - \pi$ . Следовательно, разложение возмущающей функции имеет форму:

$$F_1 = \sum A_{i, r, j} \cos(il + i'l' + j(\pi - \pi')), \quad (7)$$

где  $A_{i,k,j}$  зависит от  $a, a', e$  и  $e'$ , а  $i, i'$  и  $j$  принимают все как положительные, так и отрицательные целые значения. Стало быть,  $F_1$  является четной функцией от  $l, l'$  и  $\pi - \pi'$ .

Из (3), (4) и (6) далее следует, что  $F_1$  можно рассматривать как функцию от  $a, a', e \cos l, e \sin l, e' \cos l', e' \sin l'$  и  $\lambda - \lambda'$ , где

$$\lambda = \pi + l - \text{средняя долгота},$$

и  $F_1$  можно разложить по степеням величин

$$\begin{aligned} e \cos l, & \quad e \sin l, \\ e' \cos l', & \quad e' \sin l'; \end{aligned}$$

при этом коэффициенты будут периодическими функциями от  $\lambda - \lambda'$ . Перейдем теперь к общей задаче трех тел. Из § 9 гл. V нам известно, что восходящий узел одной из планетных орбит на неизменяемой плоскости совпадает с нисходящим узлом другой орбиты. Пренебрегая величинами второго порядка относительно возмущающих масс, расстояние  $r''$  между обеими массами,  $m$  и  $m'$ , можно записать в следующей форме:

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi, \quad (8^*)$$

где

$$\cos \varphi = \cos(v - \Omega) \cos(v' - \Omega') + \sin(v - \Omega) \sin(v' - \Omega') \cos J$$

или, так как  $\Omega = \Omega'$ ,

$$\cos \varphi = \cos(v - v') - 2 \sin^2 \frac{1}{2} J \sin(v - \Omega) \sin(v' - \Omega). \quad (8)$$

Здесь  $J$  обозначает взаимную наклонность орбит, т. е. сумму наклонностей планетных орбит к неизменяемой плоскости.

Но по (5)

$$v - \Omega = l + \pi - \Omega + \sum \alpha_i \sin il,$$

или, следуя Делоне, положим

$$g = \pi - \Omega;$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} v - \Omega &= l + g + \sum \alpha_i \sin il, \\ v' - \Omega &= l' + g' + \sum \alpha'_i \sin il', \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

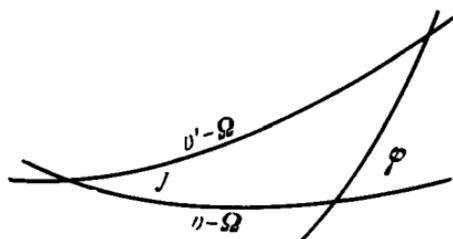


Рис. 36.

и

$$v - v' = l - l' + g - g' + \sum \alpha_i \sin il - \sum \alpha'_i \sin il'. \quad (9^*)$$

Подставляя эти выражения в (8) и (8\*), находим, что  $r''$ , а равным образом и  $F_1$ , суть периодические функции от  $l, l', g$  и  $g'$ , которые можно разложить по степеням  $e$  и  $e'$  и  $\sin^2 \frac{1}{2} J$  ( $J = i + i'$ ), причем коэффициенты разложений будут зависеть от  $a$  и  $a'$ . Эти разложения не изменятся, если одновременно поменять знаки  $l, l', g$  и  $g'$ . Следовательно,  $F_1$  является четной функцией этих величин, и можно записать

$$F_1 = \sum A \cos(il + i'l' + jg + j'g'). \quad (10)$$

### § 10. Периодические решения первого сорта

В своих исследованиях Пуанкаре исходил из дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов, и при этом им было установлено три сорта периодических решений задачи трех тел:

для первого сорта наклонности равны нулю и эксцентриситеты обращаются в нуль вместе с малыми массами;

для второго сорта наклонности также равны нулю, а эксцентриситеты при  $\mu = 0$  остаются конечными по величине;

третий сорт охватывает случаи, в которых наклонности конечны.

Периодические решения первого сорта можно было бы рассматривать как частный случай решений второго сорта. Однако они отличаются от них в одном существенном пункте. Если рассматривать две планеты (при  $\mu = 0$ ), которые обращаются вокруг центральной массы в равномерном движении по круговым орбитам, движение этих трех масс всегда следует рассматривать как периодическое, период которого равен синодическому периоду обращения обеих планет.

Иначе обстоит дело, когда (при  $\mu = 0$ ) речь идет о двух планетах, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг центральной массы. Здесь движение может также быть периодическим, однако только при условии, что средние движения обеих планет соизмеримы. Очевидно, что здесь мы стоим перед проблемой совсем иного рода, чем в предыдущем случае.

Если средние движения обеих планет (при  $\mu = 0$ ) обозначить через  $n$  и  $n'$  ( $n > n'$ ), то синодический период обращения равен

$$\frac{2\pi}{n - n'}.$$

Следовательно, движение при  $\mu = 0$  будет периодическим с указанным периодом, когда орбиты являются круговыми. Будут ли

существовать периодические орбиты с тем же периодом также и при  $\mu > 0$ ?

Пуанкаре удалось найти ответ на этот вопрос почти без рассмотрения дифференциальных уравнений движения. Если треугольник, образованный тремя телами при  $t = 0$  и при  $t = T$ , имеет одни и те же размеры, и если, кроме того, производные от взаимных расстояний  $r$ ,  $r'$  и  $r''$  в оба эти момента равны, то, очевидно, можно заключить, что движение будет периодическим.

Но в предыдущем параграфе мы нашли, что расстояния  $r$ ,  $r'$  и  $r''$  в случае, когда движение происходит в плоскости, зависят только от следующих величин:

$$\left. \begin{aligned} a, e \cos l, e \sin l, \\ a', e' \cos l', e' \sin l', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и  $\lambda - \lambda'$ , и что они периодичны по  $\lambda - \lambda'$  с периодом  $2\pi$ , а также, что они могут быть разложены в ряды по степеням  $e \cos l$ ,  $e \sin l$ ,  $e' \cos l'$  и  $e' \sin l'$ .

Имеем далее для производных от  $r$  и  $r'$  одни и те же значения как в возмущенном, так и в невозмущенном движении, так как элементы  $a$ ,  $e$  и т. д. являются оскулирующими. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{na^2e}{r} \sin w, \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{n'a'^2e'}{r'} \sin w', \end{aligned}$$

так что  $\frac{dr}{dt}$  и  $\frac{dr'}{dt}$  зависят только от шести величин (1). Так как

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v - v')$$

и

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2},$$

то  $\frac{dr''}{dt}$  также определяется через те же самые величины и  $\lambda - \lambda'$ .

Таким образом, для существования периодического движения необходимо, чтобы величины (1) при  $t = 0$  и при  $t = 2T$  принимали одни и те же значения, и чтобы  $\lambda - \lambda'$  возросло на  $2\pi$ .

Средние движения  $n$  и  $n'$  определяются формулами

$$n = \frac{\gamma}{\Lambda^3}, \quad n' = \frac{\gamma'}{\Lambda'^3},$$

где  $\Lambda = \sqrt{a}$ ,  $\Lambda' = \sqrt{a'}$ , а  $\gamma$  и  $\gamma'$  — две постоянные, зависящие от масс. Мы предполагаем, что при  $t = \mu = 0$

$$e = e' = l = l' = \lambda = \lambda' = 0$$

и  $\Lambda = \Lambda_0$ ,  $\Lambda = \Lambda'_0$ . Чтобы получить периодическое движение при  $\mu \neq 0$ , предположим, что  $e, e', l, l'$  принимают значения  $e_0, e'_0, l_0, l'_0$ ; вместо этого можно начало отсчета времени и положение оси  $X$  выбрать так, чтобы  $\lambda = \lambda' = 0$  при  $\mu \neq 0$ . Пусть начальные значения  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  будут  $\Lambda_0 + \beta_1$  и  $\Lambda'_0 + \beta_2$ . При  $t = T$  величины (1) принимают значения

$$\begin{aligned} \Lambda_0 + \beta_1 + \psi_1, & \quad e_0 \cos l_0 + \psi_3, & \quad e_0 \sin l_0 + \psi_4, \\ \Lambda'_0 + \beta_2 + \psi_2, & \quad e'_0 \cos l'_0 + \psi_5, & \quad e'_0 \sin l'_0 + \psi_6, \end{aligned}$$

где вместо  $a$  взято  $\Lambda$ , а для  $\lambda - \lambda'$  значение  $2\pi + \psi_0$ . Тогда условия периодичности движения будут

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0. \quad (2)$$

Но мы имеем два первых интеграла — интеграл живых сил и интеграл площадей, которые, как было доказано в пятой главе, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} F &= C, \\ \beta\Lambda \sqrt{1-e^2} + \beta'\Lambda' \sqrt{1-e'^2} &= c. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Что касается интеграла живых сил, то его можно разложить по степеням

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

где

$$F_0 = \frac{\gamma}{2\Lambda^2} + \frac{\gamma'}{2\Lambda'^2},$$

так что

$$n = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}, \quad n' = -\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda'}.$$

Как и в параграфе (7), находим, что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  должны уничтожаться, если  $\psi_0, \psi_3, \psi_4$  и т. д. равны нулю.

Итак, мы должны разрешить уравнения

$$\psi_0 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0, \quad (4)$$

присовокупив к ним уравнение

$$F = C, \quad (4^*)$$

где  $C$  рассматривается как заданная величина. Начальные значения  $\beta_1, \beta_2, e_0, e'_0, l_0, l'_0$  необходимо определить так, чтобы удовлетворялось (4) и (4\*). Чтобы показать существование простого решения этих уравнений, достаточно доказать, что якобиан левых частей этих уравнений при  $\mu = \beta_1 = \beta_2 = e_0 = e'_0 =$

$= l_0 = l'_0 = 0$  отличен от нуля. При составлении этого якобиана нет необходимости выписывать члены, зависящие от  $\mu$ . Достаточно рассмотреть те члены в (4) и (4\*), которые не обращаются в нуль вместе с  $\mu$ . Говоря иными словами, для исследования якобиана достаточно рассмотреть невозмущенное движение, которое определяется элементами

$$\Lambda_0 + \beta_1, e_0, l_0, \\ \Lambda'_0 + \beta_2, e'_0, l'_0.$$

Затем получается выражение для  $F_0$ :

$$F_0 = \frac{\gamma}{2(\Lambda_0 + \beta_1)^2} + \frac{\gamma'}{2(\Lambda'_0 + \beta_2)^2},$$

а также для новых значений средних движений  $N$  и  $N'$ :

$$N = \frac{\gamma}{(\Lambda_0 + \beta_1)^3} = n \left(1 + \frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3}, \\ N' = \frac{\gamma'}{(\Lambda'_0 + \beta_2)^3} = n' \left(1 + \frac{\beta_2}{\Lambda'_0}\right)^{-3}.$$

Угловые величины  $l$  и  $\lambda$  при изменении  $t$  от  $t = 0$  до  $t = T = \frac{2\pi}{n - n'}$  возрастают на

$$U = NT = \frac{2\pi n}{n - n'} \left(1 + \frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3},$$

а  $l'$  и  $\lambda'$  одновременно на величину

$$U' = N'T = \frac{2\pi n'}{n - n'} \left(1 + \frac{\beta_2}{\Lambda'_0}\right)^{-3}.$$

Тогда члены в  $\psi_0, \psi_3, \psi_4, \dots$ , не содержащие множитель  $\mu$ , будут

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{n - n'} \left\{ n \left(1 + \frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3} - n' \left(1 + \frac{\beta_2}{\Lambda'_0}\right)^{-3} \right\} - 2\pi,$$

$$\psi_3 = e_0 \cos(l_0 + U) - e_0 \cos l_0, \quad \psi_4 = e_0 \sin(l_0 + U) - e_0 \sin l_0,$$

$$\psi_5 = e'_0 \cos(l'_0 + U') - e'_0 \cos l'_0, \quad \psi_6 = e'_0 \sin(l'_0 + U') - e'_0 \sin l'_0.$$

Теперь не представляет никаких трудностей вычислить якобиан этих уравнений. В самом деле, имеем

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3,$$

где

$$\Delta_1 = \text{якобиан от } F_0 \text{ и } \psi_0 \text{ по } \beta_1 \text{ и } \beta_2,$$

$$\Delta_2 = \text{якобиан } \psi_3 \text{ } \psi_4 \text{ } e_0 \text{ } l_0,$$

$$\Delta_3 = \text{якобиан } \psi_5 \text{ } \psi_6 \text{ } e'_0 \text{ } l'_0.$$

Для этих якобианов получаются следующие значения:

$$\Delta_1 = -\frac{6\pi n n'}{n - n'} \left( \frac{1}{\Lambda_0} + \frac{1}{\Lambda'_0} \right),$$

$$\Delta_2 = e_0 \{ [\cos(l_0 + U) - \cos l_0]^2 + [\sin(l_0 + U) - \sin l_0]^2 \},$$

$$\Delta_3 = e'_0 \{ [\cos(l'_0 + U') - \cos l'_0]^2 + [\sin(l'_0 + U') - \sin l'_0]^2 \},$$

причем  $\Delta_1$  обращается в нуль при  $\Lambda_0 = -\Lambda'_0$ , т. е. при  $n = -n'$  в случае, который не представляет интереса,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  обращаются в нуль, когда  $U$  и  $U'$  кратны  $2\pi$ , т. е. если  $n$  кратно  $n - n'$ . Это условие можно выразить также и в форме

$$\frac{n}{n'} = \frac{i+1}{i}, \quad (5)$$

где  $i$  обозначает целое число. Если уравнение (5) удовлетворяется, то никаких периодических решений первого сорта не существует. Очевидно, существует  $\infty^4$  периодических решений первого сорта, для которых можно произвольно выбрать период  $T$ , постоянную  $C$ , момент и долготу соединения.

В § 5 этой главы мы показали, следуя Хиллу, как могут быть построены ряды, которые представляют такое решение.

Исключительный случай (5), для которого никаких периодических решений первого сорта не существует, имеет особый астрономический интерес. Это обстоятельство с точки зрения теории возмущений объясняется следующим образом.

Для элементов Делоне имеют место дифференциальные уравнения:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L},$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G},$$

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l'}, \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L'},$$

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g'}, \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G'},$$

где  $l$  и  $g$  соответственно обозначают среднюю аномалию и долготу перигелия; кроме того, имеем

$$L = \beta \sqrt{a}, \quad L' = \beta' \sqrt{a'},$$

$$G = L \sqrt{1 - e^2}, \quad G' = L' \sqrt{1 - e'^2}.$$

Обычно возмущающая функция выражается через эллиптические

элементы  $L$  (или  $a$ ),  $e$ ,  $L'$ ,  $e'$  и, очевидно,

$$\frac{\partial F}{\partial G} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial F}{\partial e},$$

так что движение перигелиев обеих планет определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial F}{\partial e}, \\ \frac{dg'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'} \frac{\partial F}{\partial e'}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Исследуем вековые движения перигелиев  $[g]$  и  $[g']$  при очень малых значениях  $e$  и  $e'$ . Если средние движения  $n$  и  $n'$  несоизмеримы, то имеем

$$\begin{aligned} \frac{d[g]}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d[g']}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'} \frac{\partial R}{\partial e'}, \end{aligned}$$

где  $R$ , как обычно, обозначает вековую часть возмущающей функции. Следовательно, при  $e = e' = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{d[g]}{dt} &= A + B \frac{e'}{e}, \\ \frac{d[g']}{dt} &= A' + B' \frac{e}{e'}. \end{aligned}$$

Перигелии обладают средними движениями, величины которых существенно зависят от отношения обоих малых эксцентриситетов. То же имеет место и в случае, когда  $n$  и  $n'$  относятся как целые числа

$$\frac{n}{n'} = \frac{i}{j},$$

если только разность между  $i$  и  $j$  не равна  $+1$  или  $-1$ . Но если бы был этот случай, то уже среди членов первого порядка встречались бы вековые члены и мы получили бы следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[g]}{dt} &= A + B \frac{e'}{e} + C \frac{1}{e}, \\ \frac{d[g']}{dt} &= A' + B' \frac{e}{e'} + C' \frac{1}{e'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь встречается исключительный случай:  $|i - j| = 1$ . Для бесконечно малых  $e$  и  $e'$  вековые движения перигелиев были бы бесконечно большими. Было бы преждевременно заключать, что

случаи, в которых  $|i - j| = 1$ , не имеют значения для астрономии. Наоборот, в планетной системе встречается много случаев, в которых средние движения с большой степенью точности удовлетворяют этому уравнению, хотя при  $\mu = 0$  эксцентриситеты обращаются в нуль. Эри в своем классическом труде «О притяжении» [52] установил возникающие при этом специфические особенности состояния движения, Тиссеран [53] и Баклунд [54] продолжили далее эти исследования в аналитическом направлении. В системе спутников Сатурна существует много таких случаев, как Гиперион — Титан, средние движения которых относятся почти как 3 : 4, как Энцелад — Диона, средние движения которых относятся как 2 : 1 [55]. Здесь мы встречаемся с периодическими решениями проблемы трех тел, которые в точном смысле не являются решениями первого сорта.

### § 11. Периодические решения второго сорта

Эти решения характеризуются тем, что при  $\mu = 0$  эксцентриситеты остаются конечными. Наклонности равны нулю. Следуя Пуанкаре, исходим из соотношений при  $\mu = 0$  и сначала ставим вопрос, когда система трех тел, два из которых обращаются вокруг третьего тела по неизменным эллипсам, образует периодическую систему. Очевидно, это будет в том случае, когда средние движения  $n$  и  $n'$  для кеплеровских эллипсов соизмеримы. Тогда движение всегда будет периодическим. Итак, пусть

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{g},$$

где  $p$  и  $g$  обозначают два взаимно простых целых числа. Если через  $N$  обозначить наибольший общий делитель  $n$  и  $n'$ , так что

$$n = pN, \quad n' = gN, \quad (1)$$

то период движения  $T$  будет равен

$$T = \frac{2\pi}{N}. \quad (1^*)$$

Масса  $m$ , которая обладает средним движением  $n$ , сделает за этот промежуток времени  $p$  оборотов, а масса  $m'$  со средним движением  $n'$  совершит  $g$  оборотов по эллипсу. При каких условиях существуют периодические движения с тем же периодом  $T$  при  $\mu \neq 0$ ?

Согласно § 10 гл. V мы можем свести задачу к трем степеням свободы. Если возмущающую функцию, которая здесь зависит только от шести элементов,  $L, L', l, l', K, k$ , обозначить через  $F$  (возмущающую функцию как функцию обычных элементов

Делоне будем обозначать через  $F$ ), то соответствующие дифференциальные уравнения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial K}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L &= \beta \sqrt{a}, & l &= \text{средняя аномалия } m, \\ L' &= \beta' \sqrt{a'}, & l' &= \text{» } m', \\ K &= \beta \sqrt{a(1-e^2)}, & k &= \pi - \pi'. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

Эксцентриситет орбиты массы  $m'$  из возмущающей функции  $F$  исключается при помощи интеграла площадей, который записывается в форме

$$G + G' = \beta \sqrt{a(1-e^2)} + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)} = c$$

или

$$L \sqrt{1-e^2} + L' \sqrt{1-e'^2} = c. \quad (3)$$

Таким образом,  $F$  является функцией  $L, L', l, l', K$  и  $k$ . Разлагая по степеням  $\mu$ , имеем

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

где

$$F_0 = \frac{\gamma}{2L^2} + \frac{\gamma'}{2L'^2},$$

или, по § 5 гл. V (если постоянная тяготения положена равной единице, а малые массы выражены в единицах большой массы),

$$F_0 = \frac{\beta^2 m}{2L^2} + \frac{\beta'^2 m'}{2L'^2} = \frac{m}{2a} + \frac{m'}{2a'} = F_0. \quad (4)$$

Что касается  $F_1$ , то согласно § 9 имеем выражение

$$F_1 = \Sigma \mathfrak{A} \cos(il + i'l' + jk). \quad (5)$$

Для  $F_1$  имеем аналогичное выражение:

$$F_1 = \Sigma A \cos(il + i'l' + jk), \quad (5^*)$$

только в (5\*)  $A$  следует рассматривать как функцию  $L, L', G$  и  $G'$ , в то время как в (5)  $\mathfrak{A}$  зависит только от  $L, L'$  и  $K$ . Для перехода от (5\*) к (5) подставим в (5\*)

$$G' = c - K, \quad G = K. \quad (6)$$

В частности, имеем формулу

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial G} - \frac{\partial F}{\partial G'}, \quad (7)$$

которая будет использована позже.

Перейдем теперь к отысканию периодических решений (2) с периодом  $T$ . Так как  $F_0$  зависит только от  $L$  и  $L'$ , то мы имеем дело со случаем, рассмотренным в § 8. Итак, согласно построенной теории сначала необходимо выяснить, будет ли гессиан  $H(F_0)$  от  $F_0$  по  $L$  и  $L'$  отличен от нуля. Находим, что выражение

$$H(F_0) = \frac{\partial^2 \Upsilon'}{L^2 L'^2} \quad (8)$$

для конечных масс не обращается в нуль. Для существования периодических решений необходимо еще, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial l} = \frac{\partial [F_1]}{\partial l'} = \frac{\partial [F_1]}{\partial k} = 0, \quad (9)$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial K} = 0, \quad (9')$$

где необходимо после дифференцирования подставить вместо  $L, L', l, l', K, k$  их значения, соответствующие  $t = \mu = 0$ .

Обозначим эти начальные значения через

$$L_0, L'_0, l_0, l'_0, K_0, k_0. \quad (10)$$

Согласно (5) имеем

$$[F_1] = \sum \mathfrak{A} \cos(il_0 + i'l'_0 + jk_0), \quad (11)$$

где  $i$  и  $i'$  принимают все целые числовые значения, для которых

$$in + i'n' = 0,$$

т. е. по (1)

$$ip + i'q = 0. \quad (12)$$

Следовательно, мы можем предположить, что

$$i = sq, \quad i' = -sp, \quad (12')$$

где  $s$  означает произвольное целое число; тогда будем иметь

$$[F_1] = \sum \mathfrak{A} \cos[s(q l_0 - p l'_0) + j k_0].$$

Здесь  $s$  принимает значения 0, 1, 2, ... Уравнения (9) примут

такой вид:

$$\sum sq \mathfrak{A} \sin [s (ql_0 - pl'_0) + jk_0] = 0,$$

$$\sum sp \mathfrak{A} \sin [s (ql_0 - pl'_0) + jk_0] = 0,$$

$$\sum j \mathfrak{A} \sin [s (ql_0 - pl'_0) + jk_0] = 0.$$

Так как  $p$  и  $q$  обозначают определенные числа, то второе из этих уравнений совпадает с первым. Следовательно, оба уравнения

$$\frac{\partial [F]}{\partial l_0} = 0, \quad \frac{\partial [F]}{\partial l'_0} = 0$$

тождественны, и отсюда следует, что одна из величин  $l_0$  или  $l'_0$  может быть выбрана произвольно. Тогда положим

$$l'_0 = 0, \quad (13)$$

что можно достичь соответствующим выбором эпохи. Таким образом, будем предполагать, что в момент  $t = 0$  масса  $m'$  находится в перигелии.

Оба уравнения, которые должны выполняться, имеют форму

$$\left. \begin{aligned} \sum s \mathfrak{A} \sin (sq l_0 + jk_0) &= 0, \\ \sum j \mathfrak{A} \sin (sq l_0 + jk_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти уравнения выполняются, если  $k_0$  и  $l_0$  кратны нулю или  $180^\circ$ . Выражаясь геометрически, это означает, что в момент  $t = 0$  (и  $\mu = 0$ ) оба тела находятся либо в соединении, либо в оппозиции на линии апсид, которая для обеих планет имеет одинаковое направление. Долготы перигелиев могут совпадать или различаться на  $180^\circ$ . Пуанкаре в этом случае говорит, что обе массы находятся в симметричном соединении или оппозиции.

Однако это не является общим решением уравнений (14). Шварцшильд [56] обратил внимание на то, что  $l_0$  не обязательно должно быть кратным  $180^\circ$ , чтобы удовлетворялись уравнения (14). Достаточно, чтобы это имело место для  $ql_0$ . При этом мы получим два решения:

$$k_0 = \pi - \pi' = 0, \quad l_0 = r \frac{180^\circ}{q}, \quad (\alpha)$$

$$k_0 = \pi - \pi' = 180^\circ, \quad l_0 = r \frac{180^\circ}{q}. \quad (\beta)$$

Здесь  $r$  может обозначать любое целое число, однако достаточно рассмотреть числовые значения

$$r = 0, 1, 2, \dots, 2q - 1.$$

Следовательно, в каждом из случаев (а) и (б) имеем  $2q$  значений для  $l_0$ , которые соответствуют периодическому решению. Из этих  $4q$  случаев не все являются существенно различными. Если, например,

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{3},$$

то  $q = 3$ , и для  $l_0$  можно выбрать только значения  $0^\circ; 60^\circ; 120^\circ; 180^\circ; 240^\circ; 300^\circ$ .

Остается еще рассмотреть уравнение (9\*):

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial K} = 0.$$

Согласно (7) вместо него можно написать

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial G} - \frac{\partial [F_1]}{\partial G'} = 0. \quad (15)$$

Возмущающая функция  $F_1$  является функцией от  $L, L', G, G'$  и угловых переменных  $l, l', g, g'$ .

Разложения возмущающей функции, которые обычно употребляются в астрономии, в общем производятся по степеням эксцентриситетов, и возмущающая функция является функцией кеплеровских элементов  $a, e$  и т. д. Если возмущающую функцию считать зависящей от этих элементов (для отличия при нахождении частных производных обозначим ее через  $R$ ), то мы должны рассматривать три различные формы:

$$R(a, e, l, \pi, a', e', l', \pi') = F(L, G, l, g, L', G', l', g') = \\ = F(L, L', K, l, l', k).$$

Имеем

$$G = L \sqrt{1 - e^2}, \quad G' = L' \sqrt{1 - e'^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial G} = - \frac{G}{L^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} = - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{L e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{\partial F}{\partial G'} = - \frac{G'}{L'^2 e'} \frac{\partial R}{\partial e'} = - \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{L' e'} \frac{\partial R}{\partial e'},$$

так что уравнение (15) примет вид

$$\frac{\sqrt{1 - e^2}}{L e} \frac{\partial [R]}{\partial e} - \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{L' e'} \frac{\partial [R]}{\partial e'} = 0, \quad (16)$$

где

$$[R] = \frac{1}{T} \int_0^T R dt.$$

Мы можем записать  $R$  в форме

$$R = \sum A \cos(il - il' + j(\pi - \pi')), \quad (17)$$

где следует положить

$$l = nt + c, \quad l' = n't + c',$$

и  $[R]$  состоит из всех членов в  $R$ , для которых

$$in - i'n' = 0. \quad (18)$$

Это условие выполняется в двух случаях:

1. При  $i = i' = 0$  соответствующие члены называются вековой частью возмущающей функции, которую мы обозначим через  $S_1$ .

2. Согласно (1) при  $ip - i'q = 0$ , т. е. при

$$i = sq, \quad i' = sp \quad (s = \pm 1, 2, 3, \dots). \quad (18^*)$$

Соответствующую часть  $[R]$  обозначим через  $S_2$ .

Форма  $S_1$  известна. Из § 2 гл. VII известно, что  $S_1$  будет четной функцией от  $e$ ,  $e'$  и  $\sin(i + i')$ , которая разлагается в ряд по косинусам кратных  $\pi - \pi'$ , если рассматривать движение в трехмерном пространстве и в качестве основной плоскости принять неизменяемую плоскость.

Согласно (6\*) § 2 гл. VII, где необходимо положить  $\Omega - \Omega' = 180^\circ$ ,  $k^2 = 1$ , члены низшего (второго) порядка будут

$$S_1 = \frac{mm'}{8} \{B_1(e_2^2 + e'^2 - \sin^2(i + i')) - 2B_2ee' \cos(\pi - \pi')\}, \quad (19)$$

где

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{aa' \cos \varphi d\varphi}{[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi]^{3/2}},$$

$$B_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{aa' \cos 2\varphi d\varphi}{[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi]^{3/2}}$$

или, если разложить по степеням  $\alpha = \frac{a}{a'}$  (по § 5 гл. VI),

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{3}{a'} \alpha^2 \left[ 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \alpha^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \alpha^4 + \dots \right], \\ B_2 &= \frac{15}{4a'} \alpha^3 \left[ 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \alpha^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 8} \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$

Что касается  $S_2$ , то согласно (17) форма этой функции будет

$$S_2 = \sum A_{i,j} \cos(ic - i'c' + j(\pi - \pi')), \quad (20)$$

где  $i$  и  $i'$  принимают значения (18°). Относительно коэффициентов  $A_{i,i'}$  следует заметить, что они разлагаются в степенные ряды по степеням  $e$ ,  $e'$  и  $(i + i')$  и что члены низшего порядка в этом разложении, как это следует из рассуждений § 2 гл. V, имеют степень  $|i - i'|$ . Отсюда из (18°) следует, что члены низшего порядка в  $S_2$  будут иметь степень  $|p - q|$ .

Из этого утверждения очевидно, что при рассмотрении уравнения (16) необходимо различать два случая. Во-первых, если  $|p - q|$  не мало (примерно больше четырех), достаточно в (16) вместо  $[R]$  подставить вековую часть  $S_1$  возмущающей функции, так что рассматриваемое уравнение примет вид

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial S}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'} \frac{\partial S_1}{\partial e'} = 0. \quad (21)$$

Подставим в  $S_1$  члены низшего порядка из (19) и положим  $i = i' = 0$ , так как движение происходит в плоскости; тогда, отбрасывая множитель  $\frac{mm'}{4}$ , получим

$$\frac{1}{L} \left( B_1 - B_2 \frac{e'}{e} \cos(\pi - \pi') \right) - \frac{1}{L'} \left( B_1 - B_2 \frac{e}{e'} \cos(\pi - \pi') \right) = 0.$$

Но согласно предыдущему  $\pi - \pi'$  равно либо 0, либо  $180^\circ$ .

Если

$$\alpha) \quad \pi - \pi' = 0,$$

то (за исключением случая  $e$  или  $e' = 0$ ) приведенное уравнение примет вид

$$LB_2e^2 + B_2ee'(L' - L) - L'B_2e'^2 = 0, \quad (22)$$

и для

$$\beta) \quad \pi - \pi' = 180^\circ$$

получим

$$LB_2e^2 - B_1ee'(L' - L) - L'B_2e'^2 = 0. \quad (22^*)$$

Из этих уравнений при заданных значениях  $L$  и  $L'$  можно определить отношение  $e$  к  $e'$ , для которого существует периодическое решение второго сорта. Корни этого уравнения всегда действительны.

Можно также предполагать заданными значения  $e$  и  $e'$  и определять соответствующее значение  $L : L'$ . Таким образом, получим в случае  $\alpha$ )

$$\frac{L'}{L} = \frac{B_2e^2 - B_1ee'}{B_2e'^2 - B_1ee'}, \quad (23)$$

где  $e$  и  $e'$  должны быть выбраны так, чтобы правая часть была положительной; в случае  $\beta$ )

$$\frac{L'}{L} = \frac{B_2 e^2 + B_1 e e'}{B_2 e'^2 + B_1 e e'}. \quad (23^*)$$

Для всех пар значений ( $e, e'$ ), соответствующих указанному в случае  $\alpha$ ) условию, отношение  $L' : L$  можно выбрать так, чтобы существовало периодическое движение. Приближенные значения  $L$  и  $L'$  согласно (6) § 4 гл. VI будут

$$L = m \sqrt{a}, \quad L' = m' \sqrt{a'}.$$

Так как средние движения  $n$  и  $n'$  соизмеримы, то отношение  $a$  к  $a'$  определяется. Условия (23) и (23\*) могут выполняться при подходящем выборе значений масс.

Эти рассуждения следует рассматривать лишь как приближенные, так как учтены только члены второго порядка. Следовательно, они справедливы только при малых значениях  $e$  и  $e'$ , а при больших значениях эксцентриситетов необходимо принимать во внимание высшие степени  $e$  и  $e'$ . Но из уравнения (16) очевидно, что  $e$  можно представить в виде степенного ряда в форме

$$e = e' (\alpha_0 + \alpha_1 e' + \alpha_2 e'^2 + \dots). \quad (24)$$

Если  $|p - q|$  — малое число, то в (16) необходимо подставить также и  $S_2$ . Рассмотрение уравнения при  $|p - q| \geq 2$  аналогично приведенному, хотя, естественно, результаты оказываются иными. Но если  $|p - q| = 1$ , то, как легко заключить из (19) § 3 гл. VI\*, в возмущающей функции имеется член

$$\frac{1}{2} \frac{aa'}{[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(l - l' + \pi - \pi')]^{3/2}} \cdot [e \cdot \cos(2l - l' + \pi - \pi') + e' \cos(l - 2l' + \pi - \pi')],$$

и если первый множитель разложить в тригонометрический ряд по кратным  $l - l' + \pi - \pi'$ , получим член, который не содержит  $t$ . Если, например,  $2n - n' = 0$ , то для этого члена получим значение

$$\frac{1}{4} B_0 e \cos(2c - c' + \pi - \pi'),$$

или, так как  $\cos(2c - c' + \pi - \pi')$  равен  $+1$  или  $-1$ , то имеем  $\pm \frac{1}{4} B_0 e$ . Если подставить этот член в (16), то получим уравнение вида

$$\pm \frac{1}{4} \frac{B_0}{Le} + K_1 + K_2 \frac{e'}{e} + \dots = 0.$$

Корень  $e$  этого уравнения не обращается в нуль вместе с  $e'$ , как это имело место в (22\*). Поэтому значения эксцентриситета, которые соответствуют периодическому решению при  $|p - q| = 1$ , вообще говоря, много больше, чем при  $|p - q| > 1$ , и без подробного исследования нельзя решить, существуют ли вообще периодические решения второго сорта при  $p - q = 1$ , так как для этого еще необходимо, чтобы значение корня для  $e$  было меньше единицы. Между тем из рассмотренного Хиллом частного случая, о котором дальше будет идти речь, можно ожидать, что этот случай имеет место.

Если масса  $m$  планеты исчезающе мала, то мы будем иметь дело с ограниченной круговой задачей трех тел; тогда обращается в нуль второй член в (16), и мы получим условие в форме

$$\frac{1}{e} \frac{\partial S}{\partial e} = 0, \quad (25)$$

где

$$S = \frac{1}{m} [R].$$

Так как в этом случае  $\pi - \pi'$  также должно быть равно  $0^\circ$  или  $180^\circ$ , то здесь, вследствие того, что  $\pi'$  — постоянная, неизменно и  $\pi$ . Итак, для периодических решений второго сорта в ограниченной задаче трех тел перигелий малой планеты неподвижен.

Если  $|p - q|$  не будет малым числом, так что можно написать для (25) уравнение

$$\frac{\partial S_1}{\partial e} = 0, \quad (25^*)$$

получится уравнение вида

$$B_1 e - B_2 e' \cos(\pi - \pi') + \text{члены высшего порядка} \\ \text{относительно } e \text{ и } e' = 0. \quad (25^{**})$$

Все члены, которыми мы пренебрегаем, имеют нечетную степень. Это выражение показывает, что в данном случае к периодическим решениям может привести только значение  $\pi - \pi' = 0$ , но не равное  $180^\circ$ . Приближенное значение  $e$  при малых  $e'$  будет

$$e = \frac{B_2}{B_1} e'. \quad (26)$$

В § 4 гл. VI было показано, что всегда ( $a < a'$ )  $B_1 > B_2$ . Стало быть, эксцентриситет малой планеты для периодических решений всегда меньше эксцентриситета возмущающей планеты.

Периодические решения астероидной задачи трех тел были рассмотрены Хиллом для случая, когда возмущающей планетой является Юпитер. Хилл принимает  $e' = 0,04825$  и учитывает в  $S_1$  члены до шестого порядка включительно. В случае, когда  $|p - q|$  большое число, Хилл получает значения корней уравнения (25\*), приводимые в табл. XXII.

Таблица XXII

Периодические решения второго сорта для астероидной задачи трех тел

$\alpha$	$e$	$x$	$e$	$\alpha$	$e$
0,02	0,001 2091	0,26	0,015 5796	0,50	0,029 1772
0,04	0,002 4178	0,28	0,016 7534	0,52	0,030 2466
0,06	0,003 6258	0,30	0,017 9216	0,54	0,031 3029
0,08	0,004 8326	0,32	0,019 0838	0,56	0,032 3453
0,10	0,006 0379	0,34	0,020 2332	0,58	0,033 3726
0,12	0,007 2414	0,36	0,021 3875	0,60	0,034 3937
0,14	0,008 4426	0,38	0,022 5281	0,62	0,035 3776
0,16	0,009 6411	0,40	0,023 6605	0,64	0,036 3529
0,18	0,010 8366	0,42	0,024 7841	0,66	0,037 3380
0,20	0,012 0286	0,44	0,025 8982	0,68	0,038 2412
0,22	0,013 2167	0,46	0,027 0022	0,70	0,039 1503
0,24	0,014 4005	0,48	0,028 0955		

Так как

$$n = \frac{1}{a^{3/2}}, \quad n' = \frac{\sqrt{1+m'}}{a'^{3/2}}, \quad \frac{n}{n'} = \frac{p}{q},$$

то  $\alpha$  получим из уравнения

$$\ln \alpha = 9,9998618 - \frac{2}{3} \ln \frac{p}{q}.$$

Если задана соизмеримость  $p : q$ , то отсюда получим значение  $\alpha$ , и таблица дает соответствующее значение эксцентриситета орбиты малой планеты, которое соответствует периодическому решению второго сорта.

Хилл также рассчитал периодические орбиты для малых значений  $|p - q|$ , а именно при  $p = 3, q = 1$  и при  $p = 2, q = 1$ . Здесь исследование более трудоемкое и частично необходимо численное интегрирование. Для  $p=3, q=1$  он показал, что периодические орбиты этого рода могут существовать только в том случае, когда перигелии малой планеты и Юпитера совпадают, так что  $\pi - \pi' = 0$ . Здесь Хилл получает

$$\frac{\partial S_1}{\partial e} = -0,0080600 + 0,287698e - 0,0046723e^2 + 0,202990e^3,$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial e} = -0,1082128 + 1,250172e - 0,630954e^2 + 1,765393e^3,$$

так что

$$\frac{\partial S}{\partial e} = -0,1162728 + 1,537870e - 0,677677e^2 + 1,968383e^3.$$

Корень этого уравнения будет  $e = 0,077565$ . Более ясное представление о соответствующей периодической орбите дает рис. 37, на котором представлена синодическая орбита планеты со средним движением, втрое превосходящем среднее движение Юпитера. Изображенная здесь орбита называется синодической потому, что она отнесена к вращающейся системе координат, ось которой проходит через Солнце и Юпитер. Буквы  $J$  и  $J'$  указывают положение Юпитера в перигелии и афелии. В обоих случаях он находится в соединении с планетой, которая расположена в точках  $P$  и  $P'$  соответственно.

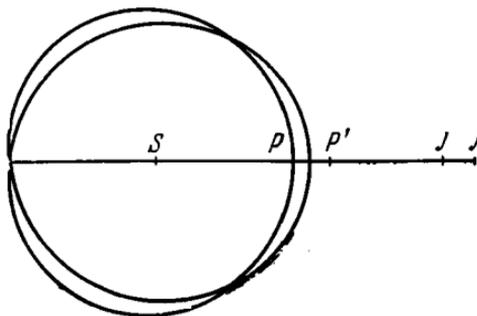


Рис. 37.

Хилл исследовал также решения при  $p = 2, q = 1$ . Исследование оказалось весьма трудным и выполнялось в основном при помощи численного интегрирования.

Для  $\pi - \pi' = 0$  Хилл получил для эксцентриситета значение  $e = 0,7073$ . Соответствующая синодическая орбита планеты изображена на рис. 38. Эксцентриситет в этом случае настолько велик, что за время одного синодического оборота планета четыре раза пересекает орбиту Юпитера. Рис. 38 показывает, что малая планета движется на большом удалении от Юпитера, и отсюда Хилл заключает, что периодические возмущения должны быть малы, и по его оценкам «ни один из коэффициентов в долготе не превосходит значения  $200''$ ».

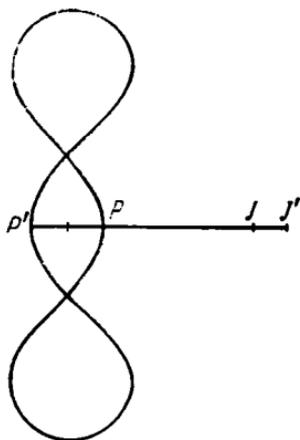


Рис. 38.

Сопоставляя результаты этого параграфа, находим, что периодические решения второго сорта в задаче трех тел существуют при следующих условиях. При  $\mu = 0$ :

1. Средние движения обеих планет  $n$  и  $n'$  должны быть соизмеримы, так что

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}, \tag{a}$$

где  $p$  и  $q$  обозначают целые числа.

2. Долготы перигелиев  $\pi$  и  $\pi'$  обеих планет должны быть тождественны или различаться друг от друга на  $180^\circ$ :

$$\pi - \pi' = 0 \quad \text{или} \quad \pi - \pi' = 180^\circ. \quad (b)$$

3. Если начало отсчета времени выбрать так, что  $c' = 0$ , то  $c$  должно иметь такое значение, чтобы

$$c = r \cdot \frac{180^\circ}{q}, \quad (c)$$

где  $r$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots, 2q - 1$ .

4. Эксцентриситеты  $e$  и  $e'$  должны быть выбраны так, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial S}{\partial e} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'} \frac{\partial S}{\partial e'} = 0, \quad (d)$$

где  $S$  содержит те члены возмущающей функции (17), для которых

$$ip - i'q = 0.$$

Чтобы полученное таким путем решение было периодическим, необходимо, чтобы гессиан от  $[F_1]$  по  $c, k$  и  $K$  был отличен от нуля.

## § 12. Периодические решения третьего сорта

Как было найдено в предыдущем параграфе, при  $\mu = 0$  здесь также имеются периодические движения, если средние движения  $n$  и  $n'$  соизмеримы.

Приведем, в соответствии с § 10 гл. V, дифференциальные уравнения ю четырем степеням свободы; тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{d\Gamma'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma'}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $L, L', l$  и  $l'$  имеют такие же значения, как и в предыдущем параграфе, а

$$g = \pi - \Omega, \quad g' = \pi' - \Omega', \quad (1^*)$$

$$\Gamma = G = L \sqrt{1-e^2}, \quad \Gamma' = G' = L' \sqrt{1-e'^2}. \quad (2^*)$$

Здесь предполагается, что из возмущающей функции  $F$  исключены элементы  $h, h', H$  и  $H'$ , а движение отнесено к неизменя-

мой плоскости, благодаря чему  $h$  и  $h'$  обращаются в нуль; положим, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2c} (\Gamma^2 - \Gamma'^2), \\ H' &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2c} (\Gamma^2 - \Gamma'^2), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $c$  обозначает постоянную площадей.

$F_0$  имеет то же самое выражение, что и в предыдущем параграфе и, следовательно, зависит только от  $L$  и  $L'$ ; а гессиан от  $F_0$  по  $L$  и  $L'$  отличен от нуля.

Как и в предыдущем параграфе, находим условия существования периодических решений, которые здесь будут

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial c} = \frac{\partial [F_1]}{\partial c'} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g'} = 0, \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial \Gamma} = \frac{\partial [F_1]}{\partial \Gamma'} = 0, \quad (3^*)$$

причем  $l = nt + c$ ,  $l' = n't + c'$ .

Возмущающая функция  $F_1$  имеет здесь вид [(10) § 9]

$$F_1 = \sum \mathfrak{A} \cos(il - i'l' + jg - j'g'),$$

и далее,

$$[F_1] = S \mathfrak{A} \cos(ic - i'c' + jg - j'g'),$$

где  $i$  и  $i'$  принимает все те целые значения, для которых  $in - i'n' = 0$ ; если положить, как в предыдущем случае,

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}, \quad (4)$$

то должно быть

$$ip - i'q = 0$$

или

$$i = sq, \quad i' = sp \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (4^*)$$

причем при  $s = 0$  мы получим вековые члены в  $[F_1]$ .

Из (4\*) следует, что одновременно выполняются оба уравнения,  $\frac{\partial [F_1]}{\partial c} = 0$  и  $\frac{\partial [F_1]}{\partial c'} = 0$ , так что вместо (3) надлежит исследовать три уравнения:

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial c} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g'} = 0,$$

и  $c'$  можно выбрать произвольно. Положим  $c' = 0$ , чего можно добиться подходящим выбором эпохи. Приведенные уравнения

принимают вид

$$\sum s_l \mathfrak{A} \sin (s_l c + j g - j' g') = 0,$$

$$\sum j \mathfrak{A} \sin (s_l c + j g - j' g') = 0,$$

$$\sum j' \mathfrak{A} \sin (s_l c + j g - j' g') = 0,$$

и удовлетворяются, если положить

$$\left. \begin{aligned} g &= 0^\circ \text{ или } 180^\circ, \\ g' &= 0^\circ \text{ » } 180^\circ, \\ c &= r \frac{180^\circ}{q} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 2q - 1), \end{aligned} \right\} \quad (4^{**})$$

что не исключает возможности существования других решений этих уравнений. Заметим, что вместо того, чтобы выбирать  $c' = 0$ , можно было бы положить  $c = 0$ , и вместо третьего уравнения (4\*\*) мы получили бы только уравнение

$$c' = r \cdot \frac{180^\circ}{p} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 2p - 1).$$

Остается еще рассмотреть уравнения (3\*). Целесообразно выразить возмущающую функцию через обычные кеплеровские элементы, так как ее форма в этих элементах хорошо известна. Итак, положим (не обращая внимания на угловые элементы, которые не претерпевают никаких изменений)

$$R(L, L', e, e', i, i') = F(L, L', G, G', H, H') = F(L, L', \Gamma, \Gamma'); \quad (5)$$

тогда по § 10 гл. V получим

$$\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial H'}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial G} = \frac{\partial F}{\partial \Gamma}, \quad \frac{\partial F}{\partial G'} = \frac{\partial F}{\partial \Gamma'},$$

так что подлежащие рассмотрению уравнения будут следующими:

$$\frac{\partial [F]}{\partial G} = \frac{\partial [F]}{\partial G'} = 0.$$

Между  $G$ ,  $H$  и  $e$ ,  $i$  имеют место соотношения

$$G = L \sqrt{1 - e^2}, \quad H = G \cos i$$

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L}, & \sin i &= \frac{\sqrt{G^2 - H^2}}{G}, \\ e' &= \frac{\sqrt{L'^2 - G'^2}}{L'}, & \sin i' &= \frac{\sqrt{G'^2 - H'^2}}{G'}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если выражения (6) для  $e$ ,  $e'$ ,  $i$ ,  $i'$  подставить в  $R$ , то эта функция перейдет в  $F$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial G} &= \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} + \frac{\partial R}{\partial \sin i} \frac{\partial \sin i}{\partial G}, \\ \frac{\partial F}{\partial G'} &= \frac{\partial R}{\partial e'} \frac{\partial e'}{\partial G'} + \frac{\partial R}{\partial \sin i'} \frac{\partial \sin i'}{\partial G'}. \end{aligned}$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial G} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{Le}, \\ \frac{\partial \sin i}{\partial G} &= \frac{\cos^2 i}{L \sqrt{1-e^2} \sin i}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

то условия периодичности примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{1-e^2}}{Le} \frac{\partial [R]}{\partial e} - \frac{\cos^2 i}{L \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial [R]}{\partial \sin i} &= 0, \\ \frac{\sqrt{1-e'^2}}{L'e'} \frac{\partial [R]}{\partial e'} - \frac{\cos^2 i'}{L' \sqrt{1-e'^2} \sin i'} \frac{\partial [R]}{\partial \sin i'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В § 9 было доказано, что если неизменяемую плоскость использовать в качестве основной координатной плоскости  $X'Y'$ , то наклонности  $i$  и  $i'$  всегда будут встречаться в комбинации  $i + i'$ , и  $R$  можно разложить по степеням  $\sin^2 \frac{1}{2}(i + i') = \sin^2 \frac{1}{2}J$ .

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial i'} = \frac{\partial R}{\partial J} \quad (9)$$

ИЛИ

$$\cos i \frac{\partial R}{\partial \sin i} = \cos i' \frac{\partial [R]}{\partial \sin i'} = \frac{\partial R}{\partial J},$$

так что уравнения (8) могут быть также записаны в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial [R]}{\partial e} - \operatorname{ctg} i \frac{\partial [R]}{\partial J} &= 0, \\ \frac{1-e'^2}{e'} \frac{\partial [R]}{\partial e'} - \operatorname{ctg} i' \frac{\partial [R]}{\partial J} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Если  $|p - q| > 2$ , то  $S_2$  будет по крайней мере третьей степени, и разложение  $S$  имеет форму (где предполагается  $\pi - \pi' = 0$ )

$$S = \frac{1}{8} B_1 [e^2 + e'^2 - J^2] - \frac{1}{4} B_2 e e' + \Sigma B_{s, s', r} e^s e'^{s'} J^r,$$

где  $s + s' + r > 2$ , а  $r$  всегда четное. Члены низшего порядка в правой части (13) с учетом (12) суть

$$- \frac{1}{4} B_1 \left(1 + \frac{L}{L'}\right) e$$

и

$$- \frac{1}{4} B_1 \left(1 + \frac{L'}{L}\right) e',$$

и если их перенести в левую часть (13) и объединить с членами первой степени в  $\frac{\partial S}{\partial e}$  и  $\frac{\partial S}{\partial e'}$ , то получатся уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} B_1 \left(2 + \frac{L}{L'}\right) e - \frac{1}{4} B_2 e' &= P_1, \\ - \frac{1}{4} B_2 e + \frac{1}{4} B_1 \left(2 + \frac{L'}{L}\right) e' &= P_2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  обозначают степенные ряды относительно  $J_1$ ,  $e$ ,  $e'$ , которые не содержат членов ниже второго порядка.

Мы должны здесь различать два случая. Если  $|p - q|$  четное число, то как  $S_2$ , так и  $S_1$  всегда будут четными функциями от  $e$  и  $e'$ . Тогда все члены в  $\frac{\partial S}{\partial e}$  и  $\frac{\partial S}{\partial e'}$  должны содержать  $e$  или  $e'$  в качестве множителя, так что степенные ряды  $P_1$  и  $P_2$  при  $e = e' = 0$  обращаются в нуль.

Если же, наоборот,  $|p - q|$  — нечетное число, равное  $2k + 1$ , то  $S$  может содержать член вида  $B_k e J^{2k}$ , следовательно, в  $P_1$  будет и член  $-B_k J^{2k}$ . Тогда приближенные значения  $e$  и  $e'$  определяются уравнениями

$$B_1 \left(2 + \frac{L}{L'}\right) e - B_2 e' = -4B_k J^{2k},$$

$$B_2 e - B_1 \left(2 + \frac{L'}{L}\right) e' = 0,$$

которые всегда имеют решение, так как определитель

$$\begin{vmatrix} B_1 \left(2 + \frac{L}{L'}\right) & -B_2 \\ -B_2 & B_1 \left(2 + \frac{L'}{L}\right) \end{vmatrix}$$

всегда отличен от нуля.

Из уравнений (14) в этом случае получим  $e$  и  $e'$  в виде степенных рядов, расположенных по степеням  $J$ , которые обращаются в нуль при  $J = 0$ . Аналогично будет и в случае, когда в  $S$  имеется член вида  $B_k' e' J^{2k}$ .

В этих случаях каждому значению  $J$  соответствуют определенные значения  $e$  и  $e'$ , обращающиеся в нуль вместе с  $J$ .

Если  $|p - q|$  — четное число, то никаких периодических решений уравнений (14) найти невозможно. Как уже отмечалось, в этом случае при  $e = e' = 0$   $P_1$  и  $P_2$  обращаются в нуль, и, следовательно, уравнения (14) имеют решение

$$e = e' = 0. \quad (15)$$

Можно было бы считать, что это решение также относится к периодическим решениям третьего сорта задачи трех тел, и Пуанкаре в своих «Méthodes nouvelles» даже не отмечает каких-либо других решений, относящихся к периодическим орбитам третьего сорта. Между тем, как нам представляется, великий математик допустил здесь ошибочный вывод. В действительности никаких периодических орбит третьего сорта, которые при  $\mu = 0$  были бы круговыми, не существует.

Условия существования периодических решений даются уравнениями (3) и (3\*). Из последних выведены уравнения (10), вместо которых можно использовать уравнения (13), если только  $e$  и  $e'$  не равны нулю. Иначе говоря, периодические решения существуют для таких значений элементов, для которых  $S$  достигает максимума или минимума. Но при этом элементы нельзя выбирать произвольно. Если функцию  $S$  рассматривать как функцию от  $e$  и  $e'$ , то она при  $e = e' = 0$  имеет минимум ( $=0$ ), если  $|p - q|$  — четное число. Но если ее рассматривать как функцию  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , то она при этих значениях  $e$  и  $e'$  не имеет ни минимума, ни максимума.

Изучение уравнений (14), если  $|p - q|$  — четное число, могло бы происходить так, что сначала из каждого уравнения  $e$  представлялось в виде степенного ряда по  $e'$  и  $J$ . Эти ряды при  $e' = 0$  должны обращаться в нуль, так что из (14) получим ряды в виде

$$e = e' P_3(e', J),$$

$$e = e' P_4(e', J).$$

Затем пришли бы к рассмотрению уравнения

$$P_3(e', J) = P_4(e', J). \quad (15^*)$$

Но эти ряды не обращаются в нуль при  $e' = J = 0$ , и отсюда следует, что (15\*) может выполняться только при больших значениях  $e'$  или  $J$ .

Хотя в этом случае  $e$  и  $e'$  могут быть разложены по степеням  $J$ , необходимо при помощи специального исследования доказать, что эти ряды не обращаются в нуль, как это имело место при  $J = 0$  для нечетных значений  $|p - q|$ . Случай  $|p - q| = 2$  рассматривается точно таким образом, как и другие случаи, для которых  $|p - q|$  — четное число.

Что касается случая  $|p - q| = 1$ , то в  $S_2$  имеется член первого порядка, который содержит множителем либо  $e$ , либо  $e'$ . В обоих случаях уравнения (13) принимают форму

$$\left. \begin{aligned} E_0 + P_5(e, e', J) &= 0, \\ P_6(e, e', J) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $P_5$  и  $P_6$  суть степенные ряды, которые обращаются в нуль при  $e = e' = J = 0$ . Второй ряд дает выражение

$$e = P_7(e', J),$$

которое, будучи подставленным в уравнение (16), дает зависимость между  $e'$  и  $J$ . По-видимому, дальнейшее исследование этого уравнения необходимо выполнять численными методами.

Из уравнений (1) и (3\*) следует, что для периодических решений третьего сорта величины  $\pi - \Omega$  и  $\pi' - \Omega'$  остаются неизменными.

### § 13. Периодические решения других сортов

Введенная Пуанкаре классификация периодических решений не учитывает все множество таких орбит. Его исходная точка зрения состоит в отыскании периодических орбит при  $\mu = 0$  и затем в определении условий, при которых периодические орбиты могут быть также при малых значениях  $\mu$ . Прежде всего при этом, конечно, исключаются такие периодические орбиты, для которых  $\mu$  настолько велико, что координаты тела не могут быть разложены по степеням  $\mu$ . Нельзя также быть уверенным, что  $\mu$  при этом должно иметь весьма большое значение. Известно, что  $\mu$  встречается в качестве множителя в вековых неравенствах долготы перигелия и узла периодических орбит, и разложения координат (или элементов) содержат одновременно со степенями  $\mu$  и степени  $t$ . Таким образом, нельзя быть уверенным в том, что при помощи разложений по степеням  $\mu$  можно получить такие орбиты, для которых период  $T$  превышает определенную величину.

Кеплеровские эллипсы благодаря своей простоте весьма подходящи в качестве порождающих при отыскании периодических орбит. Главный их недостаток в этом отношении следует искать в неподвижности перигелиев и узлов. Можно, однако,

использовать в качестве порождающих произвольные промежуточные орбиты и, очевидно, исходить для этой цели из вековых возмущений элементов. При этом можно было бы рассчитывать периодические орбиты долгого периода, а также рекомендовать рассмотрения такого рода для определенных орбит короткого периода.

Ранее предполагалось, что периоды  $T$  для  $\mu = 0$  и  $\mu \neq 0$  одни и те же. Интересно поставить вопрос, можно ли добиться, чтобы периоды в обоих случаях различались на величину, обращаящуюся в нуль вместе с  $\mu$ . Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть даны дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

где

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

и  $F_0$  зависит только от  $x_1, x_2, \dots, x_s$ .

Тогда при  $\mu = 0$

$$x_i = a_i, \quad y_i = n_i t + c_i, \quad (1^*)$$

где

$$n_i = -\frac{\partial F_0}{\partial a_i}.$$

Предположим, что решение (1\*) периодическое с периодом  $T$ . Для отыскания периодических решений при  $\mu \neq 0$  предположим, что начальные значения  $x_i$  и  $y_i$  будут

$$x_i = a_i + \beta_i, \quad y_i = n_i t + c_i + \gamma_i.$$

Определенное движение не должно более обладать периодом  $T$ , а имеет период

$$(1 + k)T.$$

Если положить теперь

$$t = (1 + k)\tau \quad (2)$$

и ввести  $\tau$  в (1) в качестве независимой переменной, так что

$$\frac{dx_i}{d\tau} = (1 + k) \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{d\tau} = -(1 + k) \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

то  $k, \beta_i$  и  $\gamma_i$  следует определить так, чтобы движение было периодическим при  $\mu \neq 0$ .

Полагая

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_i + \beta_i + \xi_i, \\ y_i &= n_i \tau + c_i + \gamma_i + \eta_i \\ (i &= 1, 2, \dots, s), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

получим для  $\xi_i$  и  $\eta_i$  дифференциальные уравнения

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = (1+k) \frac{\partial F}{\partial c_i}, \quad \frac{dn_i}{d\tau} = -(1+k) \frac{\partial F}{\partial a_i} - n_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, s).$$

Функции  $\xi_i$  и  $\eta_i$ , по предположению, являются периодическими функциями от  $\tau$  с периодом  $T$ . Полагая

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1+k}{T} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial c_i} d\tau, \\ \psi_i &= \frac{1+k}{T} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial a_i} d\tau + n_i, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

для периодичности решения будем иметь условия

$$\varphi_i = \psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (5)$$

Для выполнения этих  $2s$  уравнений нужно распорядиться  $2s + 1$  величинами  $\beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) и  $k$ . Ясно, что одной из этих величин можно распорядиться произвольно, например, положить  $k = 0$ , и тогда оставшиеся  $2s$  величин можно всегда определить так, чтобы найти все периодические решения, существующие в окрестности  $\mu = 0$ . Иначе говоря, имеются ли периодические решения, которые при  $k \neq 0$  не совпадают с получающимися при  $k = 0$  решениями, но которые тем не менее совпадают с последними при  $\mu = 0$ ? Как доказал Пуанкаре, этот случай может быть.

Действительно, рассмотрим уравнения

$$\psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Вместо них согласно (4) можно записать

$$k \frac{\partial F_0}{\partial a_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_i \partial a_j} \beta_j + \frac{M}{T} \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial a_i} d\tau + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (6)$$

где отброшенные члены обращаются в нуль при  $\mu = 0$ .

Рассмотрим матрицу

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_s} \\ \frac{\partial F_0}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2 \partial a_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_0}{\partial a_s} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_s \partial a_1} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_s \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_s^2} \end{vmatrix}.$$

Из этой матрицы, вычеркивая 1-й, 2-й, ...,  $(s+1)$ -й столбцы, можно образовать  $s+1$  определитель  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_s$ . Если определитель  $\Delta_0=0$ , в то время как один (или большее число) из определителей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  не равен нулю, то решение при  $k \neq 0$ , вообще говоря, отличается от решения, получающегося при  $k=0$ , в то время как при  $k=0$  не существует простого решения уравнений (6).

Шварцшильд [56] обратил внимание на такой случай, который относится к периодическим решениям второго сорта ограниченной круговой задачи трех тел.

Если возмущающая планета движется вокруг Солнца по окружности, а астероид с массой, равной нулю при  $\mu=0$ , по произвольному эллипсу, тогда движение при  $\mu=0$  будет периодическим, если средние движения астероида  $n$  и возмущающего тела  $n'$  соизмеримы.

Как же обстоит дело с периодическим движением при  $\mu \neq 0$ ? Если период  $T$  в возмущенном и невозмущенном движении один и тот же, то должно иметь место в начале или конце периода симметричное соединение или оппозиция при одном и том же положении, так как период возмущающего тела в обоих случаях один и тот же. Перигелий астероида должен быть неизменным, как было найдено в § 11 при любом значении эксцентриситета возмущающей планеты. Такая периодическая орбита может существовать только при определенных значениях эксцентриситета, который получается из формулы (25) упомянутого параграфа.

Если эксцентриситет имеет иное значение, то по истечении времени  $T$  перигелий переместится в прямом или обратном движении. Как известно из § 11 гл. VII, среднее движение перигелия для малых значений  $e$  всегда положительно, поэтому планета и астероид через время  $T + \Delta T$  снова будут находиться в симметричной конфигурации или оппозиции, если это имело место в момент времени  $t=0$ . Следовательно, при помощи соответствующего определения элементов при  $t=0$  можно полу-

чить периодическое решение с периодом  $T + \Delta T$ , и это решение не будет совпадать с ранее полученным периодическим решением.

Аналитически это осуществляется следующим образом. Два тела, планета и Солнце, с массами  $\mu$  и 1, движутся вокруг общего центра инерции по круговым орбитам. Третье тело, астероид, с бесконечно малой массой, притягивается к этим двум телам. Отнесем движение астероида к системе координат с началом в Солнце. тогда, в соответствии с § 2 гл. V,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где

$$p_i = \frac{dq_i}{dt},$$

а через  $q_1, q_2, q_3$  обозначены прямоугольные координаты астероида. Здесь

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\mu}{\Delta} - \frac{1}{r} + \mu (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \quad (8)$$

где  $\Delta$  обозначает расстояние между астероидом и планетой,  $r$  — радиус-вектор,  $q_4, q_5, q_6$  — координаты планеты. Расстояние от планеты до Солнца принято равным единице, постоянная тяготения также равна единице.

Совместим плоскость  $XU$  с плоскостью орбиты планеты, и предположим, что долгота планеты при  $t = 0$  равна нулю; тогда

$$q_4 = \cos n't, \quad q_5 = \sin n't, \quad q_6 = 0,$$

где

$$n' = \sqrt{1 + \mu},$$

и, наконец,

$$\Delta^2 = 1 + r^2 - 2 (q_1 \cos n't + q_2 \sin n't). \quad (8^*)$$

Положим

$$H' = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{1}{r},$$

и дифференциальные уравнения примут вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Принтегрируем эти уравнения по методу Якоби. Тогда, вводя

элементы Делоне, получим дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a}, \quad l = \text{средняя аномалия}, \\ G &= \sqrt{a(1-e^2)}, \quad g = \pi - \Omega, \\ H &= G \cos i, \quad h = \Omega. \end{aligned}$$

Здесь

$$F = \frac{1}{2L^2} + \frac{\mu}{\Delta} - \mu (q_1 \cos n't + q_2 \sin n't). \quad (9^*)$$

В  $F$ , кроме элементов, входит также и время. Однако, вводя другие элементы, время можно исключить. А именно, из (8) и (9\*) очевидно, что время встречается лишь в комбинации

$$q_1 \cos n't + q_2 \sin n't.$$

Но согласно (23) § 9 гл. IV

$$q_1 = A\xi + B\eta, \quad q_2 = A_1\xi + B_1\eta.$$

Значения коэффициентов  $A, A_1, B, B_1$  приводятся в этом же § 9; имеем также

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(\cos w - e), \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin w, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $w$  обозначает эксцентрическую аномалию. Величины  $\xi$  и  $\eta$  можно выразить через линейные эллиптические элементы и через  $l$ .

Принимая во внимание значения коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$ , находим, что

$$q_1 \cos n't + q_2 \sin n't = A'\xi + B'\eta, \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A' &= \cos g \cos (h - n't) - \sin g \sin (h - n't) \cos i, \\ B' &= -\sin g \cos (h - n't) - \cos g \sin (h - n't) \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Отсюда следует, что в  $F$  время входит всегда в комбинации  $h - n't$ . Если вместо  $h - n't$  ввести новую переменную и одновременно к характеристической функции  $F$  добавить  $n'H$ , то

получим каноническую систему дифференциальных уравнений, в которую время явно не входит.

Положим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a}, & y_1 &= \text{средняя аномалия,} \\ x_2 &= \sqrt{a(1-e^2)}, & y_2 &= \pi - \Omega, \\ x_3 &= \sqrt{a(1-e^2)} \cos i, & y_3 &= \Omega - n't, \\ F' &= \frac{1}{2x_1^2} + n'x_3 + \frac{\mu}{\Delta} - \mu(q_1 \cos n't + q_2 \sin n't), \end{aligned}$$

где вместо  $q_1 \cos n't + q_2 \sin n't$  следует подставить выражение (11), и

$$\begin{aligned} A' &= \cos y_2 \cos y_3 - \sin y_2 \sin y_3 \frac{x_3}{x_2}, \\ B' &= -\sin y_2 \cos y_3 - \cos y_2 \sin y_3 \frac{x_3}{x_2}. \end{aligned}$$

Имеем теперь

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11^{**})$$

Из выражения для  $F'$  находим

$$F' = F_0 + \mu F_1,$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2x_1^2} + n'x_3, \\ F_1 &= \frac{1}{\Delta} - (q_1 \cos n't + q_2 \sin n't), \end{aligned} \right\} \quad (11^{***})$$

и далее находим, что разложение  $F_1$  имеет следующую форму:

$$F_1 = \Sigma A \cos(iy_1 + i'y_2 + jy_3).$$

Если движение происходит в плоскости (лежащей в плоскости орбиты планеты), то для  $A'$  и  $B'$  получим выражения

$$\begin{aligned} A' &= \cos(\pi - n't), \\ B' &= -\sin(\pi - n't), \end{aligned}$$

и положим

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a}, & y_1 &= l, \\ x_2 &= \sqrt{a(1-e^2)}, & y_2 &= \pi - n't; \end{aligned}$$

в таком случае дифференциальные уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial y_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + n'x_2.$$

Будем искать периодические решения второго сорта для этих дифференциальных уравнений. Если через  $n$  обозначить среднее движение астероида, так что

$$n = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1^3}, \quad (13)$$

то первое условие периодичности решения состоит в том, что  $n$  и  $n'$  соизмеримы;

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}, \quad (14)$$

где  $p$  и  $q$  взаимно простые числа.

В этом случае движение будет периодическим при  $\mu = 0$ . Положим

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \beta_1 + \xi_1, & y_1 &= nt + c + \gamma_1 + \eta_1, \\ x_2 &= a_2 + \beta_2 + \xi_2, & y_2 &= -n't + g + \gamma_2 + \eta_2, \end{aligned}$$

$$[F] = \frac{1}{T} \int_0^T F d\tau = S A_{i, i'} \cos (ic - i'g),$$

где при суммировании  $i$  и  $i'$  принимают все целые значения, для которых

$$ip - i'q = 0 \quad (15)$$

и, следовательно,

$$[F] = \sum_{s=0}^{\infty} A_{sq, sp} \cos s(qc - pg); \quad (15^*)$$

тогда из (4) и (6) получим условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial [F]}{\partial c} &= -q \sum_{s=0}^{\infty} s A_{sq, sp} \sin s(qc - pg) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial g} &= -p \sum_{s=0}^{\infty} s A_{sq, sp} \sin s(qc - pg) = 0, \\ k \frac{\partial F_0}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} \beta_1 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} \beta_2 + \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \dots &= 0, \\ k \frac{\partial F_0}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2 \partial x_1} \beta_1 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} \beta_2 + \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Так как без ограничения общности можно выбрать  $g = 0$ , то первые два из этих уравнений выполняются при

$$c = r \frac{180^\circ}{q} \quad (r = 0, 1, \dots, 2q - 1). \quad (17)$$

Что касается двух последних уравнений (16), то легко видеть, что гессиан от  $F_0$  по  $x_1$  и  $x_2$  равен нулю. Здесь получаются различные решения в зависимости от того, принимается ли  $k = 0$  или  $k > 0$ . При  $k = 0$  получим обычные периодические решения второго сорта с неподвижным перигелием, и эксцентриситет определится из уравнения

$$\frac{\partial [F]}{\partial x_2} = - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{x_1 e} \frac{\partial [F_1]}{\partial e} = 0. \quad (18)$$

Это решение имеет место при определенных значениях эксцентриситета. Уравнение (18) тождественно с уравнением (25) § 11.

Если  $k$  отлично от нуля, то одна из величин  $\beta_1$  или  $\beta_2$  может быть принята равной нулю. Покажем, что коэффициент при  $\beta_2$  обращается в нуль, поэтому, если получается простое решение имеем только  $\beta_2 = 0$ , а так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x_1} &= - \frac{1}{x_1^3}, & \frac{\partial F_0}{\partial x_2} &= n', \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} &= \frac{3}{x_1^4}, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} = 0, \end{aligned}$$

то для определения  $k$  и  $\beta_1$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{k}{x_1^3} - \frac{3\beta_1}{x_1^4} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \dots &= 0, \\ n'k + \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \dots &= 0, \end{aligned}$$

которые дают

$$\left. \begin{aligned} k &= - \frac{\mu}{n'} \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \dots, \\ \beta_1 &= \frac{x_1}{3} k - \frac{x_1^4}{3} \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Можно также записать

$$k = \mu \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{ae}} \frac{\partial |F_1|}{\partial e}, \quad (19^*)$$

где принято  $n' = 1$ .

Для периода имеем

$$(1 + k) T$$

$n$ , значит,  $k$  обозначает движение перигелия. Астероид в течение периода совершит  $p$  оборотов по (вращающемуся) эллипсу, а планета обернется  $q$  раз по своей круговой орбите.

Исследование периодических решений, которые соответствуют соизмеримости средних движений, этим путем оказывается удобным и быстрым, лишь после того как получено разложение возмущающей функции. Так как  $\beta_2 = 0$ , то такие решения могут существовать при всех значениях эксцентриситета.

Если рассматривается пространственное движение тела нулевой массы, то из уравнения (11\*\*) можно сделать аналогичные выводы. Тогда придем к периодической орбите с движущимся узлом. Между эксцентриситетом и наклонностью орбиты астероида должна иметь место зависимость, а расстояние перигелия от узла остается неизменным.

---

Значение периодических орбит для астрономии должно быть высоко оценено. С теоретической точки зрения, как замечает Пуанкаре, при помощи периодических орбит сначала удастся вторгнуться в область, до сих пор недоступную анализу — в структуру интегралов задачи трех тел. основополагающие работы Пуанкаре представляют собой бесценный источник для математиков и астрономов. Периодические решения скоро будут оказывать большую помощь практической астрономии. Как известно в настоящее время, в планетной системе существует один случай, в котором действительно имеет место периодическое решение задачи трех тел (в этом случае проблемы четырех тел), а именно — для трех внутренних спутников Юпитера. Значение периодических решений для астрономии заключается главным образом не в возможности обнаружить в природе такие случаи (хотя каждый пример такого рода и представляет исключительный интерес), а чтобы с их помощью можно было успешно разрешить различные особенно трудные проблемы небесной механики. В своей основополагающей работе о движении Луны Хилл исходит из периодического решения первого сорта, а относящиеся к этому численные исследования рассматривает не как вычислительные упражнения, а как истинную основу для точного расчета лунной орбиты. Эта исходная точка может с успехом найти при-

менение и в теории малых планет. Периодические решения первого сорта, без сомнения, будут играть важную роль в теории спутников планет, как это вытекает из работ Эйри, Тиссерана, Баклунда и др. о спутниках Сатурна. Случай либрации для малых планет стоят в тесной связи с периодическими решениями второго сорта, и групповые возмущения Болина в принципе являются не чем иным, как применением этих решений, хотя его исходная точка зрения и несколько отличается от этого подхода.

Итак, есть все основания считать, что периодические решения задачи трех тел будут определенно играть значительную роль в астрономии\*).

---

\*) Метод Пуанкаре в теории движения малых тел солнечной системы широко использовал Г. А. Чеботарев (Усп. астр. наук 5, 1950). Метод А. М. Ляпунова построения периодических решений применен Г. Н. Дубошным при разработке теории движения спутников Сатурна (Труды ГАИШ 15, 1945; 28, 1960). См. также Ю. А. Рябов, Астрон. журн. 29. вып. 5, 1952. (Прим. перев.)

## СХОДИМОСТЬ РЯДОВ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

## § 1. Сходимость рядов в задаче двух тел

Вопрос о сходимости рядов в астрономии имеет большое значение не только с чисто математической точки зрения, но прежде всего в силу важных практических выводов, которые можно сделать только на основе тщательных исследований сходимости используемых рядов. При этом необходимо иметь в виду 1) в какой области используемых переменных эти ряды сходятся и 2) насколько будет велика ошибка, если разложения оборвать на определенном члене. Наконец, 3) при определенных условиях можно сделать выводы из исследований сходимости о поисках тех методов разложения, которые давали бы при числовых расчетах наибольшую выгоду.

Вопросы второй и третьей категории до сих пор мало исследованы, хотя часто появляются важные результаты. Можно вспомнить, например, исследования о рядах Эйлера и их значении для так называемых механических квадратур. Подобные исследования есть и в теории возмущений. Между тем здесь перед нами открывается непочатый край работы, где при помощи существующих методов исследования сходимости, несомненно, можно получить в высшей степени важные выводы для астрономии.

Исследования первой группы вопросов, которые в свою очередь являются основными для других вопросов, были продвинуты в большей мере, хотя и здесь ряд проблем ждет своего разрешения. В результате этих исследований еще не удалось получить выражения для координат в задаче трех тел, которые были бы справедливы на неограниченном промежутке времени, или по крайней мере установить существование такого рода выражений. Все еще остается открытым чрезвычайно важный вопрос о верхней границе значений координат в задаче трех тел, хотя едва ли нужно считать слишком нереальным предсказание, что его решение не придется ожидать много десятилетий.

В этом параграфе мы должны исследовать разложения относительных координат в задаче двух тел. В § 9 гл. IV было показано, что координаты в задаче двух тел, если рассматривать эл-

липтическое движение, суть периодические функции средней аномалии, которые можно представить в виде рядов Фурье в следующей форме:

$$\sum A_i \cos il + \sqrt{1 - e^2} \cdot \sum B_i \sin il, \quad (1)$$

где

$$l = n(t - t_n).$$

В том же самом параграфе было доказано, что эти ряды сходятся для всех действительных значений  $l$  (а значит, и для всех действительных значений времени) и для всех конечных значений эксцентриситета. Достаточно рассматривать такие значения  $e$ , которые по абсолютной величине меньше единицы. Коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  суть голоморфные функции  $e$ , которые могут быть разложены при произвольном конечном значении  $e_0$  в ряд по положительным степеням  $e - e_0$ .

С другой стороны, функции  $\cos il$  и  $\sin il$  суть, очевидно, голоморфные функции  $t$ , и каждый член в приведенном ряде можно, следовательно, при произвольных конечных значениях  $e_0$  и  $t_0$  разложить по положительным степеням  $e - e_0$  и  $t - t_0$  при сколь угодно больших значениях  $e - e_0$  и  $t - t_0$ .

Однако отсюда не следует, что ряд (1), а значит, и координаты, можно разложить в ряды по степеням  $e - e_0$  и  $t - t_0$ , которые сходятся при сколь угодно больших значениях  $e - e_0$  и  $t - t_0$ . Для подобного вывода необходимо, чтобы ряды (1) удовлетворяли определенным условиям, полученным Вейерштрассом, которые здесь оказываются невыполненными.

Между тем во многих случаях необходимо применять разложения координат по степеням эксцентриситета или времени, и в связи с этим возникает задача об определении области сходимости этих разложений.

Разложения координат по степеням эксцентриситета, которые мы хотим исследовать в этом параграфе, впервые были исследованы Лапласом в приложении к пятому тому его «Mécanique céleste» [57]. Его метод в принципе простой и прямой, однако требует при своем применении весьма долгих и сложных рассуждений. Позднее Коши и Руше рассматривали вопрос, опираясь на развитый Коши метод; аналогичный подход в последнее время принимается в большинстве работ по этой проблеме.

Эти исследования относятся к разложению координат по степеням  $e$ , т. е. к разложению этих функций в окрестности точки  $e = 0$ . Отсюда непосредственно нельзя определить область сходимости разложения этих функций в окрестности произвольной точки  $e = e_0$ . Этот вопрос был исследован автором, и мы повторим здесь основные этапы этих рассуждений [57].

В § 9 гл. IV мы нашли для относительных координат в задаче двух тел следующие выражения:

$$\begin{aligned}x &= A\xi + B\eta, \\y &= A_1\xi + B_1\eta, \\z &= A_2\xi + B_2\eta,\end{aligned}$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — известные тригонометрические функции долготы перигелия, долготы узла и наклонности, и где

$$\begin{aligned}\xi &= a(\cos w - e), \\ \eta &= a\sqrt{1 - e^2}\sin w.\end{aligned}$$

Здесь  $w$  означает эксцентрическую аномалию планеты. Координаты являются голоморфными функциями эксцентрической аномалии.

Если рассматривать координаты как функции эксцентриситета, то область сходимости разложений координат по степеням  $e - e_0$  зависит от положения особых точек этой функции. Но приведенные выражения показывают, что этими особыми точками являются  $e = 1$  (в этой точке функция  $\sqrt{1 - e^2}$  имеет точку ветвления) и особые точки  $w$ , рассматриваемой как функция  $e$ . Поэтому задача сводится к следующей: какую область сходимости имеет разложение  $w$  по степеням  $e - e_0$ ?

Функциональная связь между эксцентрической аномалией и эксцентриситетом дается при помощи уравнения Кеплера. Если эксцентриситет обозначить через  $\zeta$ , а среднюю аномалию через  $l$ , то это уравнение примет вид

$$w - \zeta \sin w = l. \quad (1^*)$$

В то время как  $w$  рассматривается здесь как функция  $\zeta$ , на  $l$  можно смотреть как на постоянный параметр, который может принимать произвольные действительные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Положим

$$w = \varphi(\zeta) \quad (2)$$

или, если учесть еще параметр  $l$ , то

$$w = \varphi(\zeta, l). \quad (2^*)$$

Речь идет об определении особых точек функции  $\varphi$ . Если положения этих особых точек определены, то, как известно, разложение будет сходиться в окрестности точки  $\zeta = \zeta_0$  внутри круга, центр которого лежит в  $\zeta_0$  и граница которого проходит через ближайшую особую точку.

Функция  $\varphi$  является бесконечнозначной функцией  $\zeta_0$ , так что данному значению  $\zeta$  соответствует бесчисленное множество значений  $w$ . Эти значения можно найти следующим образом. Полагая

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad w = x + iy, \quad \kappa^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad (3)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , из (1\*), отделяя действительные и мнимые части, получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} &= (x-l)\xi + y\eta, \\ \kappa^2 \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} &= y\xi - (x-l)\eta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Сначала предположим, что эксцентриситет имеет действительное значение, так что  $\eta = 0$ .

Из (4) очевидно, что значения

$$\left. \begin{aligned} y &= 0, \\ x - l &= \xi \sin x \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

всегда представляют решение (4). Если  $\xi < 1$ , как мы здесь предварительно предположим, то второе из уравнений (5) выполняется для единственного значения  $x$ . Как сейчас будет доказано, оно является единственным действительным значением. Для определения остальных значений  $w$  напишем соотношения (4), где все еще полагаем  $\eta = 0$ , в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^y + e^{-y}}{2} &= \frac{x-l}{\xi \sin x}, \\ \frac{e^y - e^{-y}}{2y} &= \frac{1}{\xi \cos x}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Значения  $x$  и  $y$ , которые удовлетворяют этим уравнениям, легко можно получить графическим путем. Будем рассматривать эти уравнения как уравнения двух кривых, которые обозначим соответственно через (A) и (B). Точки пересечения этих кривых дадут искомые значения  $x$  и  $y$ .

Кривая (B) состоит из бесконечного множества ветвей, которые можно получить, если произвольную ветвь переносить параллельно вдоль оси  $x$  на расстояние  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Здесь достаточно исследовать только одну ветвь, и так как обе кривые симметричны относительно оси  $x$ , то достаточно принять во внимание только положительные значения  $y$ .

Левая часть уравнения для (B)

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \frac{1}{\xi \cos x}$$

монотонно возрастает вместе с  $y$  и, значит, при  $y = 0$  имеет минимальное значение, равное единице. Это проще всего найти, подставив вместо  $e^y$  и  $e^{-y}$  степенные ряды. Каждому значению  $x$  соответствует только одно значение  $y$ . Минимальное значение  $y$  получается при  $x = 0$  и определяется из уравнения

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \frac{1}{\xi}.$$

Так как мы предполагали здесь  $\xi < 1$ , то кривая (B) никогда не пересечет оси  $x$ . Если  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ , то  $y = \infty$ . Следовательно, рассмотренная здесь ветвь кривой асимптотически приближается к двум прямым, определяемым уравнениями  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Кривая (A) может быть рассмотрена аналогично. Левая часть имеет минимальное значение, равное единице при  $y = 0$ , и монотонно возрастает при возрастании  $y$  до бесконечности. Кривая состоит из бесконечного множества ветвей, которые асимптотически приближаются к параллельным оси  $y$  прямым  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Кривая симметрична относительно оси  $x$ , и каждая из ветвей заключается между двумя параллельными прямыми  $x = 2n\pi$  и  $x = (2n + 1)\pi$ . Кроме того, имеется ветвь кривой между  $x = 0$  и  $x = \pi$ . Эта ветвь пересекает ось  $x$  в той точке  $x_0$ , которая определяется уравнением

$$x_0 - \xi \sin x_0 = l \quad (7)$$

и асимптотически стремится к прямой  $x = \pi$ .

При  $\xi = 1/2$ ,  $l = \frac{\pi}{4}$  кривые имеют вид, указанный на рис. 39.

Значения функции  $\varphi(\zeta)$  при этих значениях эксцентриситета и средней аномалии определяются точками пересечения обоих множеств кривых. Одно значение  $x_0$  — действительно и находится из (7). Остальные значения величины  $x$  лежат между  $x = 4n \frac{\pi}{2}$  и  $x = (4n + 1) \frac{\pi}{2}$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и между  $x = 4n \frac{\pi}{2}$  и  $x = (4n - 1) \frac{\pi}{2}$  при  $n = 0, -1, -2, -3, \dots$  и приближаются при возрастании  $n$  к значениям  $x = (4n + 1) \frac{\pi}{2}$  при положительных значениях  $n$ , и к значениям  $x = (4n - 1) \frac{\pi}{2}$  при отрицательных значениях  $n$ . Величина  $y$  при возрастании  $n$  стремится к бес-

конечности. Ниже приводится уравнение кривой, которая проходит через все точки пересечения кривых (A) и (B).

Если эксцентриситет имеет комплексное значение, то вычисление соответствующих значений  $w$  несколько более трудно.

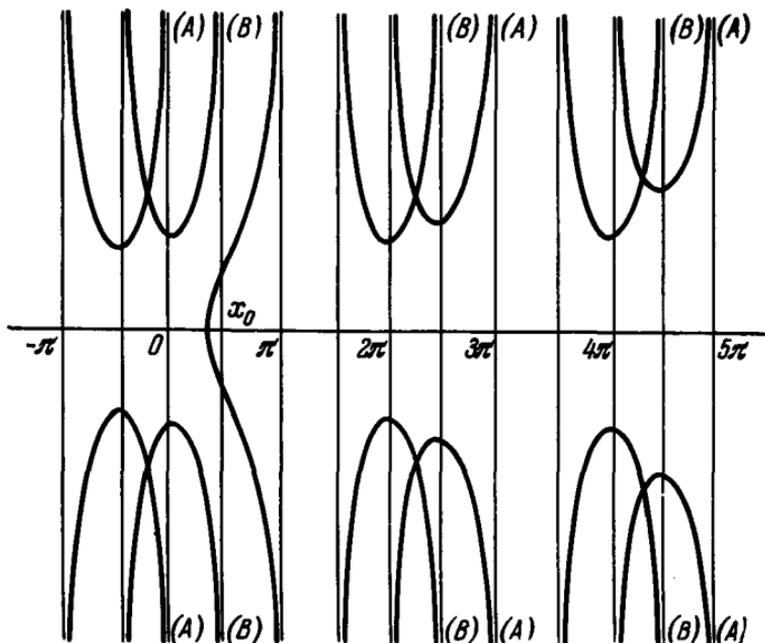


Рис. 39.

Однако его также можно выполнить в элементарной форме. Действительно, из (4) выводим следующие уравнения:

$$\frac{1}{4} \kappa^2 \{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x\} = (x-l)^2 + y^2, \quad (a)$$

$$\kappa^4 = \frac{4[(x-l)\xi + y\eta]^2}{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{4[y\xi - (x-l)\eta]^2}{(e^y - e^{-y})^2}, \quad (b)$$

$$\kappa^4 = \frac{[(x-l)\xi + y\eta]^2}{\sin^2 x} - \frac{[y\xi - (x-l)\eta]^2}{\cos^2 x}, \quad (c)$$

или, отделяя в этих уравнениях переменные  $x$  и  $y$ ,

$$e^{2y} + e^{-2y} - \frac{4y^2}{\kappa^2} = 2 \cos 2x + \frac{4(x-l)^2}{\kappa^2}, \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \kappa^4 (e^{2y} - e^{-2y})^2 &= (x-l)^2 [\kappa^2 e^{2y} + \kappa^2 e^{-2y} - 2(\xi^2 - \eta^2)] - \\ &- 8(x-l)y\xi\eta + y^2 [\kappa^2 e^{2y} + \kappa^2 e^{-2y} + 2(\xi^2 - \eta^2)], \quad (b) \end{aligned}$$

и

$$x^4 = y^2 \left[ \frac{\eta^2}{\sin^2 x} - \frac{\xi^2}{\cos^2 x} \right] + 2y \left[ \frac{(x-l)\xi\eta}{\sin^2 x} + \frac{(x-l)\xi\eta}{\cos^2 x} \right] + \\ + (x-l)^2 \left[ \frac{\xi^2}{\sin^2 x} - \frac{\eta^2}{\cos^2 x} \right]. \quad (c)$$

Все эти уравнения можно привести к форме

$$f(x) = g(y),$$

где  $f(x)$  и  $g(y)$  суть определенные функции  $x$  и  $y$ . Кривые, уравнения которых имеют такую форму, можно всегда без труда начертить. Точки пересечения двух из кривых (а), (b) или (c) определяют значения  $x$  и  $y$ . Уравнение (а) можно назвать уравнением модуля, так как оно зависит только от модуля, а не от значений действительной и мнимой частей эксцентриситета. Соответствующая кривая отлична от остальных тем, что она непрерывна. При рассмотрении уравнений (b) и (c) необходимо обратить внимание на то, что при возведении уравнений (4) в квадрат вводятся посторонние корни, которые нужно исключить.

Итак, мы установили, что  $w$  является бесконечнозначной функцией эксцентриситета. Если эксцентриситет принимает действительное значение, меньшее единицы, то для соответствующего значения  $w$  имеем единственный действительный корень. Этот корень и представляет интерес в астрономических приложениях уравнения Кеплера. При заданном значении  $\zeta_0$  его нужно разложить в ряд по степеням  $\zeta - \zeta_0$ . Для этой цели можно воспользоваться теоремой существования Коши (§ 6 гл. VIII).

Из уравнения

$$w - l - \zeta \sin w = 0 \quad (8)$$

следует соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\sin w}{1 - \zeta \cos w}. \quad (9)$$

Из теоремы существования Коши вытекает, что интеграл  $w$  этого уравнения, который при  $\zeta = \zeta_0$  принимает значение  $w = w_0$ , можно разложить по степеням  $\zeta - \zeta_0$  в форме

$$w = w_0 + c_1 (\zeta - \zeta_0) + c_2 (\zeta - \zeta_0)^2 + \dots,$$

если только можно разложить в ряды по степеням  $w - w_0$  и  $\zeta - \zeta_0$  правую часть (9). Особые точки, для которых разложения такого рода не существуют, получатся, если из уравнений

$$w - l - \zeta \sin w = 0$$

и

$$1 - \zeta \cos w = 0 \quad (10)$$

исключить  $w$ . Положения этих особых точек устанавливаются следующим образом. Из (10) получаем

$$i \sin w = \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1},$$

$$e^{iw} = \frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1},$$

и запишем в форме (8)

$$e^{iw} = e^{i\zeta \sin w + li};$$

тогда получим для определения особых точек  $\zeta$  следующее уравнение:

$$\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} = e^{\pm \sqrt{1 - \zeta^2} + li} \quad (11)$$

Это уравнение можно умножить на  $\zeta$ , если только принять во внимание, что возникающий при этом корень  $\zeta = 0$  не удовлетворяет уравнению (11), следовательно, никакого особого корня нет. Итак, получаем уравнение

$$1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2} = \zeta e^{\pm \sqrt{1 - \zeta^2} + li}. \quad (12)$$

Необходимо вычислить корни этого уравнения. Для этой цели положим

$$z = 1 \mp \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (13)$$

что дает

$$\zeta^2 = 2z - z^2; \quad (13^*)$$

тогда получим из (12) уравнение

$$\left(\frac{2}{z} - 1\right) e^{2z} = e^{2+2li}. \quad (14)$$

Параметр  $l$  имеет произвольное действительное значение. Зато для соответствующего  $z$  можно получить действительные или комплексные значения. Полагая

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta$$

и разделяя в правой и левой частях (14) действительные и мнимые части, получим два уравнения;

$$\left. \begin{aligned} e^{2\rho \cos \theta} \left[ \frac{2}{\rho} \cos(2\rho \sin \theta - \theta) - \cos(2\rho \sin \theta) \right] &= e^2 \cos 2l, \\ e^{2\rho \cos \theta} \left[ \frac{2}{\rho} \sin(2\rho \sin \theta - \theta) - \sin(2\rho \sin \theta) \right] &= e^2 \sin 2l. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

из которых выводятся следующие более удобные уравнения:

$$\frac{4}{\rho^2} + 1 - \frac{4}{\rho} \cos \theta = e^{1-4\rho \cos \theta}, \quad (16)$$

$$\frac{2}{\rho} \sin (2l + \theta - 2\rho \sin \theta) - \sin (2l - 2\rho \sin \theta) = 0. \quad (17)$$

Будем рассматривать эти уравнения как уравнения двух действительных кривых, точки пересечения которых дают положения

особых точек. Кривая (16), не зависящая от  $l$ , состоит из двух отдельных ветвей. Одна из них, которую мы более детально исследуем ниже, имеет лемниска-топодобную форму, и при  $\rho \cos \theta = 1$  имеет двойную точку. Другая ветвь представляет собой прямую линию  $\rho \cos \theta = 1$  (рис. 40).

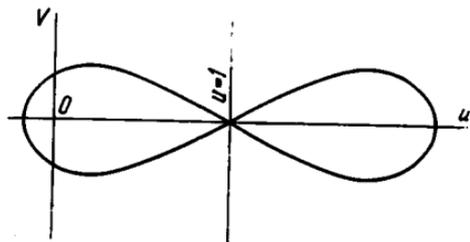


Рис. 40.

Легко определить точку пересечения этой кривой с (17). Подставляя в (17)  $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$ , получим решения:

$$\left. \begin{aligned} \theta - \operatorname{tg} \theta &= \frac{n\pi}{2} - l, \\ \rho &= \frac{1}{\cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Следовательно, эти особые точки составляют бесчисленное множество изолированных точек, лежащих на прямой  $\rho \cos \theta = 1$ .

Рассмотрение кривых (16) и (17) облегчается благодаря введению прямоугольных координат. Если положить

$$u = \rho \cos \theta, \quad v = \rho \sin \theta,$$

то эти уравнения преобразуются к следующей форме:

$$v^2 = \frac{4(1-u)}{e^{4(1-u)} - 1} - u^2, \quad (19)$$

$$(u-1)^2 = 1 + 2v \operatorname{ctg} (2l - 2v) - v^2, \quad (20)$$

причем следует заметить, что к (19) добавляется еще линия  $u = 1$ , которую мы уже рассмотрели. Кривая (19) симметрична относительно оси  $u$ , а также относительно прямой  $u = 1$ . Если положить

$$s = 1 - u,$$

то (19) можно записать в форме

$$v^2 = -1 - s^2 + 2s \frac{e^{2s} + e^{-2s}}{e^{2s} - e^{-2s}} \quad (21)$$

или

$$v^2 = 2s \operatorname{cth} 2s - s^2 - 1,$$

откуда непосредственно вытекает наше утверждение.

Далее,  $s$  не может становиться сколь угодно большим. Максимальное значение  $s$  получается из уравнения  $v = 0$ , которое дает

$$e^{4s} = \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^2. \quad (21^*)$$

Это уравнение имеет два корня \*):  $s = 0$  и  $s = 1,195$  (приближенное значение). Первый корень дает двойную точку, а второй — искомый максимум. Вид кривой (19) приводится на рис. 40.

В окрестности точки  $s = 0$  приближенно имеем

$$v^2 = \frac{1}{3} s^2,$$

так что здесь имеем две прямые:

$$v = \frac{s}{\sqrt{3}}, \quad v = -\frac{s}{\sqrt{3}}.$$

Для нашей цели нет необходимости знать форму кривой (17) и (20). Действительно, форма этой кривой зависит от значений параметра  $l$  и в то время как  $l$  изменяется, точка пересечения (16) и (17), а также и особая точка уравнения Кеплера, смещаются на кривой (16). Однако для сходимости рядов, расположенных по степеням эксцентриситета, в астрономии необходимо, чтобы эксцентриситет принимал такое значение, что ряды оставались бы сходящимися при всех действительных значениях  $l$ . Таким образом, исследуемый радиус сходимости является наименьшим радиусом, который получается, если  $l$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Но тогда можно доказать, что действительные значения  $l$  всегда можно выбрать так, что кривая (17) пройдет через произвольную точку кривой (16). Следовательно, достаточно рассмотреть эти кривые, так как каждая их точка может быть особой и, значит, должна рассматриваться как особая точка. Докажем, что величину  $l$  можно выбрать указанным образом.

Во-первых, из уравнения (18) непосредственно находим, что любая точка линии  $\rho \cos \theta = 1$  может быть особой точкой. Если выбрать произвольное значение  $\theta = \theta_0$ , то из уравнения

$$l = \frac{n\pi}{2} - \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0$$

получим соответствующее значение  $l$ .

\*) Можно показать, что  $s = 0$  — тройной корень. Кроме того, имеется еще два корня  $s = \pm 1,200$ , а не 1,195 (см. [59]). (Прим. ред.)

Легко показать, что при соответствующем выборе параметра  $l$  кривая (20) должна проходить через любую произвольно взятую точку (19). Если для  $u$  и  $v$  принять произвольные значения  $u_0$  и  $v_0$ , то (20) будет выполняться, когда  $l$  выбирается так, что

$$\operatorname{tg}(2l - 2v_0) = \frac{2v_0}{(u_0 - 1)^2 - 1 + v_0^2};$$

этого можно всегда достигнуть подходящим выбором  $l$ .

При помощи уравнения (13\*) перейдем от  $u$  и  $v$  к  $\zeta$ . Если положить

$$\zeta = \xi + i\eta = \kappa e^{i\tau}, \quad (22)$$

то, разделяя в (13\*) действительную и мнимую части, получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 \cos 2\tau &= -(1-u)^2 + v^2 + 1, \\ \kappa^2 \sin 2\tau &= 2v(1-u), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

из которых могут быть найдены  $\kappa$  и  $\tau$ , а значит, также  $\xi$  и  $\eta$ .

При этом кривая (19) переходит в кривую, дающую те значения эксцентриситета, при которых функция (2)  $\varphi(\zeta)$  обладает особенностями. Все эти особенности представляют собой точки разветвления.

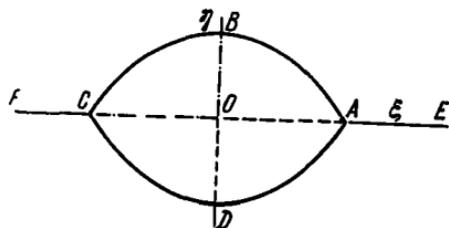


Рис. 41.

Полученная таким путем кривая, которую можно назвать особой кривой эллиптического движения, воспроизведена на рис. 41 и состоит из замкнутой кривой  $ABCD$  вокруг начала координат  $O$  и двух прямолинейных частей  $AE$  и  $CF$ , совпадающих

соответственно с положительной и отрицательной частями оси  $\xi$ , за исключением отрезков этой оси между  $O$  и  $A$  и соответственно между  $O$  и  $C$ . Радиус-вектор кривой, который совпадает с модулем  $\zeta$ , в точке  $A$  равен единице и непрерывно уменьшается до  $B$ , где он имеет значение  $0,6627\dots$  Найдем значение  $q$  этого модуля, полагая в (12)  $l = \frac{\pi}{2}$  и  $\zeta = iq$  и разрешая полученное уравнение

$$1 + \sqrt{1 + q^2} = qe^{\sqrt{1+q^2}} \quad (24)$$

относительно  $q$ .

Формула (24) совпадает с известной формулой Лапласа для вычисления радиуса сходимости разложений координат в ряды по степеням эксцентриситета (в окрестности  $\zeta = 0$ ). Если разрешим уравнение (21\*) относительно  $s$ , то получим то же самое

значение, которое здесь может быть записано в форме

$$e^{2s} = \frac{s+1}{s-1}, \quad (24^*)$$

а затем согласно (23) вычислим  $q$  ( $= \kappa$ ) по формуле

$$q = \sqrt{s^2 - 1}. \quad (24^{**})$$

Рис. 41 основывается на числовых значениях координат  $\xi$  и  $\eta$  особой кривой, приводимых в табл. XXIII.

Таблица XXIII  
Координаты особой кривой

$s$	$v$	$\kappa$	$\xi$	$\eta$
0,0	0,000	1,000	1,000	0,000
0,1	0,057	0,9966	0,9965	0,0057
0,2	0,114	0,9868	0,9865	0,0231
0,3	0,165	0,9707	0,9694	0,0511
0,4	0,212	0,9491	0,9449	0,0896
0,5	0,251	0,9226	0,9122	0,1376
0,6	0,282	0,8917	0,8702	0,1945
0,7	0,302	0,8574	0,8174	0,2586
0,8	0,310	0,8208	0,7514	0,3299
0,9	0,302	0,7823	0,6681	0,4068
1,0	0,273	0,7413	0,5586	0,4873
1,1	0,211	0,7021	0,4047	0,5737
1,13	0,181	0,6899	0,3406	0,5999
1,16	0,140	0,6779	0,2585	0,6268
1,19	0,071	0,6665	0,1287	0,6539

Кривая имеет вершину при  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = 0$  и переходит в прямые линии  $\eta = 0$  ( $|\xi| > 1$ ). В то время как  $\xi$  уменьшается до нуля,  $\eta$  непрерывно возрастает, и при  $\xi = 0$  становится равным лапласову радиусу сходимости. Угол в точке  $A$  равен  $120^\circ$ . Особая кривая позволяет просто ответить на вопрос о величине радиуса сходимости разложения координат эллиптического движения в ряды по степеням  $\xi - \xi_0$ . Для этого возьмем в качестве центра круга точку  $\xi_0$  и отыщем наименьший круг, который касается особой кривой. Радиус этого круга равен искомому радиусу сходимости.

Предположим, например, что координаты разлагаются по степеням  $\xi - 0,3$ ; тогда с помощью рис. 41 получим для радиуса сходимости значение 0,544 и, следовательно, соответствующее

разложение сходится для всех таких действительных значений эксцентриситета  $\zeta$ , которые лежат в пределах от  $\zeta = -0,244$  до  $\zeta = 0,844$ . Следовательно, упомянутые ряды сходятся для всех положительных значений эксцентриситета, меньших  $0,844$ , в то время как разложения по степеням  $\zeta$  сходятся только при  $\zeta < 0,6627$ . Так как в астрономических приложениях такие ряды встречаются только для действительных значений эксцентриситета, то область сходимости рядов можно увеличить, разлагая в ряды по степеням  $\zeta - \zeta_0$  и определяя  $\zeta_0$  подходящим образом. Таблица XXIV дает приближенное представление о характере сходимости рядов при различных значениях  $\zeta_0$ .

Таблица XXIV  
Значения радиуса сходимости

$\zeta_0$	$R$	$\zeta_{\min}$	$\zeta_{\max}$
0,0	0,663	0,0	0,663
0,1	0,644	0,0	0,744
0,2	0,598	0,0	0,798
0,3	0,544	0,0	0,844
0,4	0,480	0,0	0,880
0,5	0,409	0,091	0,909
0,6	0,330	0,270	0,930
0,7	0,251	0,449	0,951
0,8	0,169	0,631	0,969
0,9	0,087	0,813	0,987

Здесь через  $R$  обозначена величина радиуса сходимости при разложении по степеням  $\zeta - \zeta_0$ . Под  $\zeta_{\min}$  понимается наименьшее положительное значение эксцентриситета, которое лежит внутри круга сходимости.

Хотя при возрастании  $\zeta_0$  от нуля радиус сходимости монотонно уменьшается, область положительных значений внутри круга сходимости больше всего для значения, лежащего между  $0,4$  и  $0,5$ , примерно равного  $0,445$ . Разложение по степеням  $\zeta - 0,445$  будет сходиться для всех положительных значений эксцентриситета, меньших  $0,892$  \*). Аналогичное исследование соответствующих разложений координат гиперболического движения легко может быть выполнено \*\*).

\*) Иное дело — быстрота сходимости рядов. Она наибольшая при  $\zeta_0 = 0$ , когда радиус сходимости имеет максимальное значение.

\*\*\*) См. исследования Н. Б. Еленевской [60]. (Прим. перев.)

## § 2. Сходимость рядов в задаче двух тел (продолжение)

В предыдущем параграфе мы нашли, что координаты в эллиптическом движении являются голоморфными функциями эксцентрисической аномалии, и что эксцентрисическая аномалия зависит от двух величин, а именно, от эксцентриситета орбиты  $\zeta$  и средней аномалии планеты  $l$ . Во многих случаях, в частности, при определении элементов орбит планет из наблюдений, делаются попытки использовать разложения координат в ряды по степеням средней аномалии, и, следовательно, определение радиуса сходимости этих разложений имеет большое практическое значение. Так как

$$l = n(t - t_{\pi}),$$

где  $t_{\pi}$  обозначает момент прохождения планеты через перигелий, то разложение по степеням  $l - l_0$ , где  $l_0 = n(t_0 - t_{\pi})$ , равнозначно с разложением по степеням  $t - t_0$ , а следовательно, и с разложением по степеням времени.

Область сходимости этих разложений определить легче, чем область разложений по степеням эксцентриситета; это определение выполняется таким же образом. Из уравнения Кеплера

$$w - \zeta \sin w = l \quad (1)$$

определяем  $w$  как функцию от  $\zeta$  и  $l$ :

$$w = \varphi(\zeta, l). \quad (2)$$

В предыдущем параграфе мы рассматривали  $l$  как действительный параметр, а  $w$  — как функцию переменной  $\zeta$ . Здесь мы будем рассматривать  $l$  как переменную, а  $\zeta$  — как параметр, который будем предполагать действительным, положительным и меньшим единицы, так как для астрономии представляет интерес только этот случай.

Следует, во-первых, заметить, что  $w$  является бесконечнозначной функцией  $l$ . В самом деле, это вытекает из исследования, сделанного в предыдущем параграфе, в котором было доказано, что заданным значениям  $\zeta$  и  $l$  соответствует бесчисленное множество значений  $w$ . Итак,  $\varphi(\zeta, l)$ , рассматриваемая как функция от  $l$ , является многозначной функцией, и задача сводится к отысканию особых точек — точек ветвления этой функции.

Из дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dl} = \frac{1}{1 - \zeta \cos w} \quad (3)$$

следует, что в особых точках должно быть

$$1 - \zeta \cos w = 0. \quad (4)$$

и, исключая из этого уравнения и (1)  $w$ , получим уравнение (12) предыдущего параграфа:

$$1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2} = \zeta e_{\pm}^{\pm} \sqrt{1 - \zeta^2} + il. \quad (5)$$

Те значения  $l$ , которые удовлетворяют этому уравнению, дают особые точки функции  $\varphi(\zeta, l)$ , рассматриваемой как функции от  $l$ . Уравнение (5) можно непосредственно разрешить относительно  $l$ .

Предположим здесь, как уже указывалось, что  $\zeta$  является положительной величиной, меньшей единицы. Тогда для соответствующего значения  $l$  получим, вообще говоря, комплексное значение. Итак, положим

$$l = g + ih$$

и получим из (5)

$$\left. \begin{aligned} e^{-h} \cos g &= e^{\mp} \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{(1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta}, \\ e^{-h} \sin g &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Второе из этих уравнений выполняется, если  $g$  является целым кратным  $\pi$ . Так как при сделанных предположениях относительно  $\zeta$  правая часть первого уравнения всегда положительна, то  $g$  должно быть четным кратным  $\pi$ :

$$g = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (7)$$

Тогда первое из уравнений (6) дает

$$h = \pm \sqrt{1 - \zeta^2} + \ln \frac{\zeta}{1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (7^*)$$

Находим, что оба значения  $h$ , которые удовлетворяют этому уравнению, отличаются только знаком (рис. 42).

Стало быть, особые точки расположены симметрично относительно оси  $g$  и лежат на параллельных оси  $h$  прямых, проходящих через точки  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Все особые точки имеют именно такую координату  $h$ , значение которой получается из (7\*). Положение особых точек и определение области сходимости при разложении в ряды по степеням времени в эллиптическом движении впервые было дано Ф. Р. Мультином [61].

Если координаты или эксцентрическую аномалию разложить по степеням  $l - l_0$ , то, если ограничиться значениями  $l_0$  из об-

ласти  $-\pi \leq l_0 \leq \pi$ , что ни в коей мере не отражается на общности задачи, радиус сходимости  $R_{l_0}$  будет иметь значение

$$R_{l_0} = \sqrt{l_0^2 + h^2}, \quad (8)$$

где  $h$  определяется формулой (7\*).

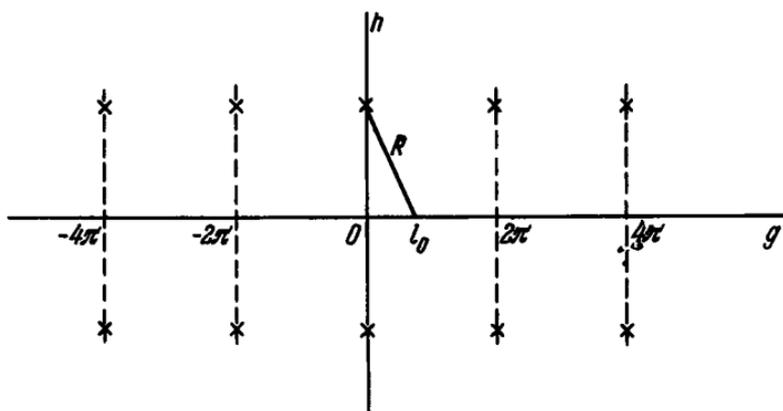


Рис. 42.

Если  $t_0$  — то значение  $t$ , которому соответствует значение  $l = l_0$ , то радиус сходимости  $R_{l_0}$  разложений координат эллиптического движения по степеням  $t - t_0$  дается формулой

$$R_{l_0} = \frac{R_{l_0}}{n} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{h^2}{n^2}}. \quad (9)$$

Величина радиуса сходимости зависит от  $l_0$  и значений эксцентриситета. В формулу (9), кроме того, входит среднее движение планеты. Радиус сходимости при данном значении эксцентриситета имеет в афелии наибольшее значение, а в перигелии достигает минимального значения

$$\min R_{l_0} = |h|.$$

Если орбита является круговой, и значит,  $\zeta = 0$ , то, как показывает формула (7\*), радиус сходимости будет бесконечно большим. В самом деле, координаты находятся тогда по формулам

$$x = a \cos n(t - t_\pi), \quad y = a \sin n(t - t_\pi)$$

и являются в этом случае голоморфными функциями времени.

В то время как эксцентриситет при заданном значении возрастает от нуля до 1, значения радиуса сходимости непрерывно убывают и принимают при  $\zeta = 1$  свое минимальное значение  $|\iota_0|$ .

Ниже мы дадим, следуя Мультиону, численные примеры применения этих формул.

Вопрос о сходимости разложений координат параболического движения в ряды по степеням времени впервые был исследован Гамильтоном [62].

В § 5 гл. IV мы нашли, что координаты в параболическом движении являются целыми рациональными функциями вспомогательной величины  $w$ , которая связана со временем при помощи формулы

$$w + \frac{1}{3} w^3 = \frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{2q^{3/2}}} (t - t_\pi). \quad (10)$$

Если положить  $w = w(t)$ , то особенности этой функции совпадут с особенностями координат, рассматриваемых как функции времени.

Находим дифференциальное уравнение для  $w$ :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{2q^3(1+w^2)}},$$

и тогда по теореме существования Коши все особенности функции  $w(t)$  будут при  $w = \pm i$ . Соответствующие особые значения  $t'$  для  $t$  будут согласно (10)

$$t' - t_\pi = \pm \frac{2\sqrt{2q^{3/2}}}{3\sqrt{\bar{\mu}}} i. \quad (11)$$

Следовательно, здесь мы имеем только две особые точки. Разложения координат в параболическом движении по степеням  $t - t_0$  сходятся внутри круга, центр которого находится в точке  $t_0$  и граница которого проходит через  $t'$ . Таким образом, радиус сходимости при действительных значениях  $t_0$  дается формулой

$$R = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 - (t' - t_\pi)^2} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{8q^3}{9\bar{\mu}}}. \quad (12)$$

Радиус сходимости будет наименьшим в перигелии, где

$$R = \frac{2\sqrt{2q^{3/2}}}{3\sqrt{\bar{\mu}}}.$$

Чем больше перигелийное расстояние  $q$ , тем больше  $R$ , которое возрастает до бесконечности вместе с  $q$  и  $t_0 - t_\pi$ .

Наконец, вопрос о разложении координат в гиперболическом движении по степеням времени был исследован Мультионом [61].

Исследования можно провести аналогичным образом, как и в предыдущих случаях. В соответствии с § 6 гл. IV находим, хотя это и не было доказано, что координаты в гиперболическом движении суть голоморфные функции вспомогательной переменной  $w$ , которая здесь выполняет роль, аналогичную эксцентрисческой аномалии в эллиптическом движении. Между этой величиной и временем имеет место соотношение

$$\zeta \operatorname{sh} w - w = l, \quad (13)$$

где  $\zeta$  обозначает эксцентриситет, а

$$l = \frac{\sqrt{2}h}{a}(t - t_\pi) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_\pi).$$

Если  $w$  рассматривать здесь как функцию  $l$ , то особые точки этой функции совпадут с особыми точками координат, рассматриваемых как функции  $l$ . Получим эти особые точки объясненным ранее способом, исключая  $w$  из (13) и уравнения

$$\zeta \operatorname{ch} w - 1 = 0. \quad (14)$$

Имея в виду запросы практической астрономии, мы можем здесь ограничиться такими значениями  $\zeta$ , которые действительны и больше единицы.

Из (14) следуют соотношения:

$$\operatorname{ch} w = \frac{1}{\zeta}, \quad \operatorname{sh} w = \pm i \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta}},$$

$$w = \ln(\operatorname{ch} w + \operatorname{sh} w) = \ln \frac{1 \pm i \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}.$$

Если затем положить

$$l = g + hi,$$

то уравнение (13) примет вид

$$\pm i \sqrt{\zeta^2 - 1} - \ln(1 \pm i \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \ln \zeta = g + hi.$$

Так как, далее,

$$\ln(1 \pm i \sqrt{\zeta^2 - 1}) = \ln \zeta + i(2k\pi \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}),$$

где  $k$  обозначает целое число, а  $\operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}$  — дугу в пределах от нуля до  $\frac{\pi}{2}$ , для  $g$  и  $h$ , разделяя действительную и мнимую части, получим значения

$$\left. \begin{aligned} g &= 0, \\ \pm h &= \sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2k\pi \\ &\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Таким образом, в этом случае все особые точки лежат на оси  $h$  и являются чисто мнимыми. Они расположены симметрично по обе стороны действительной оси, и если положить

$$h_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (16)$$

то все особые точки получатся, если от двух точек  $h_1$  и  $-h_1$  на мнимой оси откладывать последовательно отрезки  $2\pi$ ,  $4\pi$ ,  $6\pi$  и т. д.

Радиус сходимости в разложении координат в гиперболическом движении для действительных значений  $l_0$  будет

$$R = \sqrt{l_0^2 + h_0^2}, \quad (16^*)$$

где через  $h_0$  обозначено наименьшее из значений  $h$ , получающееся из формул (15).

Вместе с тем мы сталкиваемся здесь с трудностью. Если  $k$  примет какое-либо целое отрицательное значение, то всегда найдется положительное значение  $\zeta$ , большее единицы, при котором правая часть (15) обращается в нуль. Тогда точка  $l = 0$  должна быть особой точкой, что несовместимо со сделанными предположениями. Предполагалось, что  $w = 0$  при  $l = 0$ , а уравнение (14) показывает, что  $w = 0$  не является особой точкой. Это кажущееся противоречие находит свое объяснение в том, что не все особые точки функции  $\varphi(\zeta, l)$  являются точками ветвления той ветви этой функции, которая при всех значениях эксцентриситета имеет при  $l = 0$  нулевое значение. Очевидно, эта ветвь функции  $\varphi(\zeta, l)$ , которую мы рассматривали, не может обладать при  $l = 0$  точкой ветвления, так как предполагалось, что при  $l = 0$   $w = 0$ , и  $w = 0$  не является точкой ветвления функции  $\varphi(w, l)$ . Следовательно, мы должны исключить те значения  $k$  в (15), которые при каком-либо положительном значении  $\zeta$  ( $> 1$ ) могут дать значение  $h = 0$ . Иными словами,  $k$  либо равно нулю, либо равно положительному целому числу. Следовательно, мы должны в (16\*) положить  $h_0 = h_1$  и получим для радиуса сходимости значение

$$R = \sqrt{l_0^2 + h_1^2}, \quad (17)$$

где

$$h_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (17^*)$$

причем  $\operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}$  обозначает ту ветвь, которая лежит между нулем и  $\pi/2$ .

Формула (17\*) показывает, что  $R$  при заданном значении  $l_0$  монотонно возрастает вместе с эксцентриситетом  $\zeta$ . Если  $\zeta = 1$ , то  $R = |l_0|$ . Если  $\zeta$  стремится к бесконечности, то  $R$  одновременно

неограниченно возрастает. Вычисляя радиус сходимости  $R_t$ , для разложения координат в гиперболическом движении по степеням  $t - t_0$ , получим

$$R_t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} R, \quad (18)$$

где вместо  $R$  следует подставить его значение из (17).

Мультон вывел некоторые интересные следствия из этих уравнений, которые мы здесь частично воспроизведем.

Если по соображениям симметрии для параболического движения записать

$$l = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2q^{3/2}}} (t - t_n), \quad (19)$$

так что уравнение (10) примет вид

$$w + \frac{1}{3} w^3 = l, \quad (20)$$

и если речь идет о разложении в ряды по степеням  $l - l_0$ , то выражения для радиуса сходимости как эллиптического, так и параболического или гиперболического движений можно написать в форме

$$R = \sqrt{l_0^2 + h_1^2}, \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \text{для } \zeta < 1 \quad h_1 &= -\sqrt{1 - \zeta^2} + \ln \frac{\zeta}{1 - \sqrt{1 - \zeta^2}}, \\ \text{« } \zeta = 1 \quad h_1 &= \frac{2}{3}, \\ \text{« } \zeta > 1 \quad h_1 &= \sqrt{\zeta^2 - 1} - \text{arc tg } \sqrt{\zeta^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для различных значений  $\zeta$  отсюда получим значения  $h_1$ , приведенные в табл. XXV.

Эта таблица дает значения радиуса сходимости при  $l_0 = 0$ , т. е. для разложений по степеням  $l$ . В третьем столбце подставлены соответствующие значения  $h_1$ , выраженные в градусах. Отсюда находим, что если эксцентриситет равен 0,1, то разложения координат по степеням средней аномалии сходятся до  $l = 109^{\circ},55$ . Разложения по степеням  $l$  (в перигелии) при параболическом движении сходятся при  $l < 0,667$ , что соответствует значению долготы  $62^{\circ}$ .

Радиусы сходимости разложений по степеням времени можно легко вычислить при помощи формул (9) и (18), если известно значение среднего движения по орбите или большая полуось.

Таблица XXV

$\zeta$	$h_1$	$h_1^0$	$\zeta$	$h_1$
0,0	$\infty$	$\infty$		
0,1	1,998	109,55	1,0	0,667
0,2	1,312	75,17	1,05	0,010
0,3	0,920	52,69	1,1	0,029
0,4	0,650	37,23	1,2	0,077
0,5	0,451	25,86	1,3	0,137
0,6	0,298	17,03	2,0	0,685
0,7	0,181	10,35	10,0	8,478
0,8	0,093	5,35	100,0	98,42
0,9	0,031	1,80	1000,0	998,4
0,95	0,011	0,63		

Таблица XXVI

 $(R_{t_0}$  в сутках при  $a = 2,651$ )

$\xi$	$l_0 = 0$	$l_0 = 60^\circ$	$l_0 = 120^\circ$	$l_0 = 180^\circ$
0,0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0,1	501,2	553,0	726,0	933,7
0,2	329,3	421,1	620,0	854,0
0,3	230,7	349,6	573,7	821,0
0,4	163,1	302,2	550,1	805,1
0,5	113,0	285,9	537,3	796,0
0,6	74,9	273,1	530,5	791,5
0,7	45,5	266,5	527,3	789,3
0,8	23,4	263,7	525,8	788,4
0,9	7,7	262,7	525,3	788,0
0,95	2,8	262,6	525,2	788,0

Полагая  $a = 2,65$ , Мультон вычислил табл. XXVI, которая представляет интерес в приложениях этих исследований к теории малых планет. Время обращения астероида на этом расстоянии составляет 1575 суток. Таким образом, в афелии разложения координат по степеням времени сходятся более чем для половины оборота. В перигелии величина радиуса сходимости быстро убывает вместе с возрастанием эксцентриситета.

Таблица XXVII, также вычисленная Мультином, дает хорошее представление о значении радиуса сходимости для орбит различной формы.

Таблица XXVII  
( $R_{t_0}$  в сутках для  $t_0 = t_\pi$ ,  $q = 1$ )

$c$	$R_{t_0}$	$\xi$	$R_{t_0}$
0,0	$\infty$	1,0	54,8
0,1	136,1	1,05	53,8
0,2	106,7	1,1	52,3
0,3	91,3	1,2	50,1
0,4	81,3	1,3	48,5
0,5	74,1	2,0	39,9
0,6	68,6	5,0	25,7
0,7	64,1	10,0	18,3
0,8	60,5	100,0	5,8
0,9	57,4	100,0	1,8

Здесь во всех случаях перигелийное расстояние неизменно предполагается равным единице. Важность этих величин для определения орбит очевидна.

Наконец, рассмотрим разложения в задаче двух тел в случае, когда сила отталкивательная. В этом случае координаты согласно § 7 гл. IV выражаются через вспомогательную величину  $w$ , которая связана со временем при помощи соотношений

$$w + \zeta \operatorname{sh} w = l, \quad (23)$$

$$l = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}} (t - t_\pi). \quad (23^*)$$

Здесь при  $l = 0$  должно быть  $w$  равно нулю.

Следовательно, особые значения  $l$  получатся, если исключить  $w$  из (23) и уравнения

$$1 + \zeta \operatorname{ch} w = 0. \quad (24)$$

Здесь следует считать  $\zeta$  положительным числом, большим единицы.

Из (24) получаем

$$\operatorname{ch} w = -\frac{1}{\zeta}, \quad \operatorname{sh} w = \pm i \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}, \quad w = \ln \frac{-1 \pm i \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}.$$

Если положить

$$\ln(-1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}) = \alpha + \beta i,$$

то для определения  $\alpha$  и  $\beta$  получим уравнения:

$$e^\alpha \cos \beta = -1,$$

$$e^\alpha \sin \beta = \pm \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

и, следовательно,

$$\alpha = \ln \zeta,$$

$$\beta = \mp \arctg \sqrt{\zeta^2 - 1} + m\pi,$$

где  $m$  обозначает целое число или нуль. Но из уравнения

$$e^\alpha \cos \beta = -1$$

находим, что  $\cos \beta$  отрицателен, и, значит,  $m$  должно быть нечетным числом. Следовательно,

$$\ln(-1 \pm i\sqrt{\zeta^2 - 1}) = \ln \zeta + i[\mp \arctg \sqrt{\zeta^2 - 1} + (2k + 1)\pi],$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если это выражение подставить в (23) и записать

$$l = g + hi, \quad (25)$$

то будет

$$g = 0,$$

$$h = \mp \arctg \sqrt{\zeta^2 - 1} + (2k + 1)\pi \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Как и в гиперболическом движении в случае притягивающих масс, отрицательные значения  $k$  здесь также должны быть исключены, так как иначе получились бы особые точки при  $l = 0$ . Если положить

$$h_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1} - \arctg \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

то положение особых точек будет определяться формулами

$$\left. \begin{aligned} g &= 0, \\ \pm h &= h_1 + (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Радиус сходимости  $R$  имеет значение

$$R = \sqrt{l_0^2 + (h_1 + \pi)^2}. \quad (27)$$

Значение  $h_1$  совпадает со значением (16) для  $h_1$  гиперболического движения в случае притягивающих масс.

Величина радиуса сходимости возрастает вместе с эксцентриситетом. В перигелии имеем

$$R_{\text{периг}} = h_1 + \pi. \quad (28)$$

Если эксцентриситет равен единице, то  $h_1 = 0$ , и, таким образом,  $R = \pi$ .

Может показаться странным, что здесь при  $\zeta = 1$  получается конечное значение радиуса сходимости, в то время как в случае притягивающих масс при  $\zeta = 1$  значение радиуса сходимости равно нулю. Это находит свое естественное объяснение в том, что при  $\zeta = 1$  для притягивающих масс орбита будет прямой линией, которая имеет конечную точку в центральном теле. Следовательно, в перигелии происходит соударение обеих масс, и тогда ни о каком разложении по степеням времени речи быть не может. В § 3 гл. IV мы нашли, что в случае соударения координаты могут быть разложены в ряды по степеням  $(t - t_0)^{1/2}$ ).

Для отталкивающих масс причина заключается в другом. Хотя при  $\zeta = 1$  орбита также является прямолинейной, но тела сближаются только до определенного конечного расстояния, после чего движутся по той же линии в обратном направлении. Формула (28) показывает, что разложение относительных координат тела в окрестности перигелия по степеням  $l$ , т. е. по  $\frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(t - t_\pi)$ , остается сходящимся при  $l < \pi$ .

Значение радиуса сходимости разложений координат по степеням  $t - t_0$  согласно (23\*) и (27) будет

$$R_{t_0} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{a^3}{\mu_1} (h_1 + \pi)^2} \quad (29)$$

и зависит, следовательно, от  $a$  и значения постоянной в силе отталкивания.

В теории кометных хвостов Бесселя — Бредихина используются ряды, расположенные по степеням времени. Область сходимости этих рядов может быть вычислена из (29).

**Дополнение.** Мы приводим ниже рассуждения профессора Вимана, касающиеся тех трудностей, которые возникают при определении радиуса сходимости разложений координат гиперболического движения в ряды по степеням времени:

«Речь идет об определении радиуса сходимости того степенного ряда  $w = f(l)$ , который определяется уравнением

$$\zeta \operatorname{sh} w - w - l = 0, \quad (1)$$

\*) Радиус сходимости этого разложения в соответствии с (18) и (15) равен  $\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} 2\pi$ .

где при  $l = 0$  должно быть  $w = 0$ . Величина  $\zeta$  — параметр, который положителен, и притом больше единицы. В случае особых точек для различных ветвей, которые удовлетворяют уравнению (1), должно выполняться условие

$$\zeta \operatorname{ch} w - 1 = 0 \quad (2)$$

и, таким образом, получаем

$$l = \pm i [\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2k\pi], \quad (3)$$

где  $k$  обозначает любое целое положительное или отрицательное число.

В таких особых точках в общем случае меняются местами две  $w$ -ветви. Находим, что определенные значения  $\zeta$  особенно важны, а именно те, для которых выполняется уравнение

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1} + 2k\pi = 0; \quad (4)$$

при этом  $k$  должно иметь отрицательное значение. Для таких значений  $\zeta$  совпадают два особых значения  $l$ . Это означает, что в данном случае в особых точках будут меняться местами две пары ветвей  $w$ . Ветвь одной пары при этом не переходит в ветвь другой пары. Для того чтобы через особую точку проходило более двух ветвей, необходимо, чтобы

$$\zeta \operatorname{sh} w = 0, \quad (5)$$

для чего требуется, чтобы  $\zeta = 1$ . Здесь для особых точек  $l = 2k\pi i$ . В таких особых точках циклически совпадают три ветви  $w$ . При  $k = 0$  эти ветви задаются уравнением

$$w^3 + \dots = 6l.$$

Это уравнение дает исходную ветвь, причем  $w = 0$  при  $l = 0$ .

Если теперь  $\zeta$  растет и больше единицы, то эта особая точка превращается в две, для которых

$$l'_i = \pm i (\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}).$$

Исходная ветвь в этих точках связана с двумя различными ветвями. Однако невозможно достигнуть особой точки исходной ветви, для которой  $|l|$  меньше  $\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}$ . Ведь исходная ветвь, если выполняется (4), должна соединяться в особой точке именно с той ветвью функции, что и для соседних значений  $\zeta$ . Таким образом, радиус сходимости упомянутого степенного ряда  $w = f(l)$  будет

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

## § 3. Граничная кривая Хилла

Исследование сходимости рядов в небесной механике имеет прежде всего своей целью определение границ, внутри которых могут изменяться относительные координаты планет. Но можно думать, что эти границы могут быть найдены вне зависимости от того, будут ли для координат фактически существовать ряды, сходящиеся на неограниченных интервалах времени; предпринимались различные попытки косвенным путем определить такие границы. Из этих попыток оказалась успешной только одна из них, а именно та, которая опирается на упоминавшуюся в § 3 гл. VIII хиллову граничную кривую. С помощью этой граничной кривой Хиллу впервые в истории небесной механики удалось получить строгое доказательство устойчивости движения в задаче трех тел. Он доказал, что земная Луна никогда не может удалиться от своего центрального тела более чем на учетверенное современное расстояние от Земли. При этом предполагается, что учитывается только притяжение Луны Землей и Солнцем, и, кроме того, Хилл должен был сделать ограничение, что орбиты Земли и Солнца являются в точности круговыми.

Граничная кривая Хилла нашла многочисленные приложения. Наиболее общие исследования этой кривой выполнил Болин [63], который исследовал также ее значение в общей задаче трех тел. Оказывается, что в этой задаче нельзя сделать никаких общих выводов о максимальных и минимальных значениях взаимных расстояний из рассмотрения граничной кривой. Непосредственно можно только заключить, что все расстояния не могут быть одновременно бесконечно велики. Если рассматривать общую задачу  $n$  тел, то согласно § 1 гл. V интеграл живых сил имеет форму

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h, \quad (1)$$

так что уравнение граничной кривой Хилла (здесь лучше говорить о граничной поверхности) примет вид

$$\sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h = 0, \quad (1^*)$$

где  $r_{ij}$  обозначает расстояние между массой  $m_i$  и массой  $m_j$ . Предположим, что постоянная живых сил  $h$ , как это имеет место в нашей планетной системе, отрицательна. Правая часть (1) всегда должна быть положительна, и отсюда следует, что расстояния  $r_{ij}$  не могут быть все одновременно бесконечно велики. Таким образом, все члены нашей планетной системы не могут с течением времени удалиться друг от друга неограниченно далеко.

Между тем в ограниченной задаче трех тел хиллова граничная кривая дает лучшие выводы о характере движения \*). Болин показал, что при определенных значениях постоянной Якоби орбита астероида лежит внутри замкнутой кривой. Его исследования в изящной форме были продолжены Дарвином, и мы воспроизвели в § 3 гл. VIII важнейшие результаты этого исследования. Здесь мы исследуем следствия, относящиеся к движению малых планет нашей планетной системы.

Пусть, во-первых, Юпитер является возмущающей планетой, которая обращается вокруг Солнца по круговой орбите. Интеграл Якоби примет вид

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C, \quad (2)$$

где

$$2\Omega = \rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1} + \mu \left( \rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2} \right), \quad (2^*)$$

и  $\frac{ds}{dt}$  обозначает скорость астероида во вращающейся системе координат. Уравнение граничной кривой имеет вид

$$2\Omega - C = 0. \quad (3)$$

Если  $C$  достаточно велико, граничная кривая состоит из замкнутых ветвей, и если в начале движения астероид находится внутри замкнутой ветви, он должен оставаться там всегда. При значении  $C = C_1$  граничная кривая переходит в лемнискато-подобную фигуру, которая в точке либрации обладает двойной точкой. В § 1 мы нашли, что эта точка либрации лежит на расстоянии 0,0668 от Юпитера. Поэтому соответствующее значение  $C_1$  получается из (3), если положить  $\rho_1 = 0,9332$ ,  $\rho_2 = 0,0668$ ,  $\mu = 1 : 1047$ . Получаем  $C_1 = 3,0426$ .

Мы можем сформулировать теорему: если для малой планеты постоянная Якоби больше 3,0426, то планета не может двигаться вне замкнутой кривой, содержащей Солнце.

Чтобы получить значения постоянной Якоби для малых планет, можно по их известным элементам вычислить в определенный момент времени значения  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\frac{ds}{dt}$ , и тогда соответствующее значение  $C$  согласно (2) получается по формуле

$$C = \rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1} + \mu \left( \rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2} \right) - \left( \frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (4)$$

Вычислим некоторые значения  $C$  в предположении, что в определенный момент времени орбита является круговой. Тогда аб-

\* ) Речь идет об ограниченной круговой задаче трех тел. (Прим. перев.)

солютная скорость астероида равна  $\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}$ , а скорость Юпитера будет  $\sqrt{1+\mu}$ , так что

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} - \rho_1 \sqrt{1+\mu}. \quad (5)$$

Если это значение подставить в (4), то найдем, что  $C$  для малых  $\rho_1$  имеет большое положительное значение; при удалении от Солнца постоянная Якоби уменьшается по величине до тех пор, пока она не достигнет минимума между  $\rho_1 = 0$  и  $\rho_1 = 1$ , а затем возрастает при  $\rho_1 = 1$  до бесконечности.

Из (4) и (5) получаем значения постоянной Якоби, приведенные в табл. XXVIII.

Таблица XXVIII

Значения постоянной Якоби в планетной системе \*)

$\rho_1$	$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$	$C$	$\rho_1$	$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$	$C$
0,1	9,3773	10,6356	0,7	0,2448	3,1089
0,2	4,1452	5,8978	0,8	0,1010	3,0486
0,3	2,3274	4,4325	0,9	0,0236	3,0277
0,4	1,3945	3,7690	0,95		3,0403
0,5	0,8351	3,4190	0,98		3,1170
0,6	0,4768	3,2214			

\*) Полный каталог значений постоянных Якоби, а также значений момента количества движения относительно оси, перпендикулярной к плоскости эклиптики, был составлен Г. Ф. Султановым и Н. Б. Ибрагимовым в Шемахинской астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР [64]. (Прим. перев.)

Эти значения  $C$  для  $\rho_1$ , заключенного в пределах между 0,6 и 1,0, графически изображены на рис. 43.

Через ординату  $C = 3,0426$  проведем прямую, параллельную оси абсцисс; тогда она отсечет от кривой часть, которая соответствует таким значениям  $C$ , для которых граничная кривая не замкнута. Из рисунка видно, что замкнутой граничной кривой не обладают такие астероиды, которые описывают круговые орбиты, большие полуоси которых имеют значения между 0,815 и 0,96 (большая полуось орбиты Юпитера принимается равной единице). Поэтому такие орбиты справедливо считать неустойчивыми. Если большую полуось орбиты Юпитера принять равной 5,201 астрономических единиц, то названные границы

неустойчивости будут

$$a = 4,24 \quad \text{и} \quad a = 5,00.$$

Самые внешние астероиды и их средние расстояния от Солнца: (279) Туле ( $a = 4,283$ ), (361) Бонония ( $a = 3,933$ ), (153) Гильда ( $a = 3,975$ ). Самый внешний астероид, (279) Туле, лежит близ границы области неустойчивости. Все известные до сих пор астероиды обладают замкнутой граничной кривой, если принимать

во внимание возмущения только от Юпитера, и если только пренебречь эксцентриситетом и наклоном при изучении проблемы устойчивости \*).

Впервые исследование граничной кривой для малых планет выполнил Корб [65]. Он нашел, принимая во внимание эксцентриситет орбиты, что астероид (279) Туле находится вне границ области устойчивости и не обладает замкнутой граничной кривой.

Если орбита малого тела имеет среднее расстояние, большее 0,96, то соответствующая граничная

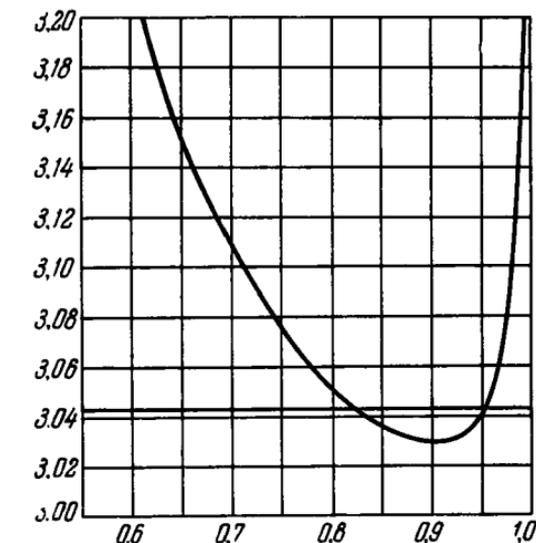


Рис. 43.

кривая замыкается вокруг Юпитера, и тело не принадлежит к кольцу астероидов.

Исключая, возможно, некоторые из астероидов, все известные малые планеты лежат внутри области, устойчивой по отношению к возмущениям от Юпитера. Значение  $a = 4,24$  представляет естественную верхнюю границу для больших полуосей орбит малых планет, так же как найденная в § 12 гл. VIII особая точка  $a = 2,05$  определяет нижнюю границу кольца астероидов.

Мы принимали во внимание здесь только влияние Юпитера на малые планеты. Среди других планет солнечной системы не следует пренебрегать влиянием Марса на астероиды. Дает ли здесь граничная кривая сведения о природе движения?

Для больших значений  $C$  (а для всех известных астероидов  $C$  имеет значения, которые можно считать большими) граничная

\*) Мы приводим значение большой полуоси согласно «Эфемеридам малых планет», ИТА АН СССР, 1960. (Прим. перев.)

кривая состоит из малой почти круговой ветви вокруг Марса, из почти круговой ветви вокруг Солнца с радиусом, несколько меньшим большой полуоси орбиты Марса, и, кроме того, из третьей ветви, которую также можно рассматривать как близкую к круговой, центр которой лежит в Солнце, а радиус несколько больше половины большой полуоси орбиты Марса. Малая планета должна двигаться вне последнего круга. Радиус этого круга можно рассматривать как минимум расстояния малой планеты от Солнца.

При вычислении значения этого радиуса в (2\*), (4) и (5) можно пренебречь членами, которые умножены на малую массу Марса. Если рассматривать мгновенную орбиту астероида как круговую, со средним расстоянием  $a$  от Солнца, и обозначить соответствующее значение радиуса через  $x$ , то из указанных формул легко получается следующее соотношение между  $a$  и  $x$ :

$$x^2 + \frac{2}{x} = \frac{1}{a} + 2\sqrt{a}, \quad (6)$$

которое имеет один корень между нулем и единицей и корень между единицей и  $+\infty$ . Последний корень соответствует искомому минимальному значению  $a$ .

Если, например,  $a = 1,5$  (следует заметить, что все расстояния выражаются через среднее гелиоцентрическое расстояние главной планеты, в данном случае Марса, которое принимается за единицу), то получаем  $x = 1,21$ ; если  $a = 2,0$ , то  $x = 1,36$ .

Ту же формулу (6) можно использовать для вычисления максимального среднего расстояния астероидов, если принимать во внимание возмущения астероидов от Юпитера. Здесь речь будет идти о том корне, который меньше единицы.

Если значения минимальных и максимальных расстояний выразить в астрономических единицах, то из (6) получим для  $a = 2,28$  минимальное расстояние, равное 1,82, максимальное расстояние, равное 3,28; для  $a = 3,04$  минимальное расстояние, равное 2,08, максимальное расстояние, равное 3,90.

Малая планета (40) Гармония, которая движется по почти круговой орбите с большой полуосью, примерно равной 2,267\*), не может никогда подойти к Солнцу ближе чем на 1,82 и никогда не может удалиться далее 3,28 а. е.

Мы исходили при этом из предположения, что обе возмущающие планеты определяют граничные кривые независимо друг от друга.

---

\* Для  $a$  взято значение из сборника «Эфемериды малых планет», ИТА АН СССР, 1960. (Прим. перев.)

Вопрос о том, в какой мере реальным приближением к истине можно считать определенные таким образом минимальные и максимальные расстояния малых планет, остается нерешенным. Малая масса Марса едва ли может дать заметную коррекцию в максимальном расстоянии.

Наконец, заметим, что интеграл Якоби (2) позволяет делать более глубокие выводы об устойчивости по сравнению с тем, что можно получить при помощи граничной кривой.

#### § 4. Сходимость разложений по степеням возмущающих масс

Теория возмущений, методы которой от Лапласа и Лагранжа и до наших дней господствуют в исследованиях по небесной механике, исходит из разложений координат в ряды по степеням малых планетных масс. Как же обстоит дело со сходимостью этих разложений?

Оказывается, что существование вековых возмущений препятствует сходимости рядов по крайней мере на больших промежутках времени. Правда, Лаплас и Лагранж смогли привести доказательство (ср. с гл. VII), что среди возмущений первого порядка в выражениях для большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты никаких вековых неравенств не встречается. Но как обстоит дело в этом отношении с коэффициентами при более высоких степенях масс, им не было известно; эта задача и сейчас нельзя считать решенной \*).

Другую трудность при исследовании сходимости порождают малые делители. С точки зрения теории возмущений незначительный или даже исчезающе малый до интеграции член мог бы дать какое угодно большое по величине возмущение, если только средние движения планет приблизительно соизмеримы.

С другой стороны, применение теории возмущений к планетной системе дает хорошее согласие между теорией и наблюдениями. Отсюда можно непосредственно заключить, что какого-либо рода сходимость действительно должна существовать.

Учитывая указанные трудности, можно заключить, что ряды остаются сходящимися для очень больших интервалов времени. Но сходятся ли вообще эти ряды на ограниченных промежутках времени или они принадлежат к асимптотическим рядам, которые

---

\*) В возникающей здесь проблеме малых знаменателей долгое время не наблюдалось никакого прогресса. Лишь в последнее время К. Зигелю [66], А. Н. Колмогорову [67], В. И. Арнольду [12] удалось разрешить ряд задач, связанных с указанными трудностями. В классической теории возмущений все приближения вместе расходятся. Более сильный прием теории возмущений может основываться на методах типа Ньютона, обеспечивающих быструю сходимость. (Прим. перев.)

дают приближенные выражения для функций, если сохранить несколько начальных членов ряда?

Ответ на эти вопросы имеет исключительное значение для приложений теории возмущений к вычислению движения небесных тел. Если ряды только асимптотические, то при известных обстоятельствах вычисление возмущений высшего порядка может рассматриваться как бесполезная или даже вредная работа и тогда лучше было бы отказаться от трудоемких вычислений возмущений высших порядков и довольствоваться возмущениями первого порядка; в этом случае, естественно, пришлось бы выполнять вычисления для достаточно близко лежащих эпох.

Пусть  $x$  — какая-либо координата, для которой путем интегрирования дифференциального уравнения движения получено выражение

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots \quad (1)$$

Величина  $\mu$  представляет собой одну из масс, так что если массы обозначить через  $m_1, m_2, \dots, m_s$ , то

$$m_1 = \alpha_1 \mu, \quad m_2 = \alpha_2 \mu, \quad \dots, \quad m_s = \alpha_s \mu, \quad (2)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  следует рассматривать как конечные числа, одно из которых можно выбрать произвольно. В (1)  $x_1$  называют возмущением первого порядка,  $x_2$  — возмущением второго порядка и т. д.

При рассмотрении вопроса о сходимости ряда (1) следует различать две проблемы. Возмущения различных порядков будут даваться не конечными выражениями, а в виде бесконечных рядов. Первая проблема состоит в исследовании сходимости этих рядов. Вторая проблема связана с исследованием сходимости ряда (1), образованного возмущениями различного порядка.

Этим последним вопросом мы и хотим заняться в данном параграфе. Чтобы сделать первую из названных проблем независимой, мы сформулируем задачу так: можно ли координаты в задаче трех тел (соответственно в задаче  $n$  тел) разложить в ряды по степеням малых масс, и если это возможно, то какого рода будет сходимость этих рядов? Ответ на этот вопрос был дан автором [69].

Мы воспользуемся элементами Делоне (§ 5 гл. V). Если, кроме Солнца, имеется  $s$  планет, то дифференциальные уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{1}{\beta_i} \frac{\partial F}{\partial l_i}, & \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{1}{\beta_i} \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \frac{dG_i}{dt} &= \frac{1}{\beta_i} \frac{\partial F}{\partial g_i}, & \frac{dg_i}{dt} &= -\frac{1}{\beta_i} \frac{\partial F}{\partial G_i}, \\ \frac{dH_i}{dt} &= \frac{1}{\beta_i} \frac{\partial F}{\partial h_i}, & \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{1}{\beta_i} \frac{\partial F}{\partial H_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$(i = 1, 2, \dots, s)$

где

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{a_i}, & l_i &= n_i t + c_i, \\ G_i &= \sqrt{a_i(1 - e_i^2)}, & g_i &= \pi_i - \Omega_i, \\ H_i &= \sqrt{a_i(1 - e_i^2)} \cos J_i, & h_i &= \Omega_i. \end{aligned}$$

Возмущающая функция  $F$  может быть разложена по степеням малых масс или по  $\mu$ , и будем иметь

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots \quad (3^*)$$

Обобщенная Пуанкаре теорема существования Коши показывает, что интеграл уравнений (3) может быть разложен по степеням  $\mu$  (если  $\mu$  выбрано достаточно малым) для всех значений времени  $t$ , для которых справедливо разложение (3\*), с ограничением, сформулированным в § 7 гл. VIII для случая, когда разложение (3\*) сходится для всех значений времени.

Чтобы это имело место, должно выполняться условие, которое мы теперь исследуем. Пусть решение уравнений (3) будет

$$\begin{aligned} L_i &= L_i(t, \mu), & l_i &= l_i(t, \mu), \\ G_i &= G_i(t, \mu), & g_i &= g_i(t, \mu), \\ H_i &= H_i(t, \mu), & h_i &= h_i(t, \mu), \end{aligned}$$

где функции  $L_i(t, \mu)$ ,  $G_i(t, \mu)$  и т. д. разлагаются по положительным степеням  $\mu$ .

При  $\mu = 0$  эти функции имеют значения

$$\left. \begin{aligned} L_i(t, 0), & G_i(t, 0), & H_i(t, 0), \\ l_i(t, 0), & g_i(t, 0), & h_i(t, 0), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и согласно § 7 гл. VIII необходимо, чтобы  $F$  и ее производные по  $L$ ,  $G$  и т. д. могли быть разложены по степеням  $L_i - L_i(t, 0)$ ,  $G_i - G_i(t, 0)$  и т. д.

Но в рассматриваемом случае функции (4) сводятся к постоянным, за исключением функции  $l_i(t, 0)$ , которая имеет значение

$$l_i(t, 0) = n_i t + c_i.$$

В самом деле, величины  $L_i(t, 0)$ ,  $G_i(t, 0)$  и т. д. не что иное, как оскулирующие элементы планеты в момент времени  $t = 0$ .

Возмущающая функция и ее производные по элементам суть аналитические функции элементов, которые для произвольных значений

$$\left. \begin{aligned} L_i^{(0)}, & G_i^{(0)}, & H_i^{(0)}, \\ l_i^{(0)}, & g_i^{(0)}, & h_i^{(0)}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

могут быть разложены в ряды по положительным степеням  $L_i - L_i^{(0)}$ ,  $G_i - G_i^{(0)}$  и т. д. в предположении, что эти величины выбираются достаточно малыми; эти ряды сходятся для всех действительных значений времени, если только определенные при помощи (5) конические сечения не пересекают друг друга.

Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть следующую простую задачу. Пусть поставлена задача разложить функцию

$$\varphi(l) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l}},$$

где  $\alpha < 1$ , в окрестности точки  $l = l_0$  в ряд по степеням  $l - l_0$ . Мы утверждаем, что это разложение сходится в конечной окрестности  $l = l_0$  и притом для всех действительных значений  $l_0$ . Полагая

$$l = l_0 + \xi,$$

имеем

$$\cos l = \cos l_0 \cos \xi - \sin l_0 \sin \xi = \cos l_0 - 2 \cos l_0 \sin^2 \frac{1}{2} \xi - \sin l_0 \sin \xi$$

и, следовательно,

$$\varphi(l) = [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0]^{-1/2} \left(1 + \frac{f}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0}\right)^{-1/2}, \quad (6)$$

где

$$f = 2\alpha \left(2 \cos l_0 \sin^2 \frac{1}{2} \xi + \sin l_0 \sin \xi\right).$$

Но правую часть (6) можно разложить по степеням  $f$ , если

$$|f| < 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0,$$

или, так как предполагается  $\alpha < 1$ , когда

$$|f| < (1 - \alpha)^2. \quad (7)$$

Но уравнение (7) выполняется, если

$$2 \left| \sin^2 \frac{1}{2} \xi \right| + |\sin \xi| < \frac{(1 - \alpha)^2}{2\alpha}. \quad (7^*)$$

Если это условие выполнено, то мы получим

$$\varphi(l) = A_0 + A_1 f + A_2 f^2 + \dots, \quad (8)$$

где  $A_0, A_1, A_2$  суть функции от  $l_0$ . Этот ряд равномерно сходится для всех значений  $\xi$ , которые принадлежат области (7\*), причем для всех действительных значений  $l_0$ . Мы предположим, что (7\*) выполняется для всех  $\xi$ , которые удовлетворяют неравенству

$$|\xi| < \rho, \quad (9)$$

где  $\rho$  обозначает конечное число. Тогда ряд (8) сходится равномерно в области (9).

Но  $f$  — голоморфная функция  $\xi$ , которая для всех значений  $l_0$  может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд по степеням  $\xi$ . Следовательно, по теореме Вейерштрасса правую часть (8) можно представить рядом по степеням  $\xi$ , который сходится в области (9) для всех значений  $l_0$ . Но этот вывод, очевидно, нельзя получить, если величина  $1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos l_0$  при определенном значении  $l_0$  становится равной нулю.

Согласно сказанному и из рассуждений § 7 гл. VIII следует сходимость ряда (1), который представляет координату в задаче трех тел следующим образом.

Пусть дано произвольное действительное число  $T$ ; тогда всегда можно найти конечную положительную величину  $R$  так, что координаты в задаче  $n$  тел для всех  $|\mu| < R$  можно разложить по степеням  $\mu$ ; именно эти ряды сходятся для всех значений времени  $t$ , которые принадлежат области  $0 \leq t \leq T$ .

Величина  $T$  может быть выбрана произвольно большой. Здесь необходимо различать два возможных случая. Значение радиуса сходимости может зависеть от  $T$ , либо быть одинаковым для всех  $T$ . Вспомогательная функция Пуанкаре из § 6 гл. VIII приводит к интегралу, который может быть разложен по степеням  $\mu$ , и радиус сходимости этого разложения зависит от  $T$  и стремится к нулю, если  $T$  неограниченно возрастает.

Методом, развитым в указанном параграфе, нельзя доказать, что радиус сходимости разложений интеграла данного дифференциального уравнения больше соответствующего радиуса сходимости вспомогательной функции. Но может случиться, что истинный радиус сходимости имеет много большее значение; бывает, в частности, что радиус сходимости разложения интеграла данного дифференциального уравнения по степеням параметра  $\mu$  не зависит от  $T$ . Это приближенно может быть выяснено посредством построения других вспомогательных функций.

Какой из этих случаев (зависит или нет  $R$  от  $T$ ) действительно имеет место для дифференциальных уравнений задачи трех тел, — требует особых исследований. Нам представляется, что в данном случае  $R$  не будет зависеть от  $T$ .

Практические выводы для теории возмущений в обоих случаях весьма различны. Если  $R$  зависит от  $T$ , то при заданных массах с помощью разложений по степеням масс удастся обеспечить сходимость разложений только до определенного момента времени. На большие промежутки времени эти результаты распространить нельзя, даже если принимаются во внимание и возмущения еще более высокого порядка.

В то же время, когда  $R$  не зависит от  $T$ , ряды сходятся для всех моментов времени, если только  $\mu < R$ . Тогда при помощи формул для возмущений можно вычислять координаты для сколь угодно больших моментов времени. Однако в этом случае ряды обладают иным недостатком, который ограничивает их практическое применение. Чем больше значения времени, для которых должны быть справедливы ряды, тем больше нужно брать членов, чтобы достигнуть определенной точности, тем большим должен быть порядок учитываемых возмущений. Ряды сходятся для всех значений времени, но при возрастании значений  $t$  сходимость замедляется.

В обоих случаях, — зависит  $R$  от  $T$  или нет, — можно сделать важный вывод: разложения координат по степеням масс в проблеме  $n$  тел не являются асимптотическими рядами. Если только находиться в области сходимости, то и правильно, и полезно учитывать возмущения высшего порядка при получении точных результатов. Чем выше порядок учитываемых возмущений, тем точнее результат.

Числовые приложения этих рассмотрений к планетной системе сопряжены с немалыми трудностями. Метод Коши, использованный в теореме о существовании, в общем случае дает слишком малые значения радиуса сходимости. Он все-таки будет, вероятно, достаточным, чтобы можно было доказать, что разложения по степеням фактически встречающихся в планетной системе масс остаются сходящимися не только в весьма малой области. Вероятно, можно отыскивать лучшие вспомогательные функции, которые позволяют более точно определить область сходимости.

### § 5. Сходимость рядов в теории возмущений

В § 9 гл. VIII было показано, что разложение возмущающей функции может быть записано в форме

$$F = \sum A_{ii}^{j'j'} \cos(il + i'l' + jg + j'g'), \quad (1)$$

где  $i, i', j, j'$  принимают все целые положительные и отрицательные числовые значения. Здесь  $g$  и  $g'$  обозначают угловые расстояния перигелиев от общей линии узлов планетных орбит на неизменяемой плоскости, а  $l$  и  $l'$  суть средние аномалии планет

$$l = nt + c, \quad l' = n't + c'.$$

Относительно коэффициентов  $A_{ii}^{j'j'}$  известно, что они являются аналитическими функциями эксцентриситетов  $e$  и  $e'$  и взаимной наклонности планетных орбит  $J$ , которые в окрестности  $e = e' = J = 0$  могут быть разложены по положительным

степеням  $e$ ,  $e'$  и  $J$ , причем коэффициенты будут функциями больших полуосей  $a$  и  $a'$  планетных орбит.

Ряд

$$\sum |A_{ii'}^{jj'}| \quad (2)$$

сходится в области  $B$  величин  $a$ ,  $a'$ ,  $e$ ,  $e'$  и  $J$ . В разложении коэффициентов  $A$  следует отметить одно важное свойство: в разложении

$$A_{ii'}^{jj'} = \sum \alpha e^p e'^q J^r \quad (3^*)$$

всегда выполняется неравенство

$$p + q + r \geq ||i| - |i' ||. \quad (3)$$

Если теперь под  $E$  понимать произвольный элемент, то для него будет справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{dt} = \sum B_{ii'}^{jj'} \cos(il + i'l' + D_{jj'}), \quad (4)$$

где

$$D_{jj'} = jg + j'g' \quad \text{или} \quad D_{jj'} = jg + j'g' + 90^\circ.$$

Коэффициенты  $B$  здесь имеют те же самые свойства, как и коэффициенты  $A$  в разложении возмущающей функции.

В теории возмущений (см. § 4 гл. VI) для определения возмущений первого порядка элементы  $g$ ,  $g'$ ,  $a$ ,  $a'$ ,  $e$ ,  $e'$ ,  $J$  в правых частях (4) рассматриваются как неизменяемые величины; после интегрирования получается

$$E = \sum' \frac{B_{ii'}^{jj'}}{in + i'n'} \sin(il + i'l' + D_{jj'}) + Ct + E_0. \quad (4^*)$$

Речь идет о том, чтобы исследовать вопрос о сходимости ряда, стоящего в правой части этого выражения.

Заметим сначала, что из этого ряда можно исключить все такие члены, для которых  $i$  и  $i'$  имеют одинаковые знаки. Так как именно для таких членов знаменатель  $|in + i'n'|$  обладает конечной нижней границей, то все такие члены образуют ряд, который сходится внутри области  $B$ .

В силу неравенства (3) задачу можно еще несколько упростить. А именно, можно заменить  $B_{ii'}^{jj'}$  наибольшим членом разложения этого коэффициента, которое имеет форму (3\*); подставляя величину  $\kappa$ , которая равна наибольшей из величин  $e$ ,  $e'$ , лежащих между нулем и единицей, и  $J$ , придем к рассмотрению ряда вида

$$\sum \frac{K_{ii'} \kappa^r}{i - i'v} \sin(il - i'l' + D), \quad (5)$$

где

$$i, i' = 1, 2, 3, \dots, \quad r = |i - i'|, \quad (5^*)$$

а  $\nu$  равно отношению  $n'$  к  $n$ .

Если бы  $\nu$  было рациональным числом, то член в (5) стал бы неограниченно большим, но если  $\nu$  иррационально, то числа  $i$  и  $i'$ , очевидно, также могут принимать такие значения, что знаменатель  $i - i'\nu$  станет сколь угодно малым. Отсюда и проистекают значительные трудности при этих исследованиях сходимости.

Рациональные значения  $\nu$  из рассмотрения могут быть исключены, по крайней мере в том случае, если речь идет о чисто теоретических рядах для возмущений. Значения  $i$  и  $i'$ , выбранные так, что уравнение  $i - i'\nu = 0$  строго выполняется, дают вековые члены, и эти члены содержатся в коэффициентах  $C$  (4\*).

Итак, предположим, что  $\nu$  обозначает иррациональное число, и всегда можно считать, что оно меньше единицы.

Как будет подробнее исследовано в следующем параграфе, множители  $\sin(il - i'l' + D)$  в ряде (5) не влияют на сходимость. Поэтому сначала следует рассмотреть ряд

$$S = \sum \left| \frac{K_{ii'} \kappa^r}{i - i'\nu} \right|, \quad (6)$$

где

$$r = |i - i'|,$$

и согласно сказанному исходить из предположения, что ряд

$$\sum K_{ii'} \kappa^r \quad (7)$$

абсолютно сходится и имеет конечный радиус сходимости  $< 1$ . Существует теорема, которая принадлежит к важнейшим открытиям в теории возмущений и приводит к совершенно неожиданному результату в вопросе о сходимости рядов, встречающихся в задаче трех тел. Эта интересная теорема была доказана Брунсом [68] в 1884 г. и состоит в следующем.

Пусть дано произвольное действительное число  $\nu_0$  и пусть  $\delta$  обозначает положительное или отрицательное число. Тогда между  $\nu = \nu_0$  и  $\nu = \nu_0 + \delta$ , каким бы малым ни было выбрано  $\delta$ , имеется бесконечное множество значений  $\nu$ , для которых ряд (6) сходится, и равным образом в той же области имеется бесконечное множество значений  $\nu$ , для которых ряд расходится.

Если точками сходимости назвать такие значения  $\nu$ , для которых ряд сходится, а точками расходимости значения, для которых ряд расходится, то теорема Брунса утверждает, что точки сходимости и точки расходимости образуют повсюду плотное множество (при всех действительных значениях  $\nu$ ).

Очевидно, достаточно доказать, что в указанной области имеется одно значение  $\nu$ , для которого ряд сходится, и одно значение, для которого он расходится. Если это доказано, то отсюда, как следствие, вытекает, что существует бесконечно много значений такого рода. Ряд  $S$  (6) сходится, если  $\nu$  — корень неприводимого алгебраического уравнения с целочисленными коэффициентами (и без рациональных корней). Пусть

$$G_0 \nu^m + G_1 \nu^{m-1} + \dots + G_m = 0 \quad (8)$$

— такое уравнение, где  $G_0, G_1, \dots, G_m$  обозначают целые числа.

Пусть корни этого уравнения, кроме  $\nu$ , суть  $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_m$ ; ради симметрии запишем  $\nu_1$  вместо  $\nu$ . В члене  $\frac{K\nu^r}{i-i'\nu}$ , умножив числитель и знаменатель на произведение

$$G_0 (i - i'\nu_2) (i - i'\nu_3) \dots (i - i'\nu_m),$$

имеем

$$\begin{aligned} G_0 \prod_{s=1}^m (i - i'\nu_s) &= G_0 i^m - G_0 i^{m-1} i' \sum \nu_1 + G_0 i^{m-2} i'^2 \sum \nu_1 \nu_2 + \dots = \\ &= G_0 i^m + G_1 i^{m-1} i' + G_2 i^{m-2} i'^2 + \dots + G_m i'^m. \end{aligned}$$

Правая часть этого уравнения не нуль, так как (8) не имеет рационального корня, а с другой стороны, очевидно, всегда является целым числом, следовательно, самое меньшее равно единице. Обозначим этот знаменатель через  $N_{ii'}$ . Запишем, далее,

$$\begin{aligned} G_0 (i - i'\nu_2) (i - i'\nu_3) \dots (i - i'\nu_m) &= \\ &= H_0 i^{m-1} + H_1 i^{m-2} i' + \dots + H_{m-1} i'^{m-1}, \end{aligned}$$

где  $H_0, H_1, \dots, H_{m-1}$  определенные, не зависящие от  $i$  и  $i'$  числа; тогда  $S$  разделится на  $m$  рядов, которые имеют форму

$$H_s \sum \left| \frac{K_{ii'} i^{m-s} i'^{s-1} \kappa^r}{N_{ii'}} \right|, \quad (9)$$

и здесь теперь  $r = |i - i'|$ ,  $|N_{ii'}| \geq 1$ .

Примем во внимание, что здесь следует брать только такие значения  $i$  и  $i'$ , для которых делители  $i - i'\nu$  не превосходят малого значения  $\varepsilon$ ; тогда, очевидно, (9) должно сходиться одновременно с (7). Ряд  $S$  сходится, если  $\nu$  удовлетворяет уравнению (8).

Но числа, которые удовлетворяют алгебраическому уравнению с целочисленными коэффициентами, располагаются на числовой оси повсюду плотно, и поэтому первая часть теоремы Брунса доказана.

Брунс доказывает, что аналогичный результат имеет место и для точек расходимости.

Предположим, что  $\nu$  представляется рядом следующего вида:

$$\nu = \frac{1}{h_1} + \frac{\varepsilon_2}{h_1 h_2} + \frac{\varepsilon_3}{h_1 h_2 h_3} + \dots, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_i$  обозначает или  $+1$  или  $-1$ , а  $h_1, h_2, h_3$  — целые числа, которые удовлетворяют неравенству

$$h_{\alpha+1} \geq 2h_\alpha - 1, \quad h_1 \geq 2. \quad (11)$$

Впрочем, числа  $h_i$  могут быть выбраны и произвольным образом.

Числа  $i$  и  $i'$  в (6) могут принимать произвольные (положительные) числовые значения. Рассмотрим последовательности значений  $i$  и  $i'$ , которые образуются по следующему закону:

$$\left. \begin{aligned} i &= H_\alpha \left( \frac{1}{H_1} + \frac{\varepsilon_2}{H_2} + \dots + \frac{\varepsilon_\alpha}{H_\alpha} \right), \\ i' &= H_\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$H_r = h_1 h_2 \dots h_r.$$

Заметим, что получающиеся при этом значения  $i$  и  $i'$  суть целые положительные числа. Отсюда находим

$$\nu = \frac{1}{H_1} + \frac{\varepsilon_2}{H_2} + \frac{\varepsilon_3}{H_3} + \dots,$$

ибо  $i - i'\nu$  может быть записано в форме

$$i - i'\nu = -\frac{\varepsilon_{\alpha+1}}{h_{\alpha+1}} - \frac{\varepsilon_{\alpha+2}}{h_{\alpha+1} h_{\alpha+2}} - \dots,$$

и, принимая во внимание неравенство (11), при достаточно больших значениях  $\alpha$  можно заменить это выражение первым членом. Если будут учтены только те члены, которые соответствуют значениям (12) для  $i$  и  $i'$ , вместо (6) получим ряд

$$S' = \sum h_{\alpha+1} |K_{ii'}| x^\alpha. \quad (13)$$

Но числа  $h_\alpha$  могут быть выбраны совершенно произвольно, лишь бы выполнялось неравенство (11). Если они будут выбраны так, что для всех  $\alpha$

$$h_{\alpha+1} \geq \frac{\alpha^r}{|K_{ii'}|}, \quad (14)$$

то находим, что (13) расходится, какое бы малое значение не имело  $x$ .

Закон образования (10) для  $\nu$  непосредственно показывает, что определенные таким образом точки расходимости образуют повсюду плотное числовое множество. Действительно, чтобы доказать это, необходимо лишь изменить знаки различных  $\varepsilon_\alpha$ .

Так как к выражению (10) для  $\nu$  можно добавить произвольное рациональное число, не изменяя при этом приведенных рассуждений, то находим, что точки расходимости на всей числовой оси располагаются повсюду плотно. Можно в каждый сколь угодно малый интервал действительных чисел вставить сколь угодно много иррациональных чисел, для которых ряд (6) наверно расходится.

После того как были выяснены особенности свойства сходимости ряда (6), можно было бы поставить вопрос, имеют ли вообще получающиеся в теории возмущений ряды действительный математический смысл? Если бы для достижения этого захотели бы ограничить средние движения, а значит, также и  $\nu$ , такими значениями, для которых ряд (6) сходится, тогда на практике можно было бы получить этим путем сколь угодно хорошее приближение, так как точки сходимости образуют повсюду плотное множество. Но в действительности на этом пути мы только переместили бы трудности, а не преодолели бы их. По теореме Коши — Пуанкаре известно, что координаты в задаче трех тел суть аналитические функции постоянных интегрирования, и едва ли можно объяснить, как можно использовать решение дифференциальных уравнений, которые не обладают этим свойством, для определения постоянных интегрирования из наблюдений.

Прежде чем переходить к решению этих трудностей, изложим интересную попытку, предпринятую Гильденом, с помощью которой он хотел, так сказать, «обломать» вершину трудностей. Гильден пытался доказать, что хотя точки сходимости и расходимости располагаются повсюду плотно, тем не менее вероятность расходимости бесконечно мала.

При этом Гильден изумил неожиданной, найденной им теоремой, которую мы здесь воспроизведем, ограничившись тем, что необходимо в астрономических вопросах. Исследования Гильдена по этому вопросу содержатся в [69]. Эти исследования позднее были развиты и углублены Броденом и Виманом [70, 71].

Пусть  $\nu$  — данное, лежащее между 0 и 1, иррациональное число, для которого имеет место разложение в непрерывную дробь

$$\nu = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}, \quad (15)$$

где  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — положительные числа, которые однозначно определяются по  $\nu$ .

Число  $\nu$  имеет произвольное значение между 0 и 1, так что все отрезки одной и той же длины в этом интервале следует считать равновероятными. Следовательно, мы предполагаем равновероятным, что  $\nu$  лежит между  $\nu_1$  и  $\nu_1 + \delta\nu_1$  или между  $\nu_2$  и  $\nu_2 + \delta\nu_2$ , если  $\nu_1$  и  $\nu_2$  имеют произвольные значения между 0 и 1, и  $\delta\nu_1 = \delta\nu_2$ .

Тогда можно поставить следующую задачу и дать на нее ответ: если в непрерывной дроби заданы числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то: 1) какова вероятность  $F_{n,k}$ , что следующее число  $a_{n+1}$  примет значение  $k$  ( $k$  — целое число), 2) какова вероятность  $W_{n,k}$ , что  $a_{n+1} \geq k$ .

Для того чтобы внести в эти вопросы ясность, начнем с простого примера.

Пусть дано соотношение между двумя величинами  $x$  и  $y$ :

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}. \quad (16)$$

Здесь  $x$  может принимать все действительные значения от 1 до бесконечности, а не только целые числовые значения, а для  $y$  равновероятны все значения между  $1/2$  и 1. Спрашивается, какова вероятность того, что  $x$  лежит между 1 и 3?

Очевидно, что  $y$  непрерывно возрастает вместе с  $x$ . При  $x = 1$   $y = 1/2$ , при  $x = 3$   $y = 3/4$ , и так как, по предположению, значения  $y$  между  $1/2$  и  $3/4$  так же вероятны, как и значения  $y$  между  $3/4$  и 1, то вероятность того, что  $x$  лежит между 1 и 3, равна  $1/2$ .

Возвращаясь к общей задаче Гильдена, сначала вспомним одно известное свойство разложений в непрерывные дроби. Обозначим подходящую дробь для цепной дроби (15), которая образуется из  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , через

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{r_n}{s_n}; \quad (17)$$

тогда, как известно, справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} r_{n+1} &= a_{n+1} r_n + r_{n-1}, \\ s_{n+1} &= a_{n+1} s_n + s_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{(-1)^n}{s_n s_{n+1}}, \quad (19)$$

где

$$r_1 = 1, \quad r_2 = a_2, \quad s_1 = a_1, \quad s_2 = a_2 a_1 + 1.$$

Искомые вероятности в соответствии с исследованиями Бродена [70] выводятся следующим образом.

Пусть  $n$  — определенное число, и предположим для  $a_1, a_2, \dots, \dots, a_n$  определенные значения, в то время как для  $a_{n+1}, a_{n+2}$  и т. д. это не предполагается. Тогда возможные значения цепной дроби лежат между  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $(a_1, a_2, \dots, a_n, 1)$  и первое или второе из этих граничных значений будет меньшим, в зависимости от того, будет ли  $n$  четным или нечетным. Поэтому  $\nu$  связано с отрезком длины

$$l_{n1} = (-1)^n \{(a_1, \dots, a_n, 1) - (a_1, \dots, a_n)\}.$$

Из (19) и (18) находим выражение

$$l_{n1} = \frac{1}{s_n s_{n+1}} = \frac{1}{s_n (s_n + s_{n-1})}. \quad (19^*)$$

Пусть, далее,  $k$  — целое число  $\geq 1$ . Если  $a_{n+1} \geq k$ , причем  $a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$  принимают произвольные значения, то соответствующее значение  $\nu$  находится на отрезке

$$l_{nk} = (-1)^n \{(a_1, \dots, a_n, k) - (a_1, \dots, a_n)\},$$

который согласно (19) имеет длину

$$l_{nk} = \frac{1}{s_n (ks_n + s_{n-1})}. \quad (19^{**})$$

Вероятность того, что  $a_{n+1} \geq k$  при заданных  $a_1, \dots, a_n$ , выражается отношением  $l_{nk}$  к  $l_{n1}$ . Если положить

$$q_n = \frac{s_{n-1}}{s_n}, \quad (20)$$

то вероятность  $W_{nk}$  будет равна

$$W_{nk} = \frac{1 + q_n}{k + q_n}. \quad (21)$$

Чем больше  $k$ , тем меньше вероятность того, что  $a_{n+1}$  имеет значение, большее или равное  $k$ . Из (18) находим, что  $q_n$  всегда меньше единицы. Следовательно,  $W$  должно быть заключено в следующих границах:

$$\frac{1}{k} < W < \frac{2}{k+1}. \quad (22)$$

Вероятность того, что произвольное неполное частное  $a_n$  в цепной дроби, если совершенно не принимать во внимание значения остальных неполных частных, больше чем  $k$ , будет всегда меньше  $\frac{2}{k}$ ,

$$W < \frac{2}{k}. \quad (22^*)$$

Это предложение мы используем в последующем.

Из (21) можно вывести вероятность  $F_{nk}$  того, что  $a_{n+1}$  при заданных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  принимает в точности значение  $k$ . Получаем

$$F_{nk} = W_{nk} - W_{n(k+1)} = \frac{1 + q_n}{(k + q_n)(k + 1 + q_n)}$$

и для достаточно больших значений  $k$  находим, что  $F$  при произвольных значениях  $a_1, a_2, \dots, a_n$  всегда меньше чем  $2/k^2$ .

Из этой теоремы Гильден получил различные интересные следствия. Из них мы упомянем только об одной любопытной теореме: при разложении произвольно выбранного числа в непрерывную дробь вероятное значение неполного частного равно 2, так что при таком разложении единица в качестве знаменателя встречается столь же часто, как и те числа, которые больше двух. В астрономических приложениях достаточно принимать во внимание теорему (22\*).

Теперь возвратимся к уравнению (6), где мы простоты ради положили  $K_{ii} = 1^*$ . Далее в ряде будем учитывать только те значения  $i$  и  $i'$ , которые соответствуют подходящим дробям  $\frac{r_n}{s_n}$  разложения  $\nu$  в непрерывную дробь. Соответствующий показатель  $\kappa$  в (6) имеет тогда при  $\nu < 1$  значение  $s_n - r_n$ , и так как  $r_n$  приближенно имеет значение  $\nu s_n$ , то вместо (6) можно рассматривать ряд

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varepsilon^{s_n}}{r_n - s_n \nu} \right|, \quad (23)$$

где  $\varepsilon$  обозначает величину, меньшую единицы, значение которой приближенно дается формулой  $\varepsilon = \kappa^{1-\nu}$ .

По известной теореме из теории непрерывных дробей имеем

$$\nu = \frac{r_n}{s_n} + (-1)^n \left\{ \frac{1}{s_n s_{n+1}} - \frac{1}{s_{n+1} s_{n+2}} + \dots \right\},$$

и, следовательно, приближенно

$$r_n - s_n \nu = \frac{(-1)^{n+1}}{s_{n+1}},$$

так что мы должны иметь дело с рядом вида

$$U = \sum s_{n+1} \varepsilon^{s_n}.$$

\*) Это оправдано, так как мы исходили из предположения, что ряд  $\sum K_{ii} \kappa^i$  обладает конечным радиусом сходимости. Указанное предположение означает только, что мы выбираем радиус сходимости равным единице.

Если здесь согласно (18) положить

$$s_{n+1} = a_{n+1} s_n + s_{n-1},$$

то (23) распадется на два ряда,  $U'$  и  $U''$ , один из которых,

$$U'' = \sum s_{n-1} \varepsilon^{s_n},$$

всегда сходящийся. Таким образом, исследуемым рядом будет

$$U' = \sum a_{n+1} s_n \varepsilon^{s_n}. \quad (24)$$

Соотношение (24) позволяет доказать непосредственно, что точки сходимости и расходимости образуют повсюду плотное множество. Если даны неполные знаменатели  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , то  $\nu$  должно быть ограничено отрезком  $l_{m1}$  (19\*). Если теперь  $a_{m+1}, a_{m+2}$  и т. д. выбраны так, что они будут меньше произвольного конечного числа  $k$ , тогда, очевидно, ряд  $U'$  сходится, и точки сходимости располагаются повсюду плотно на указанном отрезке. Аналогичный результат имеет место и для точек расходимости, если число  $a_{m+1}$  выбрано надлежащим образом (например, положено  $a_{m+1} \geq \varepsilon^{-s_n}$ ). Затем Гильден делает заключение, что вероятность для расходимости ряда (24) бесконечно мала.

Эта теорема, доказательство которой Гильден только наметил, доказана Виманом [71]. В дальнейшем изложении мы попытаемся упростить это доказательство.

Во-первых, находим, что ряд (24) сходится или расходится одновременно с рядом

$$U''' = \sum a_{n+1} \varepsilon^{s_n}. \quad (25)$$

Поэтому рассмотрим этот ряд. О сходимости степенного ряда справедлива следующая теорема.

Пусть дан степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n. \quad (26)$$

Если для всех  $n$ , больших  $n_1$ , имеет место неравенство

$$|A_n x_1^n| \leq 1, \quad (26^*)$$

то (26) для всех  $|x| < |x_1|$  абсолютно сходится. В то же время ряд не сходится абсолютно, если для  $n$  невозможно найти такое значение  $n_1$ .

Если применить эту теорему к ряду (25), то этот ряд сходится для всех  $\varepsilon < \varepsilon_1$ , если неравенство

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{s_n}} \quad (27)$$

имеет место для определенного значения  $n = n_1$  и для всех больших значений.

Какова же вероятность того, что неравенство (27) выполняется для всех  $n > n_1$ ? Вероятность того, что одно из этих неравенств не выполняется, будет согласно (22\*) меньше, чем  $2\varepsilon_1^{s_n}$ . Следовательно, вероятность того, что (27) выполнено для определенного  $n$ , больше, чем  $1 - 2\varepsilon_1^{s_n}$ , и вероятность, что удовлетворяются все неравенства (27), больше произведения

$$\prod_{n=n_1}^{\infty} (1 - 2\varepsilon_1^{s_n}).$$

Но это выражение при достаточно большом значении  $n_1$  становится сколь угодно близким к единице. Следовательно, вероятность сходимости ряда (25) отличается от единицы на бесконечно малую величину. Поэтому вероятность расходимости ряда (25), а значит, и ряда (23), бесконечно мала. Что и требовалось доказать.

Между Броденом и Виманом имел место очень оживленный обмен мнениями ([72]—[74]) о значении теоремы Гильдена, интересный во многих отношениях. Виман наиболее строго математически исследовал утверждения Гильдена, в то время как Броден отстаивал точку зрения, что вероятностная трактовка не может распространяться на встречающиеся здесь повсюду плотные числовые множества.

Как бы то ни было, из этих исследований следует, что между точками сходимости и точками расходимости существует определенное теоретико-множественное различие, для которого, по нашему мнению, не опасаясь недоразумения, можно применить выражение Гильдена, что вероятность расходимости бесконечно мала, хотя весьма возможно, что для этого можно было бы найти адекватное математическое выражение. Несомненно также, что эта теорема имеет большое значение для ряда проблем небесной механики.

Этим путем нельзя преодолеть трудности, которые были обнаружены теоремой Брунса относительно ряда (6). Если даже вероятность расходимости мала, это не исключает того, например, что при определении постоянных интегрирования при непрерывном изменении начального положения придется проходить друг за другом бесконечное число точек сходимости и расходи-

мости. Определение постоянных при таких условиях было бы математически неясной задачей, и вся теория возмущений была бы построена на ненадежном фундаменте. К счастью, указанные трудности можно устранить иным образом, что мы более подробно рассмотрим в следующем параграфе.

### § 6. Сходимость рядов в теории возмущений (продолжение)

Исследования Брунса относятся к ряду (6), в то время как фактически в теории возмущений ряды имеют форму (5) или (4\*). Из сходимости ряда (6) следует, что (5) также сходится, но ряд (5) не обязательно должен расходиться для тех значений  $\nu$ , которым соответствуют точки расходимости ряда (6). Действительно, тригонометрические множители в ряде (4) способствуют тому, чтобы решение этого дифференциального уравнения можно было представить аналитической функцией отношения средних движений  $n'$  и  $n^*$ .

Замечая, что величины  $in + i'n'$ , где  $i$  и  $i'$  принимают все положительные и отрицательные целые числовые значения, образуют счетное множество, мы можем записать исследуемое дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cos(\lambda_s t + G_s). \quad (1)$$

Если это уравнение проинтегрировать в пределах от  $t_0$  до  $t$ , то получим

$$E - E_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)] + C(t - t_0), \quad (2)$$

где

$$C = SA_s \cos G_s, \quad (2^*)$$

причем эта сумма распространена на все члены, для которых  $\lambda_s = 0$ .

Если предполагается, как и в предыдущем параграфе, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s$$

абсолютно сходится, а следовательно, сходится также и ряд (2\*), то тогда следует доказать, что  $E$  является аналитической

\*) Приводимые здесь рассуждения в основном содержатся в [75].

функцией от  $n$  и  $n'$ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s) &= \\ &= 2 \cos \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$E - E_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2A_s}{\lambda_s} \cos \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) + C(t - t_0). \quad (3)$$

Но тогда для всех действительных значений  $\lambda_s$  и  $t - t_0$  справедливо неравенство

$$\left| \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \right| < \left| \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \right|. \quad (4)$$

Если теперь запишем

$$E - E_0 = \sum_{s=1}^{p-1} \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)] + C(t - t_0) + R_p, \quad (5)$$

то

$$R_p \leq \sum_{s=p}^{\infty} \left| \frac{2A_s}{\lambda_s} \cos \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \right|,$$

и поэтому по (4) имеем

$$R_p < (t - t_0) \sum_{s=p}^{\infty} |A_s|. \quad (6)$$

Но, по предположению,  $\sum A_s$  абсолютно сходится, следовательно, если задана сколь угодно малая величина  $\sigma$ , мы всегда можем найти число  $p'$  такое, что при всех  $p > p'$  имеет место

$$\sum_{s=p}^{\infty} |A_s| < \sigma.$$

Тогда получим

$$R_p < (t - t_0) \sigma. \quad (7)$$

Это неравенство показывает, что при всех конечных действительных значениях  $t$  всегда можно выбрать число  $p'$  так, что для всех  $p > p'$  остаточный член в (5) примет сколь угодно малое значение. Поэтому этот ряд, а значит, и ряд (2), сходится при всех значениях времени, и притом абсолютно, так что его члены можно заменить их абсолютными значениями. Величина

остаточного члена может зависеть от  $t$ . Говорят, что ряд сходится неравномерно, если при различных значениях  $t$  необходимо выбирать различные значения  $p'$  для того, чтобы остаточный член находился в заданных границах.

Исследование Брунса относилось к ряду

$$\sum \left| \frac{A_s}{\lambda_s} \right| \quad (8)$$

и привело к результату, что для этого ряда сходимость зависит от величины  $\nu$  отношения  $n'$  к  $n$ , а именно, оказалось, что точки сходимости и расходимости при этом располагаются всюду плотно. Для фактически встречающихся в теории возмущений рядов, которые имеют форму (2), интеграл, наоборот, является непрерывной и аналитической функцией  $\nu$ , и точки расходимости ряда (8) в действительности обуславливают здесь только то, что не будет равномерной сходимости.

Прежде чем переходить к астрономическим приложениям этой теоремы, мы несколько обобщим наши рассуждения.

Выше мы предполагали, что все дифференциальные уравнения в теории возмущений имеют форму

$$\frac{dE}{dt} = \sum A_s \cos(\lambda_s t + G_s), \quad (9)$$

и в § 4 гл. VI нашли, что возмущения всегда можно получить из таких дифференциальных уравнений. Между тем в этом параграфе было показано, что в некоторых случаях, а именно, если речь идет о возмущениях средней долготы, уже для возмущений первого порядка в правой части (9) может получиться интеграл в виде ряда такой же формы, что и (9). Собственно говоря, в этом случае мы должны иметь дело с дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sum A_s \cos(\lambda_s t + G_s), \quad (10)$$

и мы хотим исследовать, как тогда должны быть модифицированы приведенные выше выводы.

Сначала из (10) в соответствии с (2) получаем

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)] + C(t - t_0), \quad (11)$$

где

$$C = SA_s \cos G_s.$$

Интегрирование (11) дает

$$x = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{\lambda_s^2} H_s + \frac{1}{2} C (t - t_0)^2 + \frac{dx_0}{dt} (t - t_0) + x_0, \quad (12)$$

где

$$H_s = \cos(\lambda_s t + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s) + \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \cdot \lambda_s (t - t_0).$$

Но выражение

$$H_s = -2 \sin \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) + \\ + \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \cdot \lambda_s (t - t_0)$$

можно записать в форме

$$H_s = - \left\{ \sin \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] - \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \right\} \lambda_s (t - t_0) + \\ + 2 \sin \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) - \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \right]$$

или

$$H_s = -2 \cos \left[ \frac{\lambda_s}{4} (t + 3t_0) + G_s \right] \sin \frac{\lambda_s}{4} (t - t_0) \cdot \lambda_s (t - t_0) + \\ + 2 \sin \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t + t_0) + G_s \right] \left[ \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) - \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \right].$$

Для всех действительных значений  $\lambda_s$  и  $t - t_0$  справедливы следующие неравенства:

$$\left| \sin \frac{\lambda_s}{4} (t - t_0) \right| < \left| \frac{\lambda_s}{4} (t - t_0) \right|,$$

$$\left| \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) - \sin \frac{\lambda_s}{2} (t - t_0) \right| < \frac{1}{48} |\lambda_s^3 (t - t_0)^3|,$$

из которых последнее может быть получено из разложения в степенной ряд синуса. Имеем, следовательно,

$$|H_s| \leq \frac{1}{2} |\lambda_s^3 (t - t_0)^2| + \frac{1}{24} |\lambda_s^3 (t - t_0)^3|,$$

и подставляя это значение в (12), находим

$$x = - \sum_{s=1}^p \frac{A_s}{\lambda_s^2} [\cos(\lambda_s t + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s) + \\ + \sin(\lambda_s t_0 + G_s) \cdot \lambda_s (t - t_0) + \frac{1}{2} C (t - t_0)^2 + \frac{dx_0}{dt} (t - t_0) + x_0 + R'_p], \quad (13)$$

где

$$R'_p \leq (t - t_0)^2 \frac{1}{2} \sum_{s=p}^{\infty} |A_s| + (t - t_0)^3 \sum_{s=p}^{\infty} \frac{1}{24} |\lambda_s A_s|. \quad (13^*)$$

Следовательно, остаточный член при заданном значении  $t$  может быть сделан произвольно малым, если выбирается достаточно большое  $p$ . Итак, ряд, входящий в выражение для  $x$ , абсолютно сходится, хотя значение остаточного члена при известных условиях может зависеть от  $t$ . Однако не обязательно, чтобы это было так. А именно, если ряд

$$\sum \left| \frac{A_s}{\lambda_s^3} \right| \quad (14)$$

сходится, что, как было доказано в предыдущем параграфе, имеет место при определенных значениях  $v$ , то  $R'_p$  не зависит от  $t$ . Неравенство (13\*) справедливо в любом случае, будет ли ряд (14) сходиться или нет.

Второй член в формуле (13\*), вообще говоря, исчезающе мал, так как здесь главным образом встречаются такие члены, для которых величины  $\lambda_s$  принимают весьма малые значения. Если ряд (13) оборвать на определенном члене, как это бывает на практике, то остающаяся ошибка возрастает пропорционально квадрату интервала времени.

Интеграл уравнения

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cos(\lambda_s t + G_s)$$

согласно (2) имеет форму

$$E = E_0 + \sum \frac{A_s}{\lambda_s} [\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s)] + C(t - t_0)$$

и является аналитической функцией различных  $\lambda_s$ , которая может быть разложена в окрестности  $\lambda_s = 0$  по положительным степеням  $\lambda_s$ . Отсюда следует, что  $E$  является также аналитической функцией отношения  $n'$  к  $n$ .

Этот интеграл в общем случае запишется в виде

$$E = K + \sum \frac{A_s}{\lambda_s} \sin(\lambda_s t + G_s) + C(t - t_0),$$

где  $K$  обозначает постоянную интегрирования, и исследование сходимости

$$\sum \frac{A_s}{\lambda_s} \sin(\lambda_s t + G_s) \quad (15)$$

связано с рядом, который обладает замечательными свойствами, открытыми Брунсом. При этом мы обходим молчанием тот факт, что постоянная интегрирования  $K$  сама является функцией от  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ , которая обладает теми же особенностями, что и ряд (15), и что эти особенности взаимно уничтожаются. Аналогичное утверждение справедливо для интеграла дифференциального уравнения вида (10).

Неравномерная сходимость рядов в теории возмущений имеет своим практическим следствием то, что необходимо брать тем больше членов в рядах, чем больше промежутки времени, на котором эти ряды должны представлять координаты планет. Рано или поздно остаточные члены в рядах (5) и (13) становятся заметными, и неравенства (6) и (13\*) дают сведения о том, какого рода отклонения должны быть между теорией и наблюдениями. Отбрасываемые в (5) члены влияют так, как если бы не был учтен член, пропорциональный времени, в то время как в (13) ошибка растет пропорционально второй степени интервала времени.

Если обратиться к возмущениям элементов, то из этого утверждения следует, что при вычислении возмущений нужно ожидать следующие различия между теорией и наблюдениями.

В большой полуоси, эксцентриситете, наклонности, долготе перигелия и долготе узла будут возникать ошибки, возрастающие пропорционально времени. Эти ошибки оказываются такими, как будто вековые члены были неправильно получены из теории.

В средней долготе различие между теорией и наблюдениями может возрастать пропорционально второй степени. Эта ошибка действует так же, как и вековое изменение среднего движения.

В истории астрономии нет недостатка в такого рода примерах соотношения между наблюдениями и вычислениями. Наиболее знаменитым примером такого рода является открытое Галлеем в 1693 г. вековое ускорение в долготе Луны, которое, по оценке Галлея, составляет  $10''{,}2$ , так что для получения совпадения с наблюдениями необходимо было добавить к получающейся по теории долготы Луны член  $10''{,}2 t^2$ .

Этот член имеет именно ту форму, которую следовало бы ожидать, если бы это различие объяснялось отбрасываемыми в теории членами. И действительно, в 1786 г. Лапласу удалось обнаружить неучтенный в теории член, который удовлетворительным образом объясняет неравенство Галлея.

Но было бы неправильным делать отсюда вывод, что все различия между теорией и наблюдениями, которые растут пропорционально времени, можно устранить при помощи более точных вычислений. Если бы мы допустили такое заключение, это привело бы к крайне опасной неуверенности, касающейся всех отклонений от теории. Между тем неравенство (6) позволяет

получить доверительные границы, давая максимальную оценку ошибке, которая не может быть превзойдена.

Коэффициенты  $A_s$  известны из разложения возмущающей функции, и для ряда  $\sum_p^{\infty} A_s$  можно всегда получить приближенное значение. Если наблюдаемое различие превосходит эту оценку, то объяснение следует искать вне исследуемой системы точек.

Между тем нельзя упускать из виду, что при этом должны быть найдены приближенные значения членов, зависящих от высших степеней масс, и для получения таких значений нет никаких непреодолимых препятствий.

## О ФОРМЕ ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

### § 1. Канонические преобразования

Якоби доказал следующую теорему [76].

Пусть производные переменных величин  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$  задаются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_m}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_m}, & \frac{dy_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_m} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и пусть, далее,

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_m; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

— произвольная функция  $m$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и  $m$  новых величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  (\*). Определяя эти новые величины и  $m$  других величин  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  через  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$  при помощи уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= y_1, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= y_2, \dots, & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} &= y_m, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} &= -\eta_1, & \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} &= -\eta_2, \dots, & \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} &= -\eta_m \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и выражая  $H$  через  $t$  и новые величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , для этих новых элементов получим совершенно аналогичные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_1}, & \frac{d\eta_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_2}, & \frac{d\eta_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\xi_m}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_m}, & \frac{d\eta_m}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_m}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

\*) В аналитической механике эта функция называется производящей. (Прим. перев.)

Эту теорему, которая в общем случае определяет преобразование одной системы канонических переменных в другую, мы обобщим в двух различных направлениях.

Во-первых, необходимо обобщить теорему, поскольку в теореме о преобразованиях Якоби предполагается, что функция  $\psi$ , которая определяет преобразование от одной канонической системы элементов к другой, не зависит от времени. Это предположение можно отбросить и показать, что имеет место следующая теорема о преобразованиях.

**Теорема I.** Пусть переменные величины  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$  определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

где  $H$  обозначает произвольную функцию величин  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$  и  $t$ ; пусть, далее,

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_m; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; t)$$

произвольная функция  $m$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ;  $m$  новых величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  и времени. Если выразить эти новые величины и  $m$  других новых величин  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  через  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$  и  $t$  при помощи уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = -\eta_i \quad (5^*)$$

и выразить  $H$  через  $t$  и эти новые переменные  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , то новые элементы определятся дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6)$$

где

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (7)$$

Если  $\psi$  не зависит от  $t$ , то, очевидно, приходим к теореме Якоби.

Доказательство выполняется без каких-либо искусственных приемов посредством замены  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) в  $H$  на  $\xi_i$  и  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) при помощи уравнений (5) и (5\*). Мы приводим его ниже.

Если разрешить уравнения (5) и (5\*) относительно  $x_i$  и  $y_i$ , то получим

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m), \\y_i &= y_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \\(i &= 1, 2, \dots, m).\end{aligned}$$

Если эти значения подставить в  $H$ , то  $H$  станет функцией  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  и  $t$ . Дифференцируя эту функцию затем по  $\eta_k$  и рассматривая  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  и  $t$  как постоянные, получим

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}$$

или согласно (4)

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = - \sum_i \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}.$$

Но из (5) следует

$$\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k},$$

так что

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = - \sum_i \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} + \sum_i \sum_j \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k}$$

или, если в первой сумме индекс  $i$  заменить на  $j$ , а в двойной сумме изменить порядок суммирования, то

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \left[ - \frac{dy_j}{dt} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right].$$

Если продифференцировать уравнение (5)

$$y_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

по времени, то получим

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t},$$

так что

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = - \sum_j \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} - \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t}.$$

Коэффициент при  $\frac{d\xi_i}{dt}$  равен

$$- \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_i}.$$

Но теперь согласно (5\*)

$$- \eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}.$$

Если это уравнение продифференцировать по  $\eta_k$ , то получим

$$\sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} = 0 \quad (i \neq k),$$

в то время как

$$\sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} = -1;$$

следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \frac{d\xi_k}{dt} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k}.$$

Если положить

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

то

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

что и доказывает справедливость первого из уравнений (6). Чтобы получить соответствующее уравнение для  $\frac{d\eta_k}{dt}$ , поступим аналогичным образом. Сначала получим

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_k} = - \sum_i \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_k}.$$

Из уравнения (5)

$$y_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_k} &= \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_k}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t}, \end{aligned}$$

которые после подстановки в выражение для  $\frac{\partial H_k}{\partial \xi_k}$  дают

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = - \sum_i \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_j} \frac{d \xi_j}{dt} - \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} + \sum_i \frac{d x_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \xi_k}.$$

Двойная сумма может быть преобразована в простую сумму, если заметить, что из уравнения (5\*)

$$- \eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

посредством дифференцирования по  $\xi_k$  можно получить уравнение

$$\sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{d \xi_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{d x_j}{dt} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}.$$

Но, с другой стороны, в соответствии с (5\*),

$$\sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial x_j} \frac{d x_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \frac{d \xi_j}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial t} = - \frac{d \eta_k}{dt},$$

так что

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_k} = - \frac{d \eta_k}{dt} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial t} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}.$$

Но теперь

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)}{\partial \xi_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \xi_k}.$$

Следовательно,

$$\frac{d \eta_k}{dt} = - \frac{\partial \left( H + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)}{\partial \xi_k},$$

что и доказывает вторую часть теоремы о преобразованиях.

Если предположить, например, что уравнения движения (4) для так называемой промежуточной орбиты с характеристической функцией  $H_1$  могут быть проинтегрированы, то согласно методу Гамильтона — Якоби сначала необходимо рассмотреть дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_1 \left( x_1, x_2, \dots, x_m; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_m}; t \right). \quad (8)$$

Если

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; t),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  обозначают постоянные интегрирования, является полным интегралом уравнения (8), то, как известно, величины  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и  $y_1, y_2, \dots, y_m$  получаются из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Но если эти уравнения сравнить с уравнениями (5) и (5\*), то в соответствии с теоремой I находим, что система (4) может быть заменена уравнениями

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (9)$$

где теперь

$$R = H + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Но согласно (8)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -H_1,$$

так что

$$R = H - H_1.$$

А это совпадает с обычной теорией вариации произвольных постоянных.

Постоянные  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , которые получаются при интегрировании уравнения (8), в общем случае непригодны для использования в качестве новых переменных в задачах динамики. В задаче трех тел, например, в уравнении (8) содержится в правой части умноженный на время член, который создает при интегрировании значительные и ненужные трудности. Для кеплеровской эллиптической промежуточной орбиты давно уже известен метод, как можно введением новых переменных преодолеть эти трудности (см. § 5 гл. V). Для других промежуточных орбит необходимо вводить другие преобразования, но до сих пор нет общей теории отыскания таких преобразований.

Ниже мы рассмотрим достаточно общий случай, в котором можно непосредственно указать искомое преобразование.

Предположим, что характеристическая функция  $H_1$  для промежуточной орбиты не содержит время  $t$  явно. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_1(x_1, x_2, \dots, x_m; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_m}) = 0 \quad (10)$$

имеет интеграл

$$V = -Ct + W,$$

где  $W$  не зависит от времени  $t$ . Предположим далее, что найден интеграл

$$W = W(x_1, x_2, \dots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

дифференциального уравнения

$$H_1\left(x_1, x_2, \dots, x_m; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_m}\right) = C, \quad (10^*)$$

который содержит  $m$  независимых постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Постоянная  $C$  может совпадать с одной из этих постоянных интегрирования. В общем случае это места не имеет, и тогда согласно (10\*)  $C$  является известной функцией от  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ :

$$C = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

Координаты  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) промежуточной орбиты определяются уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} t - \beta_i.$$

Но согласно теореме Якоби эти уравнения показывают, что

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

и

$$-\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1, \quad -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2, \dots, \quad -\frac{\partial C}{\partial \alpha_m} t + \beta_m$$

суть сопряженные канонические переменные, значит, исходную систему (4) можно заменить уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_i}, \\ \frac{dw_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где

$$w_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} t + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Если только найдена система  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  постоянных интегрирования, то другие системы постоянных интегрирования можно найти бесчисленным множеством способов. Каждой системе

величин  $\alpha_i$  соответствует определенная система величин  $w_i$ . Речь идет о том, чтобы сделать наиболее выгодным выбор величин  $\alpha_i$ .

Из многих промежуточных орбит, встречающихся в проблемах механики, мы рассмотрим здесь такие, в которых координаты являются условно-периодическими функциями времени. При помощи линейного преобразования аргумента [ср. (21) § 3 гл. II] можно добиться, чтобы периоды относительно различных угловых переменных были равны  $2\pi$ . Мы обозначим эти аргументы через  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , так что

$$\eta_i = n_i t + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

и координаты для промежуточной орбиты будут периодическими функциями  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  с периодом  $2\pi$ . Если теперь выбрать постоянные интегрирования  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  таким образом, чтобы

$$n_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i},$$

и обозначить эти особые координаты через  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , так что теперь

$$n_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i},$$

то будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\eta_i,$$

и, следовательно,  $\xi_i, \eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) суть сопряженные канонические переменные.

Как же отыскивать эти постоянные  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ? Сначала предположим, что для промежуточной орбиты в характеристической функции  $H_1$  величины  $y_1, y_2, \dots, y_m$  находят только через квадратичную форму, и что интегрирование уравнения

$$H_1 \left( x_1, x_2, \dots, x_m; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_m} \right) = C \quad (10^*)$$

может быть выполнено разделением переменных. Тогда по теореме Штеккеля интеграл уравнения (10\*) примет вид

$$W = \sum_{x=1}^m \int \sqrt{2\psi_x(x_x) + \sum_{\lambda=1}^m 2\alpha_\lambda \varphi_{x\lambda}(x_x)} dx_x. \quad (11)$$

Здесь  $\psi_x(x_x)$  и  $\varphi_{x\lambda}(x_x)$  обозначают определенные заданные функции от  $x_x$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  суть постоянные интегрирования, из которых  $\alpha_1$  совпадает в (10\*) с постоянной  $C$ . Поэтому интегралы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}$$





$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  по  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  согласно (16) равен

$$\pi^{-m} |\omega_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

и этот определитель, по предположению, не обращается в нуль, то величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  образуют независимую систему постоянных интегрирования. Таким образом, приходим к следующей теореме:

**Теорема II.** Пусть переменные величины  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$  заданы уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (17)$$

и пусть, далее, промежуточная орбита определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $H_1$  — квадратичная форма величин  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Если дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы при помощи изложенных в § 1 гл. II методов, то координаты промежуточной орбиты оказываются периодическими с периодом  $2\pi$  функциями  $m$  аргументов

$$\eta_i = n_i t + c_i = -\frac{\partial C}{\partial \xi_i} t + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $\xi_i$  в обозначениях цитируемого параграфа определяются равенством

$$\xi_i = \frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2\psi_i(x_i) + \sum_{j=1}^m 2\alpha_j \varphi_{ij}(x_i)} dx_i.$$

Если затем  $H$  выразить через  $t$  и новые величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , то эти новые элементы определяются при помощи уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_i} \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Для разъяснения этой теоремы рассмотрим доказательство для одной степени свободы. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

где

$$H = \frac{1}{2} y^2 - U(x).$$

Тогда дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 = U + \alpha,$$

так что

$$W = \int \sqrt{2(U + \alpha)} dx.$$

Имеем, следовательно,

$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(U + \alpha)}}.$$

Из этого выражения следует, что время  $T$  изменения величины  $x$  от минимального значения  $x_1$  до максимального значения  $x_2$  определяется формулой

$$T = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2(U + \alpha)}}.$$

Если положить

$$\xi = \frac{1}{\pi} \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{2(U + \alpha)} dx,$$

то

$$T = \pi \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}.$$

Величина  $x$  является периодической функцией  $t$  с периодом  $2T$ , или, иначе говоря, периодической функцией от  $nt + c$  с периодом  $2\pi$ , если положено  $n = \frac{\pi}{T}$ . Итак, согласно приведенному выражению для  $T$  имеем

$$n = \frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi},$$

что и доказывает теорему для случая одной степени свободы.

Если промежуточной орбитой является кеплеров эллипс, то применение теоремы II выполняется следующим образом.

В силу (14) § 1 гл. II, (2) и (3) § 2 гл. IV и (8) § 8 гл. IV имеем здесь:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}} dr, \\ \xi_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-i}^{+i} \sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2 \varphi}} d\varphi, \\ \xi_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{2\alpha_3} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= n(t + H_1), \\ \eta_2 &= n(t + H_1) + H_2, \\ \eta_3 &= n(t + H_1) + H_2 + H_3, \end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

где постоянные интегрирования  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; H_1, H_2, H_3$  связаны с обычными кеплеровскими элементами следующим образом. Имеем

$$2\alpha_1 = -\frac{\mu}{a}, \quad 2\alpha_2 = \mu a(1 - e^2), \quad 2\alpha_3 = \mu a(1 - e^2) \cos^2 i$$

и

$$H_1 = -t_\pi, \quad H_2 = \pi - \Omega, \quad H_3 = \Omega.$$

В § 5 гл. V мы ввели в качестве переменных элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $H_1, H_2, H_3$  для представления координат в задаче трех тел. Вместо них мы будем использовать здесь  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ . Из теоремы II известно, что если какие-либо величины  $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$  определяются уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

и если при помощи обычных формул эллиптического движения выразить  $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$  через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$ , то последние будут определяться уравнениями, которые полностью заменяют уравнения (19):

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Найдем выражения для  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  через эллиптические элементы. Границы  $r_2$  и  $r_1$ , между которыми колеблется  $r$ , будучи

выраженными через эллиптические элементы, суть  $a(1 - e)$  и  $a(1 + e)$ . Так как

$$\xi_1 = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \sqrt{-2\alpha_1(r_1 - r)(r - r_2)} \frac{dr}{r},$$

то при помощи подстановки

$$r = a(1 - e \cos w)$$

и принимая во внимание значение для  $\alpha_1$ , получим

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{\mu a}}{\pi} \int_0^\pi \left[ -\frac{1 - e^2}{1 - e \cos w} + 1 + e \cos w \right] dw$$

или, согласно известной формуле,

$$\xi_1 = \sqrt{\mu a} (1 - \sqrt{1 - e^2}). \quad (20)$$

В формуле для  $\xi_2$

$$\xi_2 = \frac{\sqrt{2\alpha_2}}{\pi} \int_{-i}^{+i} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}} d\varphi$$

выполним подстановку

$$\sin \varphi = \sin i \cdot \sin u$$

и тогда получим после простых преобразований

$$\xi_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} (1 - \cos i). \quad (20^*)$$

Имеем, наконец,

$$\xi_3 = \sqrt{2\alpha_3} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i. \quad (20^{**})$$

Элементы  $\xi_i$  и  $\eta_i$  не совпадают с элементами Делоне, которые мы ввели в § 5 гл. V. Однако можно при помощи линейной подстановки перейти от одной системы элементов к другой. Условия для такого преобразования легко выводятся из теоремы о преобразованиях Якоби. Если положить

$$\begin{aligned} \psi = & (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1m}\xi_m)\eta'_1 + \\ & + (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2m}\xi_m)\eta'_2 + \dots + \\ & + (a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \dots + a_{mm}\xi_m)\eta'_m, \end{aligned}$$



при котором соответствующие канонические угловые переменные определяются следующими формулами:

$$\eta_1 = \ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2,$$

$$\eta_2 = \ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_3,$$

$$\eta_3 = \ddot{\eta}_1,$$

или

$$\ddot{\eta}_1 = \ddot{\eta}_3 = n(t + H_1) + \pi,$$

$$\ddot{\eta}_2 = \ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_3 = -\pi,$$

$$\ddot{\eta}_3 = \ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_3 = \Omega.$$

Если соотношения (20), (20\*) и (20\*\*) разрешить относительно  $\alpha_1$ , то получим

$$\alpha_1 = -\frac{\mu^2}{2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2},$$

откуда находим

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_3} = \frac{\mu^2}{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^3} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Элементы  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  имеют одно и то же среднее движение  $n$ , что очевидно из выражений (18\*).

В некоторых проблемах в качестве промежуточной орбиты можно использовать ту орбиту, которую опишет тело нулевой массы, притягиваемое двумя неподвижными центрами по закону Ньютона.

В третьей главе мы подробно рассмотрели формы орбит в этой задаче. Здесь получается

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{2[(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha]} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \sqrt{2[(K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha]} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $a_1$  и  $b_1$  суть границы, между которыми колеблется величина  $\lambda$ , в то время как  $a_2$  и  $b_2$  — соответствующие границы для  $\mu$ .

Угловые величины  $\eta_1$  и  $\eta_2$  даются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \pi(t + \beta_1) &= \omega_{11}\eta_1 + \omega_{21}\eta_2, \\ \pi\beta_2 &= \omega_{12}\eta_1 + \omega_{22}\eta_2, \end{aligned} \right\} \quad (21^*)$$

где имеем

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}, & \omega_{21} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta}, \\ \omega_{12} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}, & \omega_{22} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

В ограниченной круговой задаче трех тел пригодна для использования во многих случаях только что рассмотренная промежуточная орбита. Мы хотим подойти к проблеме с этой точки зрения. По § 2 гл. IX дифференциальные уравнения принимают вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

где

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + n (p_1 q_2 - p_2 q_1) - U. \quad (22)$$

Здесь  $q_1$  и  $q_2$  обозначают прямоугольные координаты тела нулевой массы в подвижной системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $n$ . Величина  $n$  совпадает с угловой скоростью кругового движения  $m_1$  и  $m_2$  вокруг общего центра масс.

Начало координат здесь находится в центре масс  $m_1$  и  $m_2$ . Чтобы получить полную аналогию с проблемой двух центров, поместим начало координат в середине отрезка  $m_1 m_2$ . С этой целью положим

$$x_1 = q_1 + \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}, \quad x_2 = q_2, \quad y_1 = p_1, \quad y_2 = p_2.$$

Очевидно, что новые координаты  $x_1, x_2, y_1, y_2$  также канонические, так что имеем

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \quad (23)$$

Здесь

$$H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + n (y_1 x_2 - y_2 x_1) + \frac{n(1-\mu)}{2(1+\mu)} y_2 - U$$

и

$$U = \frac{1}{\sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2}}.$$

Определим теперь промежуточную орбиту характеристической функцией

$$H_1 = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) - U. \quad (24)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения будут

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \quad (25)$$

Это — дифференциальные уравнения движения тела нулевой массы, которое притягивается двумя неподвижными центрами. Координаты этой орбиты  $x_1, x_2, y_1, y_2$  суть условно-периодические функции времени, которые могут быть разложены в ряды по аргументам, кратным  $\eta_1$  и  $\eta_2$  (21\*). Коэффициенты этих рядов могут быть выражены как функции величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . После того как  $x_1, x_2, y_1, y_2$  этим путем найдены как функции от  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ , подставим эти выражения в  $H$  и определим изменение величин  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  согласно теореме о преобразованиях Якоби при помощи уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2). \quad (26)$$

Здесь следует заметить, что величина  $H_1$  после подстановки выражений для  $x_1, x_2, y_1, y_2$  через  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  сводится к функции от  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , так как уравнения (25) обладают интегралом  $H_1 = \text{const}$ . Если обозначить эту постоянную через  $C_1$ , то получим

$$H = C_1 + n(y_1x_2 - y_2x_1) + \frac{n(1-\mu)}{2(1+\mu)}y_2. \quad (27)$$

Таким образом, для возмущающей функции будем иметь простое выражение, если исходить из задачи двух центров, и после этого варьировать произвольные постоянные этой задачи.

Постоянная  $C_1$  является функцией только  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Остальные члены в (27) суть периодические функции от  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , которые легко вычисляются после того как  $x_1, x_2, y_1, y_2$  выражаются через  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ . Таким образом, возмущающую функцию очень легко получить, после того как координаты задачи двух центров представлены в функциях времени, что необходимо для различных исследований и что до сих пор не было сделано\*). Весьма замечательно то, что при использовании этой промежуточной орбиты в пертурбационную функцию не входит величина, обратная расстоянию между возмущающим и возмущаемым телами. Отсюда следует, что задача двух неподвижных центров должна иметь тесную внутреннюю связь с задачей трех тел.

Так как канонические дифференциальные уравнения не симметричны относительно обобщенных координат  $q$  и импульсов  $p$ , то теорема Якоби должна формулироваться в зависимости от того,

\* Идея Шарлье были использованы в работах Замтера [77] и переводчика этой книги [78]. (Прим. перев.)

какие из переменных будут входить в производящую функцию. Ради полноты приведем формулы, относящиеся к этому вопросу.

Обозначим прежние координаты через  $x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m$ , а новые — через  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , так что будем иметь

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (28)$$

а также

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}. \quad (29)$$

Можно различать четыре случая:

1. Производящая функция  $\psi$  зависит от  $x_1, x_2, \dots, x_m; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , так что

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_m; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Соотношения между прежними и новыми переменными будут

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = -\eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (30)$$

2. Если

$$\psi = \psi(y_1, y_2, \dots, y_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m),$$

то

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} = x_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_i} = -\xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

3. Если же

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_m; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m),$$

то эти соотношения имеют форму

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = y_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_i} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

4. Если, наконец,

$$\psi = \psi(y_1, y_2, \dots, y_m; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m),$$

то имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} = x_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Во многих случаях, когда характеристическая функция имеет другую форму, чем предполагается в теореме II, можно использовать методы, аналогичные приведенным. С таким случаем мы познакомимся ниже, при рассмотрении проблемы Делоне.

## § 2. Механическая задача с одной степенью свободы

В случае, когда две действительные величины  $x$  и  $y$  определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1)$$

мы исследовали в § 2 гл. II изменение переменных  $x$  и  $y$  в предположении, что  $H$  является квадратичной функцией от  $y$  вида

$$H = \frac{1}{2} y^2 - U(x).$$

Мы нашли, что  $x$  периодически колеблется между двумя неизменными границами, и что между этими границами  $x$  не имеет ни минимума, ни максимума. При определенных значениях постоянных интегрирования могут встретиться предельные движения.

Теперь мы откажемся от этого специального предположения относительно  $H$  и предположим только, что  $H$  внутри определенной действительной области  $G$  является рациональной функцией относительно  $x$  и  $y$ .

Уравнения (1) имеют интеграл

$$H(x, y) = C. \quad (2)$$

Это соотношение, которое всегда должно выполняться, представляет собой уравнение орбиты, зависящее только от одного параметра. Следует заметить, что не все значения  $x$  и  $y$ , принадлежащие кривой (2), действительно могут проходиться при движении. Вернее сказать, точка  $(x, y)$ , вообще говоря, описывает только часть кривой (2), и не обязательно, чтобы эта орбита являлась изолированной ветвью кривой (2).

Если рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (3)$$

где  $x$  и  $y$  принимают только действительные значения, и предполагать, что движение начинается из точки  $(x_0, y_0)$ , где  $\frac{\partial H}{\partial y}$ , например, положительно, то очевидно, что  $x$  при возрастающем  $t$  также должно возрастать до тех пор, пока не будет достигнута точка  $(a, b)$ , в которой

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Как же после этого будет изменяться величина  $x$ ? Чтобы исследовать этот вопрос, разложим функцию  $H$  в ряд по степеням

$x - a$  и  $x - b$ , что возможно, если, как здесь будет предполагаться, точка  $(a, b)$  лежит в области  $G$ .

Так как точка  $(a, b)$  обязательно должна лежать на кривой (2), то

$$H - C = A_{10}(x - a) + A_{01}(y - b) + A_{20}(x - a)^2 + \\ + A_{11}(x - a)(y - b) + A_{02}(y - b)^2 + \dots \quad (4)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A_{01} + A_{11}(x - a) + 2A_{02}(y - b) + \dots \quad (4^*)$$

По предположению, это выражение должно обращаться в нуль при  $x = a$  и  $y = b$ , поэтому  $A_{01} = 0$ . При помощи уравнения

$$H - C = A_{10}(x - a) + A_{20}(x - a)^2 + \\ + A_{11}(x - a)(y - b) + A_{02}(y - b)^2 + \dots = 0 \quad (4^{**})$$

значение  $y - b$  можно выразить в окрестности точки  $(a, b)$  через  $x - a$ . Если подставить это выражение в (4\*), то (3) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

после чего дифференциальные уравнения сводятся к квадратурам. Оказывается, что в зависимости от того, будет ли  $A_{10}$  отличным от нуля или нет, движения получаются совершенно разных типов. Рассмотрим сначала случай  $A_{10} \neq 0$ . Пусть в правой части (4\*\*)  $A_{0s}(y - b)^s$  — член низшего порядка относительно  $y - b$ , который не содержит множителем  $x - a$ . Тогда

$$A_{10}(x - a) + A_{0s}(y - b)^s + \sum A_{ij}(x - a)^i(y - b)^j = 0,$$

где в сумме все члены, для которых  $i = 0$ , имеют индекс  $j$ , больший  $s$ . Тогда в окрестности точки  $(a, b)$  получим разложение

$$x - a = (y - b)^s [\alpha_0 + \alpha_1(y - b) + \alpha_2(y - b)^2 + \dots]. \quad (5)$$

Здесь

$$\alpha_0 = -A_{0s} : A_{10}, \quad (6)$$

откуда следует, что  $\alpha_0$  конечно и не равно нулю.

Обращая этот ряд, получим

$$y - b = \beta_1(x - a)^{1/s} + \beta_2(x - a)^{2/s} + \beta_3(x - a)^{3/s} + \dots, \quad (7)$$

где  $\beta_1$  конечно и отлично от нуля.

Если это выражение для  $y - b$  подставить в (4\*), то получим

$$\frac{\partial H}{\partial y} = sA_{0s}(y - b)^{s-1} + \sum_j A_{ij}(x - a)^i (y - b)^{j-1},$$

где в сумме при  $i = 0, j > s$ .

Если сюда подставить ряд (7), то уравнение (3) приобретает вид

$$\frac{dx}{dt} = (x - a)^{\frac{s-1}{s}} \left[ \gamma_0 + \gamma_1 (x - a)^{\frac{1}{s}} + \gamma_2 (x - a)^{\frac{2}{s}} + \dots \right]$$

или

$$\frac{dx}{(x - a)^{\frac{s-1}{s}}} [1 + \delta_1 (x - a)^{1/s} + \delta_2 (x - a)^{2/s} + \dots] = \gamma_0 dt,$$

где  $\gamma_0$  конечно и отлично от нуля.

Интеграл этого уравнения выразится следующим образом:

$$s(x - a)^{1/s} \left[ 1 + \frac{\delta_1}{2} (x - a)^{1/s} + \frac{\delta_2}{3} (x - a)^{2/s} + \dots \right] = \gamma_0 (t - t_0),$$

где  $t_0$  — то значение  $t$ , при котором  $x = a$ . Наконец, обращая этот ряд, получим

$$x - a = (t - t_0)^s [\varepsilon_0 + \varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2 (t - t_0)^2 + \dots], \quad (8)$$

где  $\varepsilon_0$  конечно и не равно нулю.

Если  $s$  — четное число, то  $x$  возрастает до значения  $x = a$ , затем  $x$  начинает уменьшаться и уменьшается до тех пор, пока вновь не достигнет точки  $(a', b')$ , в которой  $\frac{\partial H}{\partial y}$  равно нулю. Здесь снова нужно выполнить исследование, аналогичное тому, которое делалось в точке  $(a, b)$ .

Если же  $s$  — нечетное число, то  $x$  проходит через точку  $a$  и при  $t = t_0$  переходит к значениям, превышающим  $a$ . Величина  $x$  возрастает далее до тех пор, пока не придет в новую точку  $(a'', b'')$ , в которой  $\frac{\partial H}{\partial y}$  обращается в нуль; затем необходимо сделать исследование, аналогичное тому, которое делалось в точке  $(a, b)$ . Приведенные рассуждения неприменимы при бесконечно больших  $s$ . В этом случае  $H - C$  имеет множителем  $x - a$  и орбита имеет изолированную ветвь, а именно, прямую  $x = a$ .

Перейдем теперь ко второму случаю, в котором коэффициент  $A_{10}$  обращается в нуль. Тогда при  $x = a, y = b, \frac{\partial H}{\partial x} = 0$ , так что одновременно имеем

$$H - C = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Если два последних уравнения разрешить относительно  $x$  и  $y$  и подставить в первое уравнение, то найдем, что такие точки могут встретиться только при определенных значениях постоянной  $C$ . Поэтому указанные значения  $C$  можно рассматривать как особые точки данных дифференциальных уравнений. Отыскание этих особых точек выполняется при помощи уравнений (9).

Какой вид имеет движение в окрестности этих точек? Покажем, что при этих значениях постоянной  $C$  всегда будет иметь место случай предельных движений. Во время движения никогда нельзя перейти через точку  $(x, y)$ , определенную соотношениями (9).

В окрестности точки  $(a, b)$  имеем разложения

$$H - C = A_{20}(x - a)^2 + A_{11}(x - a)(y - b) + A_{02}(y - b)^2 + \\ + A_{30}(x - a)^3 + A_{21}(x - a)^2(y - b) + A_{12}(x - a)(y - b)^2 + \\ + A_{03}(y - b)^3 + \dots \quad (10)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = A_{11}(x - a) + 2A_{02}(y - b) + A_{21}(x - a)^2 + \\ + 2A_{12}(x - a)(y - b) + 3A_{03}(y - b)^2 + \dots \quad (11)$$

Необходимо представить правые части этих выражений в виде функций от  $x - a$ . С этой целью сначала предположим, что решение (10) имеет форму

$$y - b = \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + \alpha_3(x - a)^3 + \dots \quad (11^*)$$

Тогда из (10) получим следующие формулы для вычисления коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$A_{20} + A_{11}\alpha_1 + A_{02}\alpha_1^2 = 0,$$

$$(A_{11} + 2A_{02}\alpha_1)\alpha_2 = -A_{30} - A_{21}\alpha_1 - A_{12}\alpha_1^2 - A_{03}\alpha_1^3$$

и, вообще,

$$(A_{11} + 2A_{02}\alpha_1)\alpha_2 = \Phi_r \quad (r = 2, 3, 4, \dots),$$

где  $\Phi_r$  — известные функции от  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ .

Чтобы первое из этих уравнений давало для  $\alpha_1$  действительное значение, необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} \geq 0$ . Чтобы для  $\alpha_1$  получились конечные значения, кроме того, необходимо, чтобы коэффициенты  $A_{02}$  и  $A_{11}$  не обращались одновременно в нуль. Оба эти уравнения выполняются, если предполагать, что

$$A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} > 0. \quad (12)$$

Для получения конечных значений для  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$  необходимо,

чтобы  $A_{11} + 2A_{02}\alpha_1$  было отлично от нуля. Но

$$A_{11} + 2A_{02}\alpha_1 = \pm \sqrt{A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02}}$$

и, значит, для того чтобы получались действительные и конечные значения коэффициентов в ряде (11\*), достаточно выполнения неравенства (12).

Если теперь ряд (11\*) подставить в (11), то получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \dots,$$

где  $A_1 = A_{11} + 2A_{02}\alpha_1 = \sqrt{A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02}}$  и, следовательно, отлично от нуля. Отсюда находим

$$\frac{dx}{x-a} [B_1 + B_2(x-a) + B_3(x-a)^2 + \dots] = dt$$

и после интегрирования будем иметь уравнение

$$B_1 \ln(x-a) + B_2(x-a) + \frac{1}{2} B_3(x-a)^2 + \dots = t - t_0,$$

которое показывает, что  $x$  не может в конечное время  $t$  достигнуть значения  $a$ . Следовательно, здесь имеет место предельное движение.

Рассмотрим, во-первых, случай

$$A_{11}^2 - 4A_{20}A_{02} = 0. \quad (13)$$

Имеем

$$A_{20}(x-a)^2 + A_{11}(x-a)(y-b) + A_{02}(y-b)^2 = \\ = [\sqrt{A_{20}}(x-a) + \sqrt{A_{02}}(y-b)]^2.$$

Введем в этом случае вместо  $x-a$  новую переменную

$$\xi = \sqrt{A_{20}}(x-a) + \sqrt{A_{02}}(y-b).$$

Тогда получим при  $A_{20} \neq 0$

$$H - C = \xi^2 + B_{30}\xi^3 + B_{21}\xi^2(y-b) + B_{13}\xi(y-b)^2 + \\ + B_{03}(y-b)^3 + \dots = 0,$$

если только  $A_{20}$  и  $A_{02}$  оба не равны нулю, ибо в этом случае такая подстановка непригодна.

Предположим, что  $(x-a)^p$  — низшая степень  $x-a$ , входящая в  $H$ , и равным образом  $(y-b)^q$  — низшая степень  $y-b$  в этом разложении. Рассмотрим многочлены некоторого класса

$$K = A(x-a)^p + \sum A_l(x-a)^{pl}(y-b)^{ql} + B(y-b)^q,$$

где должны выполняться неравенства

$$\left. \begin{aligned} p > p_1 > p_2 > \dots, \\ q_1 < q_2 < \dots < q. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Следует заметить, что как  $A$ , так и  $B$  могут быть равны нулю. Если положить

$$y - b = (x - a)^\mu, \quad (14^*)$$

то, так как все члены в  $K$  принадлежат к одному и тому же классу  $\mu$ , должно быть

$$p = p_1 + q_1\mu = p_2 + q_2\mu = \dots = q\mu \quad (15)$$

в предположении, что ни  $A$ , ни  $B$  не обращаются в нуль. Если бы выражение  $A(x - a)^p$  не принадлежало к этому классу, то первый член в (15) обращался бы в нуль; если бы не содержалось  $B(y - b)^q$ , то в нуль обращался бы последний член.

Так как

$$p_1 + q_1\mu = p_2 + q_2\mu,$$

то

$$\mu = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1},$$

так что  $\mu$  всегда положительно.

Произвольный член в  $K$

$$A_f (x - a)^{p_f} (y - b)^{q_f}$$

дает в  $\frac{\partial H}{\partial y}$  член

$$q_f A_f (x - a)^{p_f} (y - b)^{q_f - 1},$$

или, после подстановки (14\*) получим

$$q_f A_f (x - a)^{p_f + \mu(q_f - 1)}.$$

Итак, показатель произвольного члена в  $\frac{\partial H}{\partial y}$  всегда больше единицы. Может быть лишь единственное исключение, когда рассматриваемый класс содержит только члены

$$A(x - a)^p + B(y - b)^q.$$

Порядок последнего члена равен  $\mu q$ , и, следовательно, порядок соответствующего члена в  $\frac{\partial H}{\partial y}$  равен  $(q - 1)\mu$ . Но в этом случае

$\mu = \frac{p}{q}$ , и, таким образом,

$$(q - 1)\mu = p \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Вспомним, что здесь следует учитывать только такие члены  $p$  и  $q$ , которые больше или равны 2. Следовательно,

$$1 - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$$

и

$$p \left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq 1.$$

Порядок произвольного члена в  $\frac{\partial H}{\partial y}$  больше или равен единице. Значит, можно положить

$$\frac{dx}{dt} = a_1 (x-a)^{\lambda_1} + a_2 (x-a)^{\lambda_2} + a_3 (x-a)^{\lambda_3} + \dots,$$

где

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

и  $\lambda_1 \geq 1$ . В окрестности значения  $x = a$  дифференциальное уравнение для  $x$  можно записать в форме

$$dt = \frac{dx}{(x-a)^{\lambda_1}} [b_0 + b_1 (x-a)^{\mu_1} + b_2 (x-a)^{\mu_2} + \dots],$$

где  $\mu_1 < \mu_2 < \dots$  и  $\mu_1$  — положительно.

Интеграл примет вид

$$t + \text{const} = \frac{1}{(x-a)^{\lambda_1-1}} \left[ \frac{b_0}{1-\lambda_1} + \frac{b_1}{\mu_1+1-\lambda_1} (x-a)^{\mu_1} + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{\mu_2+1-\lambda_1} (x-a)^{\mu_2} + \dots \right]. \quad (16)$$

Если бы  $\lambda_1 = 1$ , то интеграл принял бы форму

$$t + \text{const} = b_0 \ln (x-a) + \frac{b_1}{\mu_1} (x-a)^{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} (x-a)^{\mu_2} + \dots \quad (16^*)$$

В обоих случаях обнаруживаем, что  $x$  не может принять значение  $a$  в конечный момент времени  $t$ . Значит, имеет место случай предельного движения.

В этом случае мы можем, *mutatis mutandis*, провести такие же рассуждения для дифференциального уравнения для  $y$ , так что одновременно должны иметь место либрационные движения как по  $x$ , так и по  $y$ .

Если функция  $H$  вместе со своими производными суть однозначные функции  $x$  и  $y$ , то орбита не может самопересекаться, если предполагать, что  $C$  не принимает особого значения. В самом деле,  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  полностью определены в каждой точке  $(x_0, y_0)$ .

Если, описав замкнутую кривую, возвращаемся к той же точке  $(x_0, y_0)$ , то снова возвратимся к старой кривой, и движение будет периодическим. Если бы орбита обладала двойной точкой, то для нее мы имели бы

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

и тогда постоянная  $C$  согласно (9) имела бы особое значение, что противоречит нашему предположению.

Следует заметить, что здесь предполагается, что канонические координаты  $x$  и  $y$  представляют собой декартовы координаты точки. При использовании других систем координат может, конечно, случиться, что возникнут двойные точки орбиты или иные особенности.

Приведенные рассуждения о движении с одной степенью свободы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Если  $x$  и  $y$  обозначают действительные переменные, которые определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (17)$$

допускающими интеграл

$$H(x, y) = C, \quad (17^*)$$

и если  $H$  является однозначной функцией  $x, y$ , которая может быть разложена в ряд в окрестности каждой точки  $(a, b)$  по положительным степеням  $x - a$  и  $y - b$ , то характер орбиты, описываемой точкой  $(x, y)$ , зависит от значений постоянной  $C$ ; такие значения  $C$ , которые получаются из (17\*), если  $x$  и  $y$  определить из уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

следует рассматривать как особые значения  $C$ ; если  $C$  имеет особое значение, то с возрастанием времени  $t$  точка  $(x, y)$  асимптотически приближается к граничной точке  $(\alpha, \beta)$ , не достигая ее за конечный промежуток времени; если  $C$  не принимает особого значения, то либо орбита является замкнутой кривой, которую точка описывает за конечный промежуток времени, либо величины  $x$  и  $y$  (одна или обе) с ростом  $t$  неограниченно возрастают или убывают.

### § 3. Разложение возмущающей функции в ограниченной круговой задаче трех тел

В § 13 гл. VIII мы получили дифференциальные уравнения пространственной круговой ограниченной задачи трех тел в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y'_i}, \\ \frac{dy'_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x'_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где

$$F = \frac{1}{2x_1^2} + Nx'_3 + \frac{\mu}{\Delta} - \mu (q_1 \cos Nt + q_2 \sin Nt)$$

и  $N$  обозначает среднее движение возмущающей планеты («Юпитера»). Остальные обозначения читатель может найти в соответствующих параграфах.

Возмущающая функция  $F$ , как было доказано в упомянутом месте, может быть разложена в ряд Фурье по косинусам дуг, кратных  $y'_1$ ,  $y'_2$  и  $y'_3$ . Коэффициенты в этом ряде суть функции  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Для получения коэффициентов в этом ряде мы воспользуемся разложением Леверье [44]. В обозначениях Леверье имеем

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= \lambda - \omega, \\ y'_2 &= \omega - \Omega, \\ y'_3 &= \Omega - l'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы учтем только члены до четвертой степени относительно эксцентриситета и до второй степени относительно наклонности.

Аргументы, которые встречаются здесь, выражаются через угловые переменные  $y'_1$ ,  $y'_2$  и  $y'_3$  следующим образом:

$$\begin{aligned} i(\lambda - l') &= i(y'_1 + y'_2 + y'_3), \\ (i-1)\lambda + \omega - il' &= i(y'_1 + y'_2 + y'_3) - y'_1, \\ (i-2)\lambda + 2\omega - il' &= i(y'_1 + y'_2 + y'_3) - 2y'_1, \\ (i-2)\lambda + 2\tau' - il' &= i(y'_1 + y'_2 + y'_3) - 2(y'_1 + y'_2), \\ (i-3)\lambda + 3\omega - il' &= i(y'_1 + y'_2 + y'_3) - 3y'_1, \\ (i-4)\lambda + 4\omega - il' &= i(y'_1 + y'_2 + y'_3) - 4y'_1. \end{aligned}$$

Мы введем несколько другие обозначения для коэффициентов Лапласа, чем в § 5 гл. VI, чтобы обеспечить совпадение с

обозначениями Леверье. А именно, положим

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A^{(i)}, \\ B_i &= B^{(i)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  определяются при помощи рядов (1) указанного параграфа. Так как  $\alpha' = 1$ , то имеем

$$\frac{1}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi]^{1/2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)} \cos i\varphi,$$

$$\frac{\alpha}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi]^{3/2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(i)} \cos i\varphi.$$

Следуя Леверье, положим

$$A_s^{(i)} = \frac{\alpha^s}{s!} \frac{d^s A^{(i)}}{d\alpha^s}. \quad (3^*)$$

Если записать

$$F = F_0 + F_1 + F_2,$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + Nx_3', \quad F_1 = \frac{\mu}{\Delta}, \quad F_2 = -\mu (q_1 \cos Nt + q_2 \sin Nt),$$

то получим  $F_2$ , если в разложении для  $R_{(0,1)} - R_1$  положим  $e' = 0$ ,  $\alpha' = 1$ .

Поэтому находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} F_2 &= \left( -\alpha + \frac{1}{2} \alpha e^2 + \alpha \eta^2 + \frac{\alpha}{64} e^4 \right) \cos (y_1' + y_2' + y_3') + \\ &+ \frac{3}{2} \alpha e \cos (y_1' + y_2' + y_3' - y_1') + \\ &+ \left( -\frac{1}{2} \alpha e + \frac{3}{8} \alpha e^3 \right) \cos (y_1' + y_2' + y_3' + y_1') - \\ &- \left( \frac{1}{8} \alpha e^2 + \frac{\alpha}{24} e^4 \right) \cos (y_1' + y_2' + y_3' - 2y_1') + \\ &+ \left( -\frac{3}{8} \alpha e^2 + \frac{3}{8} \alpha e^4 \right) \cos (y_1' + y_2' + y_3' + 2y_1') - \\ &- \alpha \eta^2 \cos [y_1' + y_2' + y_3' - 2(y_1' + y_2')] - \\ &- \frac{1}{24} \alpha e^3 \cos (y_1' + y_2' + y_3' - 3y_1') - \\ &- \frac{1}{3} \alpha e^3 \cos (y_1' + y_2' + y_3' + 3y_1') - \\ &- \frac{3}{128} \alpha e^4 \cos (y_1' + y_2' + y_3' - 4y_1') - \\ &- \frac{125}{384} \alpha e^4 \cos (y_1' + y_2' + y_3' + 4y_1'). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь положено

$$\eta^2 = \sin^2 \frac{J}{2},$$

где  $J$  обозначает наклонность орбиты астероида к плоскости орбиты Юпитера.

$F_1$  из разложений Леверье получим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} F_1 = & \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} A^{(i)} + (-2i^2 A^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)}) \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \right. \\ & + \left[ \frac{1}{8} (-9i^2 + 16i^4) A^{(i)} - i^2 A_1^{(i)} - 2i^2 A_2^{(i)} + 3A_3^{(i)} + 3A_4^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^4 \right] - \\ & - \frac{1}{4} (B^{(i-1)} + B^{(i+1)} \eta^2) \left. \right\} \cos i (y'_1 + y'_2 + y'_3) + \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (-2i A^{(i)} - A_1^{(i)}) \frac{e}{2} + \left[ (i - 5i^2 + 4i^3) A^{(i)} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} (3 - 7i + 4i^2) A_1^{(i)} + (-2 - 2i) A_2^{(i)} - 3A_3^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^3 \left. \right] \times \\ & \times \cos [i (y'_1 + y'_2 + y'_3) - y'_1] \left. \right\} + \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{2} (-5i + 4i^2) A^{(i)} + (-1 + 2i) A_1^{(i)} + A_2^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \right] + \right. \\ & + \left[ \frac{1}{3} (11i - 32i^2 + 30i^3 - 8i^4) A^{(i)} + \frac{1}{3} (8 - 23i + 24i^2 - 8i^3) A_1^{(i)} + \right. \\ & + (-4 + 3i) A_2^{(i)} + 4i A_3^{(i)} + 4A_4^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^4 \left. \right] \cos [i (y'_1 + y'_2 + y'_3) - 2y'_1] + \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} B^{(i-1)} \eta^2 \cos [i (y'_1 + y'_2 + y'_3) - 2(y'_1 + y'_2)] + \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{3} (-13i + 15i^2 - 4i^3) A^{(i)} + \frac{1}{2} (-3 + 9i - 4i^2) A_1^{(i)} + \right. \\ & + (2 - 2i) A_2^{(i)} - A_3^{(i)} \left. \right] \left(\frac{e}{2}\right)^3 \cos [i (y'_1 + y'_2 + y'_3) - 3y'_1] + \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{24} (-206i + 283i^2 - 120i^3 + 16i^4) A^{(i)} + \right. \\ & + \frac{1}{6} (-16 + 59i - 42i^2 + 8i^3) A_1^{(i)} + \frac{1}{2} (8 - 13i + 4i^2) A_2^{(i)} + \\ & + (-3 + 2i) A_3^{(i)} + A_4^{(i)} \left. \right] \left(\frac{e}{2}\right)^4 \cos [i (y'_1 + y'_2 + y'_3) - 4y'_1]. \quad (5) \end{aligned}$$

Мы не будем использовать разложение возмущающей функции в этой форме, а сначала выполним преобразование координат. Желательно вместо  $x_2$  и  $x_3$  ввести другие координаты, так чтобы возмущающую функцию можно было разложить по степеням этих координат. В § 1 гл. VI мы видели, как это достигается в неограниченной задаче трех тел.

Здесь достаточно положить

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1, & x_2 &= x'_1 - x'_2, & x_3 &= x'_2 - x'_3, \\ y_1 &= y'_1 + y'_2 + y'_3; & y_2 &= -y'_2 - y'_3, & y_3 &= -y'_3, \end{aligned} \right\} (6)$$

так что новые переменные будут выражаться через эллиптические элементы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a}, & y_1 &= l + \pi - Nt, \\ x_2 &= \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}), & y_2 &= -\pi + Nt, \\ x_3 &= \sqrt{a}(1 - e^2)(1 - \cos J), & y_3 &= -\Omega + Nt. \end{aligned} \right\} (6^*)$$

Тогда возмущающую функцию можно выразить в виде ряда по положительным степеням  $x_3$  и  $\sqrt{x_2}$ . Согласно приведенным зависимостям имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= \frac{2x_2}{\sqrt{a}} - \frac{x_2^2}{a}, \\ \eta^2 &= \frac{x_3}{2\sqrt{a}(1 - e^2)}, \end{aligned} \right\} (7)$$

которые необходимо подставить в разложение возмущающей функции.

Полагая

$$\varepsilon^2 = \frac{x_2}{2\sqrt{a}} = \frac{x_2}{2x_1} \quad (7^*)$$

и обрывая на четвертой степени  $\varepsilon$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{e}{2} &= \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^3, \\ \left(\frac{e}{2}\right)^2 &= \varepsilon^2 - \varepsilon^4, \\ \left(\frac{e}{2}\right)^3 &= \varepsilon^3, \\ \left(\frac{e}{2}\right)^4 &= \varepsilon^4. \end{aligned}$$

Если ограничиться случаем движения в плоскости (плоскости орбиты Юпитера), то разложение возмущающей функции можно

записать в следующей форме:

$$F = \mu \sum_{-\infty}^{+\infty} P_0^{(i)} \cos iy_1 + \mu \sum_{-\infty}^{+\infty} P_1^{(i)} \cos [iy_1 - (y_1 + y_2)] + \\ + \mu \sum_{-\infty}^{+\infty} P_2^{(i)} \cos [iy_1 - 2(y_1 + y_2)] + \dots$$

или, короче,

$$F = \mu \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=0}^{\infty} P_s^{(i)} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \quad (8)$$

где коэффициенты  $P_s^{(i)}$  зависят от  $x_2$  и  $x_1 (= \sqrt{a})$  следующим образом.

Для  $s = 0$  имеем:

$$P_0^{(i)} = \frac{1}{2} A^{(i)} + (-2i^2 A^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)}) \varepsilon^2 + \\ + \left[ \frac{1}{8} (7i^2 + 16i^4) A^{(i)} - (i^2 + 1) A_1^{(i)} - (2i^2 + 1) A_2^{(i)} + 3A_3^{(i)} + 3A_4^{(i)} \right] \varepsilon^4,$$

за исключением:

для  $i = 0$

$$\mu P_0^{(0)} = \frac{1}{2x_1^2} + N(x_1 - x_2) + \mu \left[ \frac{1}{2} A^{(0)} + (A_1^{(0)} + A_2^{(0)}) \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + (-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} + 3A_3^{(0)} + 3A_4^{(0)}) \varepsilon^4 \right],$$

для  $i = 1$  и  $i = -1$

$$P_0^{(-1)} = P_0^{(1)} = \frac{1}{2} A^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha + (\alpha - 2A^{(1)} + A_1^{(1)} + A_2^{(1)}) \varepsilon^2 + \\ + \left( -\frac{7}{8} \alpha + \frac{23}{8} A^{(1)} - 2A_1^{(1)} - 3A_2^{(1)} + 3A_3^{(1)} + 3A_4^{(1)} \right) \varepsilon^4.$$

Для  $s = 1$  имеем:

$$P_1^{(i)} = (-2iA_1^{(i)} - A_1^{(i)}) \varepsilon + \left[ (2i - 5i^3 + 4i^3) A^{(i)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (4 - 7i + 4i^3) A_1^{(i)} + (-2 - 2i) A_2^{(i)} - 3A_3^{(i)} \right] \varepsilon^3,$$

за исключением:

для  $i = +1$

$$P_1^{(1)} = (3\alpha - 2A^{(1)} - A_1^{(1)}) \varepsilon + \\ + \left( -\frac{3}{2} \alpha + A^{(1)} + \frac{1}{2} A_1^{(1)} - 4A_2^{(1)} - 3A_3^{(1)} \right) \varepsilon^3,$$

для  $i = -1$

$$P_1^{(-1)} = (-\alpha + 2A^{(1)} - A_1^{(1)})\varepsilon + \left(\frac{7}{2}\alpha - 11A^{(1)} + \frac{15}{2}A_1^{(1)} - 3A_3^{(1)}\right)\varepsilon^3.$$

Для  $s = 2$  имеем:

$$\begin{aligned} P_2^{(i)} = & \left[\frac{1}{2}(-5i + 4i^2)A^{(i)} + (-1 + 2i)A_1^{(i)} + A_2^{(i)}\right]\varepsilon^2 + \\ & + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{37}{2}i - 38i^2 + 30i^3 - 8i^4\right)A^{(i)} + \right. \\ & + \frac{1}{3}(11 - 29i + 24i^2 - 8i^3)A_1^{(i)} + \\ & \left. + (-5 + 3i)A_2^{(i)} + 4iA_3^{(i)} + 4A_4^{(i)}\right]\varepsilon^4, \end{aligned}$$

за исключением:

для  $i = +1$

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} = & \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}A^{(1)} + A_1^{(1)} + A_2^{(1)}\right)\varepsilon^2 + \\ & + \left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{5}{6}A^{(1)} - \frac{2}{3}A_1^{(1)} - 2A_2^{(1)} + 4A_3^{(1)} + 4A_4^{(1)}\right)\varepsilon^4, \end{aligned}$$

для  $i = -1$

$$\begin{aligned} P_2^{(-1)} = & \left(-\frac{3\alpha}{2} + \frac{9}{2}A^{(1)} - 3A_1^{(1)} + A_2^{(1)}\right)\varepsilon^2 + \\ & + \left(\frac{15\alpha}{2} - \frac{63}{2}A^{(1)} + 24A_1^{(1)} - 8A_2^{(1)} - 4A_3^{(1)} + 4A_4^{(1)}\right)\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Для  $s = 3$  имеем:

$$\begin{aligned} P_3^{(i)} = & \left[\frac{1}{3}(-13i + 15i^2 - 4i^3)A^{(i)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(-3 + 9i - 4i^2)A_1^{(i)} + (2 - 2i)A_2^{(i)} - A_3^{(i)}\right]\varepsilon^3, \end{aligned}$$

за исключением:

для  $i = +1$

$$P_3^{(1)} = \left(-\frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}A^{(1)} + A_1^{(1)} - A_3^{(1)}\right)\varepsilon^3,$$

для  $i = -1$

$$P_3^{(-1)} = \left(-\frac{8}{3}\alpha + \frac{32}{3}A^{(1)} - 8A_1^{(1)} + 4A_2^{(1)} - A_3^{(1)}\right)\varepsilon^3.$$

Для  $s = 4$  имеем:

$$P_4^{(i)} = \left[ \frac{1}{24} (-206i + 283i^2 - 120i^3 + 16i^4) A^{(i)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (-16 + 59i - 42i^2 + 8i^3) A_1^{(i)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (8 - 13i + 4i^2) A_2^{(i)} + (-3 + 2i) A_3^{(i)} + A_4^{(i)} \right] \varepsilon^4,$$

за исключением:

для  $i = +1$

$$P_4^{(1)} = \left[ -\frac{3\alpha}{8} - \frac{9}{8} A^{(1)} + \frac{3}{2} A_1^{(1)} - \frac{1}{2} A_2^{(1)} - A_3^{(1)} + A_4^{(1)} \right] \varepsilon^4,$$

для  $i = -1$

$$P_4^{(-1)} = \left[ -\frac{125}{24} \alpha + \frac{625}{24} A^{(1)} - \frac{125}{6} A_1^{(1)} + \frac{25}{2} A_2^{(1)} - 5A_3^{(1)} + A_4^{(1)} \right] \varepsilon^4.$$

Коэффициенты  $A_s^{(i)}$  зависят только от  $\alpha$ , т. е. от  $x_1 (= \sqrt{\alpha})$ .  
Имеем

$$\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial x_1} = 2x_1 \frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial \alpha}.$$

Но согласно определению (3\*)

$$\alpha \frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial \alpha} = sA_s^{(i)} + (s+1) A_{s+1}^{(i)},$$

так что

$$x_1 \frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial x_1} = 2sA_s^{(i)} + 2(s+1) A_{s+1}^{(i)}. \quad (9)$$

Если рассматривать возмущения до четвертых степеней, то величины  $A_s^{(i)}$  необходимо вычислять при  $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Величина  $\varepsilon$  зависит от  $x_1$  и  $x_2$ . Ее частные производные запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{2x_1x_2}} = \frac{1}{4x_1\varepsilon}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} &= -\frac{\varepsilon}{2x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Производная от  $\varepsilon$  по  $x_2$  содержит  $\varepsilon$  в знаменателе. Это при определенных обстоятельствах может вызвать трудности, если в проблеме Делоне учитывать члены первой степени. Эти трудности можно избежать, если ввести новые координаты подобно тому, как это было в § 1 гл. VI.

Относительно коэффициентов  $A_s^{(-i)}$  следует заметить, что

$$A_s^{(-i)} = A_s^{(i)}.$$

Мы не входим в методы вычисления этих величин. В своих исследованиях Леверье дал для этого обстоятельные правила, которые в некоторых отношениях могут быть упрощены. Желательно, в частности, ввести более совершенные методы контроля вычислений.

#### § 4. Проблема Делоне

В своей знаменитой «Théorie du mouvement de la lune» [26] Делоне ввел новый замечательный метод построения интеграла в задаче трех тел. Его сущность состоит во введении вместо кеплеровского эллипса новой промежуточной орбиты. При помощи вариации элементов этой промежуточной орбиты, или, правильнее, ряда таких орбит, Делоне добивается чисто тригонометрической формы для координат в задаче о движении Луны. В следующих параграфах мы возвратимся к этому вопросу, а здесь сначала мы займемся чисто математическим рассмотрением проблемы.

Пусть действительные величины  $x_1, x_2, y_1, y_2$  определяются при помощи дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $F$  имеет вид

$$F = \Phi + \sum A_i \cos iy_1. \quad (1^*)$$

В этом выражении  $\Phi, A_1, A_2, \dots$  суть данные функции от  $x_1, x_2$ , которые в каждой точке внутри определенной области могут быть разложены по положительным степеням  $x_1 - a$  и  $x_2 - b$ . Задачу об отыскании  $x_1, x_2, y_1, y_2$  как функций  $t$  мы назовем проблемой Делоне.

Так как  $F$  не зависит от  $y_2$ , то находим, что  $\frac{dx_2}{dt} = 0$ , так что

$$x_2 = \text{const.} \quad (2)$$

Задача фактически сводится к рассмотрению уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}. \quad (2^*)$$

Эту задачу мы можем решить методом, изложенным в предыдущем параграфе. Необходимо только учесть, что  $F$  содержит параметр  $x_2$ , так что вместо особых точек, которые мы должны рассмотреть, фактически получим особые кривые.

Наша первая задача — найти особую кривую. Ее можно получить при помощи теоремы предыдущего параграфа, если  $x_1$  и  $y_1$  исключить при помощи уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0, \quad (3)$$

подставив их выражения в уравнение

$$C = \Phi + \sum A_i \cos iy_1. \quad (3^*)$$

Не зная конкретной формы функций  $\Phi$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , ..., можно провести некоторое общее рассмотрение результата исключения. Второе уравнение (3) принимает вид

$$A_1 \sin y_1 + 2 A_2 \sin 2y_1 + 3 A_3 \sin 3y_1 + \dots = 0; \quad (4)$$

находим, что это уравнение имеет корни  $y_1 = 0$  и  $y_1 = \pi$ . Если существуют еще другие значения корней для  $y_1$ , то они должны удовлетворять уравнению, которое получим, если (4) разделим на  $\sin y_1$ .

Легко получаются следующие зависимости:

$$\frac{\sin 2iy}{\sin y} = 2 [\cos y + \cos 3y + \cos 5y + \dots + \cos (2i - 1)y],$$

$$\frac{\sin (2i - 1)y}{\sin y} = 1 + 2\cos 2y + 2\cos 4y + \dots + 2 \cos (2i - 2)y,$$

и, следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sum i A_i \frac{\sin iy_1}{\sin y_1} = & A_1 + 3A_3 + 5A_5 + 7A_7 + \dots + \\ & + 2(2A_2 + 4A_4 + 6A_6 + \dots) \cos y_1 + \\ & + 2(3A_3 + 5A_5 + 7A_7 + \dots) \cos 2y_1 + \\ & + 2(4A_4 + 6A_6 + \dots) \cos 3y_1 + \dots \quad (5) \end{aligned}$$

По этим формулам часто можно легко судить, могут ли существовать другие корни, отличные от 0 и  $\pi$ . Во многих случаях ряды коэффициентов  $A$  сходятся столь быстро, что первый член в (5) превышает сумму остальных и в этом случае, очевидно, никаких других корней существовать не может. Но если сходимость ряда (3\*) слабая, то, вообще говоря, могут встретиться и другие особые значения для  $y_1$ , отличные от 0 и  $\pi$ .

Рассмотрим более детально корни  $y_1 = 0$  и  $y_1 = \pi$ . Соответствующие значения для  $x_1$  и  $C$  получатся из следующих

уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 0, \\ C &= \Phi + A_1 + A_2 + A_3 + \dots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \pi, \\ C &= \Phi - A_1 + A_2 - A_3 + \dots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6^*)$$

Если из обоих уравнений (6) исключить  $x_1$ , то получим соотношение  $D_1(x_2, C) = 0$  между  $x_2$  и  $C$ . Это уравнение дает особую кривую, соответствующую  $y_1 = 0$ . Из (6\*) получаем аналогичным образом уравнение  $D_2(x, C) = 0$ . Результат исключения из функции и ее производной называется дискриминантом функции. Функции  $D_1$  и  $D_2$  суть дискриминанты характеристической функции  $F$  при  $y_1 = 0$  и  $y_1 = \pi$ . Они могут быть получены методами алгебры.

Рассмотрим, например, случай

$$\Phi = a_0 + a_2 x_1^2,$$

$$A_1 = b_1 x_1,$$

где  $a_0$ ,  $a_2$  и  $b_1$  суть функции от  $x_2$ , и предположим, что  $A_2 = A_3 = \dots = 0$ ; тогда уравнения для особых кривых запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} D_1(x_2, C) &= b_1^2 - 4(a_0 - C)a_2 = 0, \\ D_2(x_2, C) &= b_1^2 - 4(a_0 - C)a_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

так что в этом случае  $D_1$  и  $D_2$  совпадают.

Если

$$\Phi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2,$$

$$A_1 = b_1 x_1,$$

то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} D_1(x_2, C) &= (a_1 + b_1)^2 - 4(a_0 - C)a_2 = 0, \\ D_2(x_2, C) &= (a_1 - b_1)^2 - 4(a_0 - C)a_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

Обоим этим предположениям относительно  $F$  соответствуют два важных случая задачи трех тел.

Для возможных приложений запишем еще дискриминант в предположении, что  $F$  является многочленом четвертой степени

относительно  $x_1$ , т. е.

$$F = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4.$$

Тогда будем иметь

$$D = 4(12a_0 a_4 - 3a_1 a_3 + a_2^2)^2 - (72a_0 a_2 a_4 + 9a_1 a_2 a_3 - 27a_1^2 a_4 - 27a_0 a_3^2 - 2a_2^3)^2.$$

Если  $C$  и  $x_2$  лежат на особой кривой, то согласно предыдущему параграфу всегда будет иметь место предельное движение. Вообще кривые  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$  ограничивают различные области переменных  $C$  и  $x_2$ , внутри которых возникают характеризующие особенности движения. Так, например, в одной области величина  $y_1$  периодически колеблется между двумя конечными границами, в другой она неограниченно возрастает вместе с  $t$ . Особые кривые играют роль кривых разрыва непрерывности, а именно, при переходе через такие кривые аналитические выражения для координат переходят в другие формулы скачком.

Представление координат в проблеме Делоне как функций времени оказывается вообще достаточно простым при использовании дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби. В качестве обобщенных координат в зависимости от обстоятельств можно использовать либо  $y_1$  и  $y_2$ , либо  $x_1$  и  $x_2$ . В предыдущем случае необходимо рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} - F\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = 0. \quad (8)$$

Так как  $F$  не содержит  $t$  и  $y_2$ , то полный интеграл этого уравнения можно искать в следующей форме:

$$V = Ct + \alpha_2 y_2 + W(y_1), \quad (8^*)$$

где  $W(y_1)$  следует определять из уравнения

$$F\left(\frac{\partial W}{\partial y_1}, \alpha_2\right) = C. \quad (8^{**})$$

Если найден интеграл этого уравнения

$$W = W(y_1, \alpha_1, \alpha_2),$$

в котором  $\alpha_1$  — постоянная интегрирования, то координаты получатся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, & x_1 &= \frac{\partial W}{\partial y_1}, \\ \beta_2 &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + y_2 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, & x_2 &= \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из (1\*) и (8\*) очевидно, что  $\frac{\partial W}{\partial y_1}$  есть периодическая функция от  $y_1$  (если исключить особые значения постоянной  $C$ ) и что  $W$  имеет форму

$$W = B_0 y_1 + 2B_1 \sin y_1 + 2B_2 \sin 2y_1 + 2B_3 \sin 3y_1 + \dots$$

Здесь  $B_0$  обозначает определенную функцию от  $\alpha_2$  и  $C$ . Но так как выбор постоянной интегрирования  $\alpha_1$  произволен, то уравнения (9), если выбрать  $\alpha_1$  равной  $B_0$ , примут следующую простую форму:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 &= y_1 + 2 \sum \frac{\partial B_i}{\partial \alpha_1} \sin i y_1, \\ -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 &= y_2 + 2 \sum \frac{\partial B_i}{\partial \alpha_2} \sin i y_1, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + 2 \sum i B_i \cos i y_1, \\ x_2 &= \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (10^*)$$

Легко найти аналитическое выражение для коэффициентов  $B_i$ . В самом деле, имеем

$$i B_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x_1 \cos i y_1 dy_1, \quad (11)$$

где  $x_1$  следует подставить из уравнения

$$F(x_1, \alpha_2) = C.$$

При  $i = 0$  имеем соотношение

$$B_0 = \alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x_1 dy_1,$$

которое связывает  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $C$  друг с другом. Это полностью решает проблему Делоне по крайней мере для неособых значений  $C$ .

Если бы в качестве обобщенных координат использовались  $x_1$  и  $x_2$ , что в этой проблеме, вообще говоря, более предпочтительно, то решение образуется следующим образом. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + F(x_1, x_2; \frac{\partial V'}{\partial x_1}) = 0 \quad (12)$$

и, таким образом, можно положить

$$V = C't + \alpha_2' \varphi(x_2) + W',$$

где  $\varphi$  обозначает произвольную функцию от  $x_2$ , а  $W$  определяется

из уравнения

$$F(x_1, x_2, \frac{\partial W'}{\partial x_1}) = -C'. \quad (12^*)$$

Если принять  $\varphi(x_2) = x_2$ , то

$$V' = C't + \alpha'_2 x_2 + W'. \quad (12^{**})$$

Уравнение (12\*) в силу (1\*) имеет форму

$$\Phi(x_1, x_2) + \sum A_i \cos i \frac{\partial W'}{\partial x_1} = -C'. \quad (13)$$

Разрешая это уравнение относительно  $\frac{\partial W'}{\partial x_1}$ , будем иметь

$$\frac{\partial W'}{\partial x_1} = K(x_1, x_2, \alpha'_1), \quad (14)$$

где  $\alpha'_1$  обозначает пока неопределенную функцию от  $C$  и  $x_2$ .

Теперь интегралы уравнений (1) определятся из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_1 &= \frac{\partial V'}{\partial \alpha'_1} = \frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} t + \frac{\partial W'}{\partial \alpha'_1}, \\ \gamma'_2 &= \frac{\partial V'}{\partial \alpha'_2} = x_2, \\ y_1 &= \frac{\partial W'}{\partial x_1}, \\ y_2 &= \frac{\partial C'}{\partial x_2} t + \alpha'_2 + \frac{\partial W'}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (14^*)$$

Форму решения не так легко усмотреть, как в предыдущем случае. Впрочем, приведенные выше уравнения можно упростить. Сначала покажем, как можно выбрать величину  $\alpha'_1$  таким образом, чтобы средние движения обеих угловых величин  $y_1$  и  $y_2$  соответственно равнялись

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial C'}{\partial x_2}.$$

Из интеграла

$$\Phi + \sum A_i \cos i y_1 = -C'$$

очевидно, что  $x_1$  остается неизменным, если  $y_1$  увеличивается на  $2\pi$ . Следовательно, среднее движение  $y_1$  равно отношению  $2\pi$  к периоду  $x_1$ . Последний можно определить из уравнения

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} t + \gamma'_1 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha'_1}.$$

Если  $r_2$  представляет минимальное значение  $x_1$ , а  $r_1$  — максимальное, то из (14) имеем

$$W' = \int_{r_2}^{x_1} K dx_1,$$

так как мы имеем право произвольно выбрать один из пределов интегрирования. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha'_1} = \int_{r_2}^{x_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha'_1} dx_1,$$

если постоянную интегрирования  $\gamma'_1$  выбрать так, чтобы при  $x_1 = r_2$  было бы

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} t + \gamma'_1 = 0.$$

Обозначая через  $2T$  период  $x_1$ , очевидно, будем иметь

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} T = \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha'_1} dx_1. \quad (15)$$

Правую часть этого уравнения можно представить как частную производную определенной функции от  $\alpha'_1$  и  $x_2$ . Если временно положить

$$Q(\alpha'_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} K dx_1,$$

то

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha'_1} = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha'_1} dx_1 + \frac{1}{\pi} K_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha'_1} - \frac{1}{\pi} K_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial \alpha'_1}.$$

При сделанных предположениях последний член в этом выражении обращается в нуль, так как  $K_{r_2} = 0$ . С другой стороны,  $K_{r_1} = \pi$ , следовательно, имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha'_1} = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha'_1} dx_1 + \frac{\partial r_1}{\partial \alpha'_1},$$

и, равным образом,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial r_1}{\partial x_2}.$$

Если положить

$$Q_1 = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} K dx_1 - r_1, \quad (16)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'} &= \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_1'} dx_1, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} dx_1. \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

Таким образом, мы можем уравнение (15) записать в форме

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'} T = \pi \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'}. \quad (17)$$

Если среднее движение величины  $y_1$  обозначить через  $n_1$ , то

$$n_1 = \frac{\pi}{T},$$

и, значит, в силу (17)

$$n_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1'} = -\frac{\partial C'}{\partial \alpha_1'}. \quad (17^*)$$

Теперь найдем выражение для среднего движения  $n_2$  величины  $y_2$ . С этой целью мы сначала найдем в  $\frac{\partial W'}{\partial x_2}$  член, пропорциональный  $t$ .

Имеем

$$\frac{\partial W'}{\partial x_2} = \int_{r_2}^{x_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} dx_1 = \int_{t_0}^t \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{dx_1}{dt} dt,$$

где  $t_0$  обозначает момент  $t$ , для которого  $x_1 = r_2$ .

Теперь  $\frac{\partial K}{\partial x_2}$  является периодической функцией относительно  $n_1 t + c_1$ , причем через  $c_1$  обозначается определенная постоянная, так что для коэффициентов при  $t$  правой части указанного уравнения получим по теореме Фурье значение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{dx_1}{dt} d(n_1 t) = \frac{n_1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} dx_1 = n_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}.$$

Таким образом,

$$n_2 = \frac{\partial C'}{\partial x_2} + n_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}. \quad (18)$$

Формулы (17\*) и (18) справедливы всегда. В частности, эти величины получают простые значения, когда  $\alpha'_1$  совпадает с  $Q_1$ . Тогда имеем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha'_1} = 1, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} = 0$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= -\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1}, \\ n_2 &= \frac{\partial C'}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Если бы, наоборот,  $\alpha'_1$  совпадало с  $C'$ , то получили бы

$$\frac{1}{n_1} = -\frac{\partial Q_1}{\partial C'}; \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}.$$

Если допустить, что  $\alpha'$  совпадает с  $Q_1$ , то в таком случае получаются уравнения (19), и мы можем доказать, что  $\alpha'_1 = -\alpha_1$ .

В самом деле, имеем

$$\alpha'_1 = \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} K dx_1 - r_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x_1 dy_1.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x_1 dy_1 = \frac{1}{\pi} x_1 y_1 \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{r_2}^{r_1} y_1 dx_1,$$

и так как

$$(x_1)_{\pi} = r_1; \quad (y_1)_{\pi} = \pi; \quad (y_1)_0 = 0$$

и, кроме того, по (14\*)

$$y_1 = \frac{\partial W'}{\partial x_1} = K,$$

то получаем

$$\alpha'_1 = -\alpha_1. \quad (20)$$

Так как в силу (8\*\*) и (12\*) существует еще соотношение

$$C' = -C,$$

то имеем

$$n_1 = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1}, \quad n_2 = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2},$$

что совпадает с формулами (10).

Вычисление аналитических выражений для координат в проблеме Делоне становится очевидным в чисто математическом отношении. Если принять в качестве обобщенных координат  $y_1$  и  $y_2$ , то вычисления будут много проще, чем в том случае, когда используются переменные  $x_1$  и  $x_2$ . Последний выбор, как уже было сказано, следует предпочесть с практической точки зрения. Причиной этого является то, что в выражении (1\*) для  $F$  нужно брать, вообще говоря, только несколько членов ряда и чаще даже один член может давать хорошее приближение. Отсюда следует, что решение уравнения (8\*\*) относительно  $\frac{\partial W'}{\partial y_1}$  оказывается в общем случае намного сложнее, чем определение  $\frac{\partial W'}{\partial x_1}$  из уравнения (12\*). В то время как в последнем случае часто бывает достаточным разрешить уравнение первой или второй степени, в (8\*\*) для получения той же точности необходимо рассматривать уравнение по меньшей мере четвертой степени.

Дальнейший ход решения выполняется следующим образом: выберем  $\alpha'_1 = Q_1$  и из уравнения

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} t + \gamma'_1 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha'_1} \quad (21)$$

получим известным образом  $x_1$  как периодическую функцию от

$$-\frac{\partial C'}{\partial \alpha'_1} t + \gamma'_1.$$

Второе из уравнений (14\*) дает

$$x_2 = \gamma'_2 = \text{const.}$$

Третье и четвертое уравнения при применении (14) дают  $y_1$  и  $y_2$  как интегралы от известных функций  $x_1$ , которые могут быть разложены в ряды Фурье по кратным аргумента (21). Следовательно,  $y_1$  и  $y_2$  получим как функции времени.

В следующем параграфе мы будем иметь возможность рассмотреть это более подробно.

### § 5. О соизмеримостях низших порядков

Если средние движения двух планет  $n$  и  $n'$  почти соизмеримы, так что приближенно

$$n : n' = q : p,$$

где  $p$  и  $q$  обозначают взаимно простые целые числа, то, как мы видели в § 4 гл. VI, возмущения координат планет будут большими

и их изучение связано со значительными трудностями. Абсолютная величина разности  $q - p$  называется степенью соизмеримости. Если из возмущающей функции исключить член, который в возмущениях первого порядка имеет аргументом

$$(pn - qn')t + \text{const},$$

то приближенное изучение движения можно выполнять при помощи метода Делоне. Соответствующие исследования составят предмет этого и следующего параграфов.

Начнем с соизмеримостей низших порядков. Для большинства малых планет можно получить весьма хорошее знание орбиты на основе проблемы Делоне. Такое исследование имеет также большой теоретический интерес, так как оно дает представление о больших трудностях, которые необходимо преодолеть, чтобы получить общее решение задачи трех тел. Рассмотрение соизмеримостей высших порядков представляет немаловажный интерес для этого вопроса.

Чтобы уяснить сущность вопроса, мы ограничимся астероидной плоской задачей трех тел и из выражения для возмущающей функции [уравнение (8) § 3] выберем следующие члены:

1. Содержащиеся в  $F_0$  члены нулевого порядка относительно масс, выраженные через координаты  $x_1, x_2, y_1, y_2$  предыдущего параграфа:

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + N(x_1 - x_2). \quad (1)$$

2. Вековые члены, которые обозначим через  $[F]$ . В соответствии с выражением для  $P_0^{(0)}$  третьего параграфа имеем для них

$$[F] = \mu \left[ \frac{1}{2} A^{(0)} + (A_1^{(0)} + A_2^{(0)}) \varepsilon^2 + (-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} + 3A_3^{(0)} + 3A_4^{(0)}) \varepsilon^4 \right]. \quad (2)$$

3. Те члены в  $F$ , которые содержат аргумент  $g$  и его кратные, где  $g$  является линейной функцией от  $y_1$  и  $y_2$  с целочисленными коэффициентами. Запишем эти члены в форме

$$\sum G_i \cos ig,$$

где

$$g = s_1 y_1 - s_2 y_2$$

и  $G_1, G_2, G_3, \dots$  суть известные функции от  $x_1$  и  $x_2$ . Величины  $s_1$  и  $s_2$  обозначают произвольные целые числа.

Полагая

$$R = F_0 + [F] + \sum G_i \cos ig, \quad (3)$$

мы приходим к рассмотрению уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial y_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Эти уравнения имеют ту форму, которую мы предполагали в § 4 для проблемы Делоне, или по крайней мере могут быть приведены к этой форме при помощи линейного преобразования координат. Здесь можно непосредственно применить выполненные в указанном параграфе исследования.

Вместо выражения «соизмеримость степени  $|q - p|$ » говорят также «соизмеримость типа  $p : q$ ». Следует отметить, что соответствующий периодический член в  $F$  всегда имеет относительно эксцентриситетов и наклонов степень  $|q - p|$ . Для определенности предположим теперь, что речь идет о соизмеримости типа  $1/3$ . Соответствующий главный периодический член в (3) будет тогда иметь второй порядок относительно эксцентриситета. Для  $s = 2$  и  $i = 3$  из формулы (8) § 3 получаем

$$\begin{aligned} \mu P_2^{(3)} = G_1 = \mu & \left[ \left( \frac{21}{2} A^{(3)} + 5A_1^{(3)} + A_2^{(3)} \right) \varepsilon^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{83}{2} A^{(3)} - \frac{76}{3} A_1^{(3)} + 4A_2^{(3)} + 12A_3^{(3)} + 4A_4^{(3)} \right) \varepsilon^4 \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Далее, для  $s = 4$  и  $i = 6$  получим

$$\mu P_4^{(6)} = G_2 = \mu \left( 157 A^{(6)} + \frac{277}{3} A_1^{(6)} + 37A_2^{(6)} + 9A_3^{(6)} + A_4^{(6)} \right) \varepsilon^4. \quad (4^*)$$

Для аргумента  $g$  получим значение

$$g = 3y_1 - 2(y_1 + y_2) = y_1 - 2y_2 \quad (5)$$

или по формулам (6\*) § 3

$$g = l - 3Nt + 3\pi.$$

Вместо  $x_1, x_2, y_1, y_2$  введем теперь новые координаты  $\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_1, \lambda_2$  при помощи линейного преобразования

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} y_1 + y_2 = -\frac{1}{2} g, \quad \lambda_2 = y_1,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad x_2 = \Lambda_1.$$

В соответствии с § 1 эти координаты также являются канониче-

схемн. Имеем, таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= x_2, & \lambda_1 &= -\frac{1}{2} y_1 + y_2, \\ \Lambda_2 &= x_1 + \frac{1}{2} x_2, & \lambda_2 &= y_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или, выражая через оскулирующие элементы,

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= \sqrt{a} (1 - \sqrt{1 - e^2}), & \lambda_1 &= \frac{1}{2} (3Nt - l - 3\pi), \\ \Lambda_2 &= \sqrt{a} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} \right), & \lambda_2 &= l + \pi - Nt, \end{aligned} \right\} \quad (6^*)$$

и тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1}, \\ \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, & \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_2}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$R = F_0 + [F] + \sum G_i \cos 2i\lambda_1. \quad (7^*)$$

Величины  $F_0$ ,  $[F]$  и  $G_i$  даются при помощи формул (1), (2), (4) и (4\*) как функции  $x_1$  и  $x_2$ . Остается еще представить эти величины как функции  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ .

Из (6) находим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \Lambda_2 - \frac{1}{2} \Lambda_1; & y_1 &= \lambda_2, \\ x_2 &= \Lambda_1, & y_2 &= \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

так что сначала получим

$$F_0 = \frac{1}{2 \left( \Lambda_2 - \frac{1}{2} \Lambda_1 \right)^2} + N \left( \Lambda_2 - \frac{3}{2} \Lambda_1 \right). \quad (9)$$

Величины  $(F)$  и  $G_i$  целесообразно разложить по степеням  $\Lambda_1$ .

Во-первых, получим

$$e^2 = \frac{x_2}{2x_1} = \frac{\Lambda_1}{2\Lambda_2 - \Lambda_1} = e'^2 + e'^4 + e'^6 + \dots, \quad (10)$$

где положили

$$e'^2 = \frac{\Lambda_1}{2\Lambda_2}. \quad (10^*)$$

Величины  $A_s^{(i)}$  определяются согласно § 3 формулой

$$A_s^{(i)} = \frac{\alpha^s}{s!} \frac{\partial^s A^{(i)}}{\partial \alpha^s},$$

и, следовательно, являются функциями только  $x_1$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} A^{(i)} \left( \Lambda_2 - \frac{1}{2} \Lambda_1 \right) &= A^{(i)} - \frac{1}{2} \Lambda_1 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_1} + \left( \frac{\Lambda_1}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial x_1^2} + \dots = \\ &= A^{(i)} - \varepsilon'^2 \left( x_1 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_1} \right)_0 + \varepsilon'^4 \left( \frac{x_1^2}{2!} \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial x_1^2} \right)_0 + \dots, \end{aligned}$$

где в выражения внутри скобок следует после дифференцирования поставить  $x_1 = \Lambda_2$ .

Из формулы (9) § 3 легко выводим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_1} &= 2A_1^{(i)}, \\ \frac{x_1^2}{2!} \frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial x_1^2} &= A_1^{(i)} + 4A_2^{(i)}, \end{aligned}$$

так что имеем формулу

$$A^{(i)} \left( \Lambda_2 - \frac{1}{2} \Lambda_1 \right) = A^{(i)} - 2\varepsilon'^2 A_1^{(i)} + \varepsilon'^4 (A_1^{(i)} + 4A_2^{(i)}) + \dots, \quad (11)$$

из которой легко можно вывести соответствующие выражения для  $A_1^{(i)}$ ,  $A_2^{(i)}$ ,  $A_3^{(i)}$ , ...

Не входя в подробности исследования соизмеримости типа 1:3, и отмечая лишь некоторые принципиальные вопросы, мы ограничимся в последующем исследовании в  $[F]$  и  $G_i$  членами второго порядка.  $F_0$ , наоборот, оставим неизменным.

С учетом (11) имеем

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2 \left( \Lambda_2 - \frac{1}{2} \Lambda_1 \right)^2} + N \left( \Lambda_2 - \frac{3}{2} \Lambda_1 \right) + \\ &+ \mu \left\{ \frac{1}{2} A^{(0)} + A_2^{(0)} \varepsilon'^2 + \left( \frac{21}{2} A^{(3)} + 5A_1^{(3)} + A_2^{(3)} \varepsilon'^2 \cos 2\lambda_1 \right) \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Так как  $R$  не зависит от  $\lambda_2$ , то согласно (7) имеем

$$\Lambda_2 = \text{const.} \quad (13)$$

Таким образом, величины  $A_s^{(i)}$  при интегрировании следует считать постоянными.

Сначала необходимо определить особые значения постоянных интегрирования. Согласно § 2 это получается исключением  $\Lambda_1$  и  $\lambda_1$  из уравнений

$$\begin{aligned} R &= C, \\ \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 0. \end{aligned}$$

Последние два уравнения примут такой вид:

$$\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = \frac{1}{2\left(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1\right)^3} - \frac{3}{2}N + \frac{\mu}{2\Lambda_2}(A_2^{(0)} + K \cos 2\lambda_1) = 0, \quad (14)$$

$$- \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 2\mu K \varepsilon'^2 \sin 2\lambda_1 = 0, \quad (14^*)$$

где

$$K = \frac{21}{2}A^{(3)} + 5A_1^{(3)} + A_2^{(3)}.$$

Уравнение (14\*) имеет только корни  $\lambda = \frac{k\pi}{2}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Следует заметить, что это заключение для соизмеримостей низших порядков справедливо не всегда, если учитывать члены с аргументами  $4\lambda$ ,  $6\lambda$  и т. д. В таком случае могут встретиться особенности при других значениях  $\lambda$ , чем 0 и  $\frac{\pi}{2}$ , как мы это нашли в § 4.

Это, в частности, справедливо для соизмеримостей типа 1:2, 2:3 и т. д., где порядок характеристических членов равен единице.

Если в (14) подставить значения  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , то для определения особых значений  $\Lambda_1$  мы получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{2\left(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1\right)^3} - \frac{3}{2}N + \frac{\mu}{2\Lambda_2}(A_2^{(0)} + K) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2\left(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1\right)^3} - \frac{3}{2}N + \frac{\mu}{2\Lambda_2}(A_2^{(0)} - K) = 0. \quad (15^*)$$

Соответствующие значения  $C$  получим из

$$R = F_0 + [F] + \mu K \varepsilon'^2 = C, \quad (16)$$

$$R = F_0 + [F] - \mu K \varepsilon'^2 = C. \quad (16^*)$$

Уравнения (15) и (15\*) могут быть непосредственно разрешены относительно  $\Lambda_1$ . Из (15) и (15\*) получаем

$$\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1 = \left[3N - \frac{\mu}{\Lambda_2}(A_2^{(0)} + K)\right]^{-1/3}, \quad (17)$$

$$\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1 = \left[3N - \frac{\mu}{\Lambda_2}(A_2^{(0)} - K)\right]^{-1/3}. \quad (17^*)$$

Эти значения для  $\Lambda_1$  необходимо подставить в (16) и (16\*). Тогда мы получим два соотношения между  $\Lambda_2$  и  $C$ , которые дают две особые кривые для соизмеримостей типа 1:3.

Итак, уравнения для особых кривых могут быть строго выведены. Однако для числовых расчетов целесообразно исполь-

зовать разложение по степеням  $\Lambda_1$ . Прежде чем переходить к этому разложению, следует сделать некоторые замечания о точном решении уравнений (7).

Если в  $[F]$  и  $G_1$  учитывать только члены второго порядка, так что  $R$  будет иметь форму (12), то в соответствии с (12) уравнение орбиты, очевидно, можно записать в форме

$$\cos 2\lambda_1 = \frac{\alpha + 3\Lambda_1 + \gamma\Lambda_1^2 + \delta\Lambda_1^3}{\alpha' + 3'\Lambda_1 + \gamma'\Lambda_1^2 + \delta'\Lambda_1^3}.$$

Если затем обозначить числитель и знаменатель правой части этого выражения соответственно через  $X$  и  $Y$ , то найдем, что между  $\Lambda_1$  и временем имеет место соотношение вида

$$t + \beta = \int \frac{\left(\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1\right)^2 d\Lambda_1}{\sqrt{(Y-X)(Y+X)}}.$$

Хотя под знаком корня стоит многочлен шестой степени, но движение можно исследовать известным образом: здесь это облегчается благодаря тому, что многочлен шестой степени может быть представлен в виде произведения двух многочленов третьей степени.

Далее мы не будем следовать этим путем, а вместо этого разложим  $R$  по степеням  $\Lambda_1$ . Уравнения (17) и (17\*) показывают, что  $\Lambda_2$  находится на особых кривых в окрестности значения  $(3N)^{-1/2}$ . Поэтому целесообразнее всего принять во внимание такие значения  $\Lambda_2$ , которые мало отличаются от  $(3N)^{-1/2}$ . Положим в соответствии с этим

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= (3N)^{1/2}, \\ \Lambda_2 &= \frac{1 + \xi}{\kappa}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и разложим  $R$  по степеням  $\xi$  и  $\Lambda_1$ . Для сокращения записи положим еще

$$z = \frac{1}{2}\kappa\Lambda_1. \quad (18^*)$$

Тогда имеем

$$\Lambda_2 - \frac{1}{2}\Lambda_1 = \frac{1}{\kappa}(1 + \xi - z),$$

и, следовательно, с точностью до членов второго порядка относительно  $\xi$  и  $z$  включительно,

$$F_0 = \frac{\kappa^2}{2} \left( \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\xi + 3\xi^2 - 6\xi z + 3z^2 \right).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} A^{(0)} \left[ \frac{1}{\kappa} (1 + \xi) \right] &= A^{(0)} \left( \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa} \xi \frac{\partial A^{(0)}}{\partial x_1} + \dots = \\ &= A^{(0)} \left( \frac{1}{\kappa} \right) + 2\xi A_1^{(0)} + \dots \end{aligned}$$

и

$$\varepsilon'^2 = \frac{z}{1 + \xi},$$

так что, пренебрегая членами порядка  $\xi^2 \mu$ , получим

$$\begin{aligned} [F] &= \mu \left[ \frac{1}{2} A^{(0)} + A_1^{(0)} \xi + A_2^{(0)} z \right], \\ G_1 &= \mu K z. \end{aligned}$$

Величины  $A^{(0)}$ ,  $A_1^{(0)}$ ,  $A_2^{(0)}$  и  $K$  следует вычислять для значения  $x_1 = 1/\kappa$ .

Если положить

$$\eta = \frac{2}{\kappa^2} C - \frac{5}{3} - \frac{1}{\kappa^2} \mu A^{(0)}, \quad (19)$$

то уравнение орбиты примет вид

$$\eta = -\frac{4}{3} \xi + 3\xi^2 + 3z^2 - 6\xi z + \frac{2}{\kappa^2} \mu (A_1^{(0)} \xi + A_2^{(0)} z + Kz \cos 2\lambda_1). \quad (20)$$

Форма кривой зависит от двух параметров  $\xi$  и  $\eta$ . Особые значения получим, как раньше для  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ , отыскивая дискриминанты уравнений

$$\eta = -\frac{4}{3} \xi + 3\xi^2 + 3z^2 - 6\xi z + \frac{2}{\kappa^2} \mu (A_1^{(0)} \xi + A_2^{(0)} z \pm Kz).$$

Эти дискриминанты имеют вид

$$\left[ 6\xi - \frac{2}{\kappa^2} \mu (A_2^{(0)} \pm K) \right]^2 = 12 \left( -\eta - \frac{4}{3} \xi + 3\xi^2 + \frac{2}{\kappa^2} \mu A_1^{(0)} \xi \right). \quad (21)$$

Члены второго порядка относительно  $\xi$  взаимно уничтожаются, так что особые значения  $\xi$  и  $\eta$  лежат на двух прямых, уравнения которых имеют вид

$$\eta + \frac{1}{3\kappa^4} \mu^2 (A_2^{(0)} \pm K)^2 - \xi \left[ -\frac{4}{3} + \frac{2}{\kappa^2} \mu (A_1^{(0)} + A_2^{(0)} \pm K) \right] = 0. \quad (21^*)$$

Если дискриминанты обозначить через  $D_1$  и  $D_2$ , то эти уравнения будут иметь форму

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0.$$

Чтобы получить удобные для числовых расчетов формулы, для краткости положим

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= 1000 \left( \eta + \frac{4}{3} \xi - 3\xi^2 - \frac{2}{\kappa^2} \mu A_1^{(0)} \xi \right), \\ A_2' &= \frac{2000}{\kappa^2} \mu A_2^{(0)}, \\ K' &= \frac{2000}{\kappa^2} \mu K, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

и тогда уравнение (20) можно записать в форме

$$\eta' = 3000z^2 + z [-6000\xi + A_2' + K' \cos 2\lambda_1]. \quad (23)$$

Если известна масса возмущающего тела  $\mu$ , то вместо  $A_2'$  и  $K'$  можно подставить определенные числовые значения.

Предположим, что рассматриваются возмущения от Юпитера, так что  $\mu = \frac{1}{1047}$ . Тогда получим следующие значения для встречающихся здесь коэффициентов Лапласа. Имеем

$$\kappa^3 = 3N = 3\sqrt{1+\mu} = 3,00143, \quad \sqrt{\alpha_0} = \frac{1}{\kappa} = 0,69325,$$

откуда получаем значение  $\alpha_0 = 0,48060$ , для которого коэффициенты Лапласа получают следующие значения (из таблиц Рэнкля [79]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_0^{(0)} &= +1,0667, & A_0^{(3)} &= +0,0777, \\ A_1^{(0)} &= +0,3099, & A_1^{(3)} &= +0,2531, \\ A_2^{(0)} &= +0,2585, & A_2^{(3)} &= +0,3109, \\ A_3^{(0)} &= +0,1466, & A_3^{(3)} &= +0,2029. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $K = 2,3924$ .

Из этих значений получаем

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{2000\mu}{\kappa^2} A_1^{(0)} = +0,2845, \\ A_2' &= \frac{2000\mu}{\kappa^2} A_2^{(0)} = +0,2373, \\ K' &= \frac{2000\mu}{\kappa^2} K = +2,1963, \end{aligned}$$

и затем по (22)

$$\eta' = 1000\eta + 1333,0488\xi - 3000\xi^2, \quad (22')$$

Обозначая особую кривую, соответствующую значению  $\lambda_1 = 0$ , через  $L_1$ , а ту особую кривую, которая соответствует  $\lambda_1 = \pi/2$ , через  $L_2$ , для  $L_1$  и  $L_2$  получим следующие уравнения:

особая кривая  $L_1$

$$1000\eta = -0,0004935 - 1330,6152 \xi, \quad (24)$$

особая кривая  $L_2$

$$1000 \eta = -0,0003198 - 1335,0078 \xi. \quad (24^*)$$

Если подставить вместо  $\eta$  величину  $\eta'$ , то эти уравнения примут вид

для  $L_1$ :

$$\eta' = -0,0004935 + 2,4336 \xi - 3000 \xi^2,$$

для  $L_2$ :

$$\eta' = -0,0003198 - 1,9600 \xi - 3000 \xi^2.$$

Правые части уравнений являются точными квадратами, так что эти уравнения можно также записать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} L_1: & -\eta' = 3000 (\xi - 0,0004056)^2, \\ L_2: & -\eta' = 3000 (\xi + 0,0003266)^2. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Будучи выраженными в переменных  $\eta'$  и  $\xi$ , особые кривые будут параболой с параллельными осями и вершинами соответственно в точках  $\xi = 0,0004056$  и  $\xi = -0,0003266$ . В последующем будем использовать (24) и (24\*).

Эти прямые пересекаются в точке  $\xi = 0,0000395$ ,  $\eta = -0,0530927$ .

Чтобы решить дифференциальные уравнения

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1},$$

перейдем к уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\eta' = 3000z^2 + z \left( -6000\xi + A'_2 + K' \cos 2 \frac{\partial W'}{\partial \Lambda_1} \right). \quad (26)$$

Если

$$W' = \frac{1}{2} \int \arccos \frac{\eta' - 3000z^2 + 6000\xi z - A'_2 z}{K' z} d\Lambda_1 \quad (26^*)$$

— решение этого уравнения, где  $\eta'$  будет обозначать постоянную интегрирования, и по (18\*)

$$d\Lambda_1 = \frac{2}{\kappa} dz,$$

тогда, в соответствии с § 1,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  найдутся как функции времени при помощи следующих уравнений:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{\eta' - 3000z^2 + 6000\xi z - A_2'z}{K'z}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \eta'} t - \beta_1 = \frac{\partial IV'}{\partial \eta'}. \quad (27^*)$$

Если положить

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= K'z - \eta' + 3000z^2 - 6000\xi z + A_2'z, \\ X_2 &= K'z + \eta' - 3000z^2 + 6000\xi z - A_2'z, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

то уравнение (27\*) примет вид

$$\frac{\partial C}{\partial \eta'} t - \beta_1 = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}}, \quad (28^*)$$

где  $z$  дается как функция времени.

Границы, в которых колеблется величина  $z$ , определяются корнями уравнений  $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ . Последние можно выразить с помощью дискриминантов  $D_1$  и  $D_2$ . Если положить

$$D_1' = \frac{1}{3} D_1 = \frac{1}{3} \eta + 0,0000001645 + 0,4435384\xi,$$

$$D_2' = \frac{1}{3} D_2 = \frac{1}{3} \eta + 0,0000001066 + 0,4450029\xi,$$

и затем записать

$$X_1 = 3000(z - \rho_1)(z - \rho_2),$$

$$X_2 = -3000(z - \rho_3)(z - \rho_4),$$

то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \xi - 0,0004056 + \sqrt{D_1'}, \\ \rho_2 &= \xi - 0,0004056 - \sqrt{D_1'}, \\ \rho_3 &= \xi + 0,0003265 + \sqrt{D_2'}, \\ \rho_4 &= \xi + 0,0003265 - \sqrt{D_2'}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Дискриминант  $D_1'$  меняет знак на линии  $L_1$ , а дискриминант  $D_2'$  на линии  $L_2$ . Если  $D_1'$  отрицательно, то уравнение  $X_1 = 0$  не имеет действительных корней, и  $X_1$  всегда остается положительным. Если  $D_2'$  отрицательно, то уравнение  $X_2 = 0$  не имеет действительных корней, и  $X_2$  всегда остается отрицательным. Так как произведение  $X_1 X_2$  не может быть отрицательным, то находим, что не могут существовать такие значения  $\xi$  и  $\eta$ , для которых  $D_1$  и  $D_2$  одновременно отрицательны.

Прямые линии  $L_1$  и  $L_2$  делят действительную плоскость  $\xi\eta$  на четыре области, которые обозначим через  $G_1, G_2, G_3$  и  $G_4$ , а именно так, что

в $G_1$ : $D_1$ положительно,	$D_2$ — отрицательно,
» $G_2$ : $D_1$ положительно,	$D_2$ — положительно,
» $G_3$ : $D_1$ отрицательно,	$D_2$ — положительно,
» $G_4$ : $D_1$ отрицательно,	$D_2$ — отрицательно.

Область  $G_4$  является «запрещенной», ибо, если точка  $(\xi, \eta)$  лежит в этой области, то дифференциальные уравнения никаких действительных решений не допускают.

В области  $G_1$  корни  $\rho_3$  и  $\rho_4$  комплексные, так что здесь  $X_2$  всегда остается отрицательным. Следовательно, должно также всегда оставаться отрицательным  $X_1$ , для чего необходимо, чтобы  $z$  колебалось между корнями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В этом случае  $2\lambda_1$ , очевидно, никогда не может быть равно  $180^\circ$ , но угловая величина  $\lambda_1$  колеблется подобно маятнику около значения  $\lambda_1 = 0$ . Следовательно, в области  $G_1$  имеем либрацию по  $\lambda_1$  около  $\lambda_1 = 0$ .

В  $G_2$  все корни  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  действительны. Здесь  $X_1$  и  $X_2$  должны быть одновременно или оба отрицательны, или оба положительны. Величина  $z$  колеблется между одним из корней  $\rho_1$  или  $\rho_2$  и одним из корней  $\rho_3$  или  $\rho_4$ . Какие из этих корней определяют границы  $z$ , зависит от их числовых значений. Угловая величина  $\lambda_1$  здесь неограниченно возрастает.

Наконец, в  $G_3$  корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексные, так что  $X_1$  всегда остается положительным. Следовательно,  $X_2$  также всегда должно быть положительным, для чего необходимо, чтобы  $z$  колебалось между границами  $\rho_3$  и  $\rho_4$ . Величина  $2\lambda_1$  здесь никогда не может стать равной нулю, так как она маятникообразно колеблется около значения  $2\lambda_1 = 180^\circ$ . Итак, в области  $G_3$  имеет место либрация по  $\lambda_1$  около значения  $2\lambda_1 = 180^\circ$ .

Для выяснения характера описанного только что движения проведем вычисление корней для определенного случая. Положим

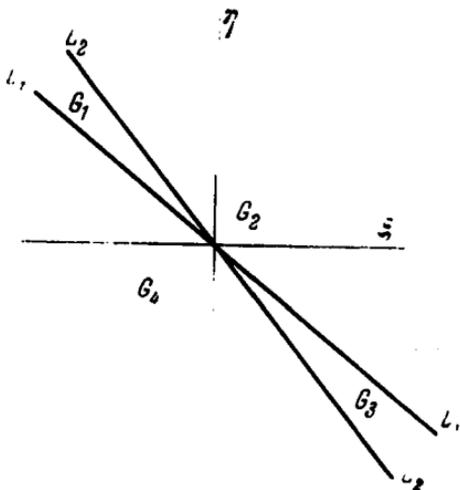


Рис. 44.

$\xi = +0,001$  и тогда получим дискриминанты из формул

$$D_1' = \frac{1}{3} \eta + 0,0004437029,$$

$$D_2' = \frac{1}{3} \eta + 0,0004451095.$$

Будем теперь придавать величине  $\eta$  различные значения от 0,003 до  $-0,0013353295$  (последнее значение лежит на границе «запрещенной» области  $G_4$ ) и из (29) получим следующие значения для корней:

	$\frac{1}{3} \eta$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$
1	0,001	0,0385905	-0,0374017	+0,0393411	-0,0366880
2	-0,0002	0,0162054	-0,0150166	0,0169825	-0,0143295
3	-0,0004430	0,0014311	-0,0002423	0,0027756	-0,0001226
4	-0,00044335	0,0011885	+0,00000035	0,0026530	$\pm 0,0000000$
5	-0,00044370	0,0005944	+0,0005944	0,0025125	+0,0001405
6	-0,00044440	мнимое	мнимое	0,0021688	0,0004842
7	-0,00044511	»	»	0,0013265	0,0013265

Точки 1, 2, 3 и 4 лежат в области  $G_2$ . Точка 5 лежит на  $L_1$ , т. е. на границе области  $G_3$ . Точка 6 лежит в области  $G_3$ , и, наконец, точка 7 лежит на  $L_2$  на границе «запрещенной» области  $G_4$ . В случаях 1, 2, 3  $z$  периодически колеблется между  $\rho_1$  и  $\rho_3$ . Угловая величина  $\lambda_1$  неограниченно возрастает со временем.

При  $\frac{1}{3} \eta = -0,00044335$  и вообще для всех таких значений  $\eta$ , которые лежат между этим значением и значением  $\frac{1}{3} \eta = -0,00044370$ , имеют место особенные движения. А именно, здесь могут быть две различные формы движения: либо  $z$  колеблется между  $\rho_1$  и  $\rho_3$ , либо между  $\rho_2$  и  $\rho_4$ . Значит, координаты не являются однозначными функциями постоянных интегрирования  $\xi$  и  $\eta$ .

При  $\frac{1}{2} \eta = -0,00044370$  имеет место предельное движение. Оно также может происходить двояким образом: величина  $z$  стремится к граничному значению  $+0,0005944$ , либо от меньших значений  $z$ , которые имеют нижнюю границу  $z = 0,0001405$ , или от таких значений  $z$ , которые больше чем граничное значение, но меньше чем  $+0,0025125$ .

В случае 6  $z$  колеблется между  $\rho_3$  и  $\rho_4$ . Здесь угловая величина  $2\lambda_1$  никогда не может быть равной нулю, колеблясь около

значения  $180^\circ$ . Таким образом, здесь имеет место либрация по  $\lambda_1$ . Это имеет место для всех значений  $\eta$ , которые лежат между  $\frac{1}{3}\eta = -0,00044370$  и  $\frac{1}{3}\eta = -0,44511$ .

Наконец, в случае 7  $z$  принимает постоянное значение  $+0,0013265$ , что будет при  $\frac{1}{3}\eta = -0,00044511$ . При значениях  $\eta$ , меньших этой границы, никакие действительные движения невозможны. Величины корней  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  дают точки орбиты, которые соответствуют значениям  $2\lambda_1 = 0$  и  $2\lambda_1 = 180^\circ$ . Для получения еще двух точек орбиты вычислим с помощью (26) значение величины  $z$ , которое соответствует значению  $\lambda_1$ :

$$A'_2 + K' \cos 2\lambda_1 = 0.$$

Подставляя числовые значения  $A'_2$  и  $K'$ , получим

$$2\lambda_1 = \pm 96^\circ, 20.$$

Соответствующие значения  $z$  по (26) и (22\*) будут

$$\begin{aligned} z &= \xi \pm \sqrt{\xi^2 + \frac{\eta'}{3000}} = \\ &= \xi \pm \sqrt{\frac{1}{3}\eta + 0,4443496\xi}. \end{aligned}$$

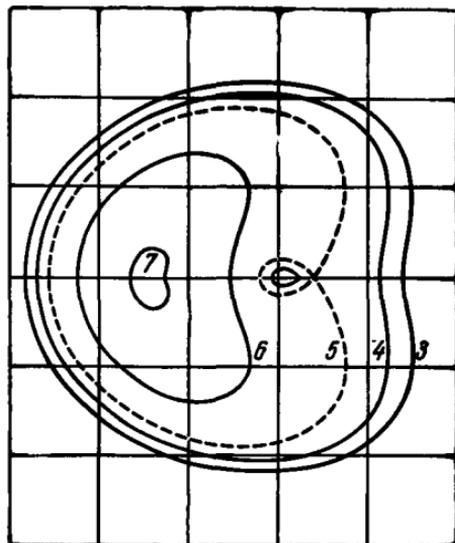


Рис. 45.

Таким образом, в трех случаях 3, 4 и 5 мы получаем:

- 3)  $z_1 = 0,002162, \quad z_2 < 0,$   
 4)  $z_1 = 0,002000, \quad z_2 < 0,$   
 5)  $z_1 = 0,001806, \quad z_2 = 0,000194.$

В случаях 6 и 7 значения  $z_1$  и  $z_2$  комплексные.

Рис. 45 дает ясное представление о геометрической форме орбит 3—7. Одна из кривых, 4, лежащая внутри меньшей петли, в этом масштабе свелась к точке. Предельная кривая указана пунктиром. Если имеет место предельное движение, то точка  $(z, \lambda_1)$  движется по одной из петель и с ростом времени неограниченно приближается к двойной точке предельной кривой, не достигая ее в конечный момент времени.

Если  $\xi$  отрицательно или положительно и меньше чем 0,0000395 (координата  $\xi$  точки пересечения линий  $L_1$  и  $L_2$ ), то воспользуемся приведенными выше рассуждениями с одним изменением: либрация по  $2\lambda_1$  имеет место теперь не около  $2\lambda_1 = 180^\circ$ , а около значения  $2\lambda_1 = 0$ .

Соответствующие числа станут яснее, если при помощи полученных граничных значений для  $z$  вычислить соответствующие граничные значения оскулирующих средних движений малых планет. Для оскулирующего среднего движения  $n$  имеем уравнение

$$n = \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{1}{x_1^3}$$

или в силу (8), (18) и (18\*)

$$n = \frac{3N}{(1 + \xi - z)^3} = 3N(1 - 3\xi + 3z + \dots). \quad (30)$$

Если  $N$  выразить в астрономических единицах и принять в качестве возмущающей планеты Юпитер, то будем иметь  $N = 299^{\circ},12836$ , и, следовательно, для  $\xi = 0,001$

$$n = 894^{\circ},69292 + 2692^{\circ},15524 z.$$

Отсюда получаем следующие граничные значения для оскулирующих средних движений в случаях 1—7.

Граничные значения для оскулирующих средних движений малых планет типа 1/3 при  $\xi = +0,001$ :

1.	998,5845	—	1600,6052	—
2.	938,3203	—	940,4124	—
3.	898,5456	—	902,1652	—
4.	897,8925	894,7023	901,9352	894,6929
5.	896,2931	896,2931	901,4569	895,0711
6.	—	—	900,5316	895,9964
7.	—	—	898,2640	898,2640

Из этой таблицы непосредственно видно, что оскулирующие средние движения малых планет могут иметь любое произвольное среднее значение. Для значений  $\xi, \eta$ , которые находятся на особой кривой  $L_1$ , по крайней мере для  $\xi = 0,001$  оскулирующее среднее движение приближается к значению, которое мы обозначим через  $v_1$ :

$$v_1 = 896^{\circ},2931. \quad (31)$$

В точке 7 оскулирующее среднее движение имеет значение

$$v_3 = 898^{\circ},2640. \quad (31^*)$$

Если имеет место либрация по  $\lambda_1$ , то оскулирующее среднее дви-

жение колеблется между границами, из которых одна меньше  $v_1$ , а другая больше  $v_3$ .

Если речь идет об орбите (например, 4), расположенной внутри меньшей петли граничной кривой, то значения оскулирующего среднего движения будут меньше  $v_1$ .

Эти выводы справедливы пока только для значения  $\xi = 0,001$ . Но легко важнейшие из них распространить на все значения  $\xi$ . В самом деле, можно доказать, что для всех точек линии  $L_1$  оскулирующее среднее движение неограниченно приближается к определенному уравнением (31) значению  $v_1$ .

Далее можно доказать, что во всех точках линии  $L_2$  оскулирующее среднее движение обладает значением  $v_3$ , определяемым при помощи (31\*). Если точка  $(\xi, \eta)$  находится на  $L_1$ , то согласно (29)  $z$  приближается к значению  $\xi - 0,0004056$ . Но этому значению  $z$  по (30) соответствует постоянное значение  $n$ , а именно:

$$n = \frac{3N}{(1 + 0,0004056)^3} = 896'',2931 = v_1.$$

Аналогичным образом находим, что на  $L_2$  оскулирующее среднее движение обладает значением  $v_3$ .

Если исключить из рассмотрения орбиты, попадающие внутрь меньшей петли, то видим, что в области  $G_2$  оскулирующие средние движения будут больше  $v_1$ , и если бы мы предприняли подобное исследование для отрицательных значений  $\xi$  (или, точнее, для  $\xi < 0,0000395$ ), то обнаружили бы, что оскулирующие средние движения вне области либрации меньше  $v_3$ . Если имеет место либрация, оскулирующие средние движения колеблются между двумя границами, из которых одна — верхняя — всегда больше  $v_3$ , в то время как нижняя граница всегда меньше  $v_3$ . Но она может в зависимости от обстоятельств быть большей или меньшей  $v_1$ . Таким образом, это обстоятельство указывает на то, что вследствие соизмеримости никаких люков в оскулирующих средних движениях не возникает. То же самое, следовательно, справедливо для оскулирующих больших полуосей планетных орбит. Так как элементы планетных орбит, которые публикуются в астрономических эфемеридах, являются в подавляющем большинстве случаев оскулирующими, то находим, что люки, которые обнаружены в кольце малых планет и встречаются именно там, где оскулирующие средние движения планет в два или три раза больше среднего движения Юпитера, едва ли могут быть объяснены тем, что такие оскулирующие элементы малых планет невозможны с теоретической точки зрения\*). Однако это не мешает тому, что

\* Это, впрочем, само собой понятно уже из того, что можно представить себе планету, которая в определенный момент описывает данный эллипс, также похожий на этот эллипс. Оскулирующие элементы могут быть все выбраны произвольно.

объяснение этих странных люков может стоять в связи с точками разрыва проблемы Делоне.

Как ведут себя истинные средние движения в областях  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним сначала более тщательно понятие истинного среднего движения.

Уравнение (28\*) показывает, что если исключить особые линии,  $L_1$  и  $L_2$ ,  $z$  будет периодической функцией времени. Обозначим период через  $2T_1$  и положим  $n_1 = \frac{\pi}{T_1}$ . Тогда из уравнения (27) найдем, что  $\frac{d\lambda_1}{dt}$  — периодическая функция того же самого периода. Следовательно, мы можем написать

$$2\lambda_1 = n_1 t + c_1 + \sum a_i \sin i(n_1 t + c_1).$$

Затем, в соответствии с (7), имеем

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \Lambda_2},$$

где правая часть является степенным рядом по  $z$ , который также может быть представлен как периодическая функция времени с периодом  $2T_1$ . Имеем, следовательно,

$$\lambda_2 = n_2 t + c_2 + \sum b_i \sin i(n_1 t + c_1).$$

Величины  $n_1$  и  $n_2$  являются средними движениями соответственно для  $2\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Если эти формулы подставить в уравнение (6\*), то получим среднюю долготу  $l + \pi$  и долготу перигелия  $\pi$ , представленными как функции времени. Из (6\*) получаем

$$l + \pi = (\lambda_2 + Nt) = (n_2 + N)t + c_2 + \sum b_i \sin i(n_1 t + c_1),$$

$$\pi = N - \frac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2) = \left[ N - \frac{1}{2}(n_1 + n_2) \right] t + c_3 + \sum c_i \sin i(n_1 t + c_1).$$

Таким образом, истинное среднее движение малой планеты, которое мы обозначим через  $n_0$ , имеет значение

$$n_0 = n_2 + N, \quad (32)$$

и для среднего движения перигелия находим выражение

$$N - \frac{1}{2}(n_1 + n_2).$$

Если среднее значение функции обозначать скобками, то в силу (7) имеем

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \left[ 2 \frac{d\lambda_1}{dt} \right] = - 2 \left[ \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} \right], \\ n_2 &= \left[ \frac{d\lambda_2}{dt} \right] = - \left[ \frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Для вычисления значения  $n_2$  для точки внутри области  $G_3$  проще всего поступить следующим образом. В силу (6) имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} = \frac{\partial R}{\partial x_1},$$

и, значит,

$$\frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} + 2 \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = 2 \frac{\partial R}{\partial x_2}.$$

Но внутри областей  $G_1$  и  $G_3$  имеем  $n_1 = 0$ , следовательно,

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} \right] = 0,$$

так что здесь

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} \right] = 2 \left[ \frac{\partial R}{\partial x_2} \right]. \quad (34)$$

Но правую часть можно сравнительно легко построить. Из (1), (2) и (4) получаем

$$-2 \frac{\partial R}{\partial x_2} = 2N + \frac{\mu}{x_1} \left[ -A_1^{(0)} - A_2^{(0)} - \left( \frac{21}{2} A^{(3)} + 5A_1^{(3)} + A_2^{(3')} \right) \cos 2\lambda_1 + \dots \right]. \quad (35)$$

Все пренебрегаемые члены умножаются на положительную степень  $\varepsilon^2$  и массу  $\mu$ . Для вычисления среднего значения правой части этого выражения необходимо знать среднее значение  $\cos 2\lambda_1$ . В области  $G_3$  величина  $\lambda_1$  является периодической функцией  $t$ , которая может быть записана в форме

$$\lambda_1 = 180^\circ + \sum c_i \sin i (n_3 t + c_3).$$

Следовательно, в этой области имеем

$$[\cos 2\lambda_1] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2\lambda_1 d(n_3 t + c_3).$$

В то время как  $n_3 t + c_3$  возрастает от нуля до  $\pi$ ,  $z$  колеблется между  $\rho_4$  и  $\rho_3$ , так что согласно (28\*)

$$[\cos 2\lambda_1] = \frac{1}{\kappa} \frac{n_3}{\frac{\partial C}{\partial \eta'}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\rho_4}^{\rho_3} \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{X_1 \cdot X_2}}.$$

Но в силу (28\*), очевидно, имеем

$$\frac{\partial C}{\partial \eta'} \cdot \frac{\pi}{n_3} = \frac{1}{\kappa} \int_{\rho_4}^{\rho_3} \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}},$$

так что

$$[\cos 2\lambda_1] = \int_{\rho_4}^{\rho_3} \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}} : \int_{\rho_4}^{\rho_3} \frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}}. \quad (36)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, проведем интегрирование уравнения (28\*) для либрационного случая.

Корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  являются комплексными. Если положить

$$\rho_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\rho_2 = \alpha - i\beta,$$

то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \xi - 0,0004056, \\ \beta &= \sqrt{-D_1}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Тогда интеграл уравнения (28\*) примет вид

$$z = \frac{\rho_4 + \rho_1 h_1 + (-\rho_4 + \rho_2 h_1) \operatorname{cn} u}{1 + h_1 + (-1 + h_1) \operatorname{cn} u},$$

где  $h_1$  и  $u$  имеют следующие значения.

Введем вспомогательные углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  при помощи формул

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\rho_4 - \alpha}{\beta}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\rho_3 - \alpha}{\beta}.$$

Тогда будем иметь

$$h_1 = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \sqrt{\frac{(\rho_4 - \alpha)^2 + \beta^2}{(\rho_3 - \alpha)^2 + \beta^2}}, \quad (38)$$

$$g = 3000\kappa \frac{\partial C}{\partial \eta'} \sqrt{[(\rho_4 - \alpha)^2 + \beta^2][(\rho_3 - \alpha)^2 + \beta^2]} \quad (38^*)$$

и

$$u = gt + \operatorname{const}.$$

Модуль  $k$  эллиптической функции  $\operatorname{cn} u$  будет равен

$$k = \left| \sin \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) \right|.$$

Отсюда выводим следующие выражения для  $X_1$  и  $X_2$ :

$$[1 + h_1 + (-1 + h_1) \operatorname{cn} u] X_1 = 12000 [(\rho_4 - \alpha)^2 + \beta^2] (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u).$$

$$[1 + h_1 + (-1 + h_1) \operatorname{cn} u] X_2 = 3000 h_1 (\rho_3 - \rho_4)^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

и, наконец,

$$\frac{dz}{\sqrt{X_1 X_2}} = \frac{du}{3000 \sqrt{[(\rho_4 - \alpha)^2 + \beta^2][(\rho_3 - \alpha)^2 + \beta^2]}}$$

При помощи этой формулы можно вычислить интеграл (36). Нет необходимости выполнять эти вычисления, чтобы получить представление об изменении истинного среднего движения. Во-первых, очевидно, что среднее значение  $[\cos 2\lambda_1]$  самое большое равно  $+1$ , а самое меньшее  $-1$ . В самом деле, эти границы либо достигаются, либо по меньшей мере мы подходим к ним сколь угодно близко. Это оказывается в непосредственной близости от обеих особых кривых  $L_1$  и  $L_2$ . Следовательно, внутри области  $G_3$  истинное среднее движение  $n_0$  колеблется между двумя границами:

$$v_1^{(0)} = 3N + \frac{\mu}{x_1} (-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} - K) \quad (39)$$

и

$$v_3^{(0)} = 3N + \frac{\mu}{x_1} (-A_1^{(0)} - A_2^{(0)} + K), \quad (39^*)$$

где члены, которыми пренебрегают, умножаются на  $\xi$  и возмущающую массу и, значит, сравнительно малы.

Если подставить числовые значения, то найдем

$$v_1^{(0)} = 896,165, \quad v_3^{(0)} = 898,136. \quad (39^{**})$$

Таким образом, ни одна из границ для  $n_0$  внутри области  $G_3$  не совпадает с  $v_1$  и  $v_3$ . Действительно, находим, что

$$v_1 - v_1^{(0)} = v_3 - v_3^{(0)} = 0,128.$$

Разность  $v_3 - v_1$  равна разности  $v_3^{(0)} - v_1^{(0)}$ .

Как ведет себя истинное среднее движение при переходе через особые линии  $L_1$  и  $L_2$ ? Чтобы решить это, мы найдем для истинного среднего движения в области  $G_2$  приближенное выражение. Из (32) и (33) имеем

$$n_0 = N - \left[ \frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} \right].$$

Но

$$R = F_0 + [F] + G_1 \cos 2\lambda_1,$$

и будем иметь

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda_2} = -\frac{1}{x_1^3} + N = -n + N,$$

где  $n$  обозначает оскулирующее среднее движение. Далее

приближенно

$$\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda_2} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial A^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{\mu}{x_1} A_1^{(0)}.$$

Что касается среднего значения  $G_1 \cos 2\lambda_1$ , то оно в области  $G_2$  с точностью до членов второй степени относительно эксцентриситета и второго порядка относительно масс равно нулю, следовательно, приближенно имеем

$$n_0 = [n] - \frac{\mu}{x_1} A_1^{(0)} = [n] - 0'',128,$$

где  $[n]$  обозначает среднее значение оскулирующего среднего движения. Как известно, это среднее значение на  $L_1$  равно  $896'',2931$  ( $=v_1$ ). В окрестности  $L_1$   $[n]$  также немного отличается от этого значения, и, следовательно, в области  $G_2$  вблизи особой линии  $L_1$  имеем

$$n_0 = 896'',165 = v_1^{(0)}.$$

Итак, находим, что при прохождении особой линии  $L_1$  истинное среднее движение не делает никакого скачка, а непрерывно переходит в среднее движение области  $G_3$ .

Это тем более неожиданно, что в другом отношении особые линии  $L_1$  и  $L_2$  следует считать линиями разрывов. Это имеет место для амплитуды колебаний эксцентриситета.

В области  $G_2$  величина  $z$  (она приближенно равна  $\frac{1}{4} e^2$ ) колеблется между  $\rho_1$  и  $\rho_3$ , и амплитуда колебаний  $\rho_3 - \rho_1$  здесь равна

$$\rho_3 - \rho_1 = 0,0007321 + \sqrt{D'_2} - \sqrt{D'_1}. \quad (40)$$

В области  $G_3$  колебания  $z$  будут ограничены корнями  $\rho_3$  и  $\rho_4$ , а амплитуда колебаний здесь равна

$$\rho_3 - \rho_4 = 2\sqrt{D'_2}. \quad (44)$$

Если оставаться в непосредственной близости  $L_1$ , то  $D'_1 = 0$  и, следовательно, амплитуда колебаний

$$\begin{aligned} \text{в области } G_2: & \quad 0,0007321 + \sqrt{D'_2} = \alpha_2, \\ \text{» } \quad \text{» } \quad G_3: & \quad 2\sqrt{D'_2} = \alpha_3. \end{aligned}$$

Если принять во внимание, что  $D'_1$  предполагается весьма малым, то здесь приближенно имеем

$$D'_2 = -0,0000000579 + 0,0014645 \xi.$$

Таким образом, при переходе через линию  $L_1$  амплитуда колебаний делает скачок от значения  $\alpha_2$  до значения  $\alpha_3$ . Для очень малых значений  $\xi$  (которые должны быть больше 0,0000395)  $\alpha_2 > \alpha_3$ . Для  $\xi = +0,0004055$   $\alpha_2 = \alpha_3$ . Для еще больших значений  $\xi$  всегда  $\alpha_3 > \alpha_2$ .

Этот скачок в амплитуде колебаний при переходе постоянных интегрирования через особую линию является наиболее важным свойством интеграла в окрестности соизмеримостей. Следует отметить, что амплитуда колебаний изменяется скачком, а период, как уже было доказано, подвержен непрерывному изменению.

До сих пор мы не рассматривали область  $G_1$ . Здесь корни  $\rho_3$  и  $\rho_4$  комплексные, и следовало бы ожидать, что движение будет происходить между  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Но формула (29) показывает, что  $\rho_3$  отрицательно. Так как по своей природе величина  $z$  всегда положительна, то в этом случае  $\rho_2$  не может служить границей для колебаний  $z$ . С другой стороны, кажется\*), что внутри  $G_1$  имеется область, в которой  $\rho_1$  положительно, и где положительные значения  $z$  совместимы с дифференциальными уравнениями. Как надо исследовать соответствующие движения, если они вообще существуют? Дифференциальные уравнения (7) здесь непригодны. Проще всего вместо  $\Lambda_1$  и  $\lambda_1$  ввести новые канонические переменные (см. § 1 гл. VI):

$$u = \sqrt{2\Lambda_1} \cos \lambda_1, \quad v = \sqrt{2\Lambda_1} \sin \lambda_1.$$

Мы не будем исследовать этот вопрос более подробно. И без этого можно сказать, что эти орбиты, если они существуют, должны соответствовать либрации по  $\lambda_1$  около  $\lambda_1 = 0$ , так как значение  $2\lambda_1 = 180^\circ$  несовместимо со значениями этих постоянных интегрирования.

Мы видим, что линии  $L_1$  и  $L_2$  не являются единственными граничными линиями для постоянных интегрирования. Значения 0 и 1 образуют для эксцентриситета (а следовательно, 0 и 1:4 для  $\Lambda_1$ ) также граничные линии, которые нельзя пересечь.

Сопоставляя наши результаты о соизмеримости типа 1:3, приходим к следующему.

Интегралы зависят от двух постоянных интегрирования,  $\xi$  и  $\eta$ . Из них  $\eta$  приближенно совпадает с постоянной Якоби, в то время как  $\xi$  зависит от эксцентриситета. Если  $\xi$  и  $\eta$  рассматривать как прямоугольные координаты на плоскости, то эта плоскость пря-

\*) Мы говорим «кажется», так как область положительных значений  $\rho_1$  внутри  $G_1$  все же весьма мала, и поэтому не исключено, что наблюдаемая здесь степень точности может быть недостаточной, чтобы окончательно решить этот вопрос.

мыми линиями  $L_1$  и  $L_2$  будет делиться на четыре области,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ , которые характеризуют различные формы движения. Если точка  $(\xi, \eta)$  находится в  $G_4$ , то движение невозможно. В  $G_2$  неограниченно возрастает  $\lambda_1$ , в то время как  $\Lambda_1$ , а также эксцентриситет колеблются между двумя постоянными границами. В  $G_3$  эксцентриситет, а равным образом и величина  $\lambda_1$ , также колеблются между двумя постоянными границами. Около значения  $2\lambda_1 = 180^\circ$  имеет место либрация. В то время как точка  $(\xi, \eta)$  области  $G_2$  пересекает особую линию  $L_1$  и переходит в область  $G_3$ , амплитуда колебаний эксцентриситета изменяется скачком, а период этих колебаний изменяется непрерывно. В области  $G_1$  может быть либрация по  $\lambda_1$  вблизи значения  $\lambda_1 = 0$ . На линии  $L_1$  оскулирующее среднее движение при всех  $\xi$  и  $\eta$  стремится к значению  $896,293$ , на линии  $L_2$  оно имеет значение  $898,264$ . Истинное среднее движение имеет на этих линиях соответственно значение  $896,165$  и  $896,264$ . Свойства интеграла не дают никакого прямого объяснения люку в числе планет вблизи среднего движения, равного  $897''$ .

Малым планетам типа  $1/2$  посвящены исследования различных авторов. Результаты аналогичны, но не идентичны тем, которые были здесь найдены для соизмеримости типа  $1/3$ . Среди исследований можно отметить работы Гильдена, Гарцера [80], Шварцшильда [81], Пуанкаре [82], Андуайе [83], Бренделя [84] и Хилла [85]. Наиболее полными из них являются исследования Бренделя и Андуайе. Последний, между прочим, доказал, что для соизмеримости типа  $1/2$  особые линии и либрационные движения могут встретиться не только при  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_1 = 180^\circ$ , но и при промежуточных значениях  $\lambda_1$ .

## § 6. О соизмеримостях высших порядков

Соизмеримости низших порядков обуславливают большие возмущающие члены, которые уже на достаточно малых промежутках времени вызывают большие изменения в координатах. Иначе обстоит дело с соизмеримостями высших порядков. Они могут быть замечены только на больших промежутках времени. Но тем не менее они представляют весьма большой интерес, так как непосредственно эти члены наиболее важны в вопросе об устойчивости. Мы исследуем такие соизмеримости, применяя методы предыдущего параграфа.

Из возмущающей функции мы возьмем: 1) члены нулевого порядка ( $F_0$ ), 2) вековые члены ( $F$ ), 3) члены

$$\sum G_i \cos ig,$$

где

$$g = s_1 y_1 - s_2 y_2$$

и  $s_1$  и  $s_2$  обозначают большие числа, из которых  $s_2$  можно считать положительным. В таком случае мы имеем соизмеримость порядка  $s_2$ .

Полагая

$$R = \eta + F_0 + [F] + \Sigma G_i \cos ig, \quad (1)$$

где под  $\eta$  будет пониматься пока неопределенная величина, мы придем к дифференциальному уравнению (3\*) предыдущего параграфа.

Что касается коэффициентов  $G_i$ , то, как нам известно из § 4,  $G_1$  имеет порядок  $s_2$  относительно эксцентриситета. Далее,  $G_2$  имеет порядок  $2s_2$ , и вообще  $G_i$  — порядок  $is_2$ . Так как здесь  $s_2$  считается весьма большим, то  $G_1$  весьма мало, и ряд  $\Sigma G_i$  сходится очень быстро.

Для приведения уравнений движения к одной степени свободы положим

$$\lambda'_1 = s_1 y_1 - s_2 y_2, \quad \lambda'_2 = s'_1 y_1 - s'_2 y_2,$$

где  $s'_1$  и  $s'_2$  пока не определены. Если еще положить

$$x_1 = s_1 \Lambda'_1 + s'_1 \Lambda'_2, \quad x_2 = -s_2 \Lambda'_1 - s'_2 \Lambda'_2,$$

тогда  $\Lambda'_1$ ,  $\Lambda'_2$ ,  $\lambda'_1$ ,  $\lambda'_2$  также образуют систему канонических переменных, с той же самой характеристической функцией  $R$ . Разрешая последние уравнения относительно  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$ , получим

$$\Delta \Lambda'_1 = -s'_2 x_1 - s'_1 x_2, \quad \Delta \Lambda'_2 = s_2 x_1 + s_1 x_2,$$

где обозначено

$$\Delta = -s_1 s'_2 + s_2 s'_1.$$

Сделаем еще одно преобразование, полагая

$$\Delta \lambda_1 = \lambda'_1, \quad \lambda_2 = -\lambda'_2,$$

$$\Lambda_1 = \Delta \Lambda'_1, \quad \Lambda_2 = -\Delta \Lambda'_2,$$

и тогда новые переменные  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  будут всегда оставаться каноническими.

Выбор чисел  $s'_1$  и  $s'_2$  является произвольным. Можно было бы, например, этот выбор сделать так, чтобы получилось  $\Delta = 1$ . Такой выбор в некоторых случаях делается (например, для типа  $1/2$ ), но он приводит при высоких соизмеримостях к очень большим величинам координат  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , что не удобно. Для этой цели сделаем иной, более подходящий выбор. Возьмем

$$s'_1 = -1; \quad s'_2 = 0,$$

так что имеем  $\Delta = -s_2$  и координаты

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= x_2, & \lambda_1 &= -\frac{s_1}{s_2} y_1 + y_2, \\ \Lambda_2 &= x_1 + \frac{s_1}{s_2} x_2, & \lambda_2 &= y_1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

которые положим в основу последующих исследований.

Так как возмущающая функция разлагается по степеням  $x_2$  (или, правильнее сказать, по степеням  $\sqrt{x_2}$ ), то представляется целесообразным использовать  $x_2$  в качестве координаты. Величина  $\Lambda_2$  отличается от  $x_1$  только на малую величину  $\frac{s_1}{s_2} x_2$  и, наконец, аргумент  $g_1$  равен  $-s_2 \lambda_1$ .

Дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1}, \\ \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, & \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

допускают интеграл

$$\Lambda_2 = \text{const},$$

в котором постоянную обозначим через  $\sqrt{a}$ . Кроме того, имеем интеграл

$$R = 0, \quad (4)$$

так как соответствующая постоянная интегрирования может быть включена в  $\eta$ .

Дифференциальные уравнения

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} \quad (5)$$

характеризуются несколькими особыми точками, которые получим из уравнений

$$R = \frac{\partial R}{\partial \Lambda_1} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 0. \quad (6)$$

Последнее из этих уравнений имеет вид

$$\sum i G_i \sin ig = 0,$$

а так как члены этого ряда очень быстро уменьшаются по величине, как мы выше отмечали, то это уравнение обладает только решениями  $g = k\pi$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) или

$$\lambda_1 = \frac{k\pi}{s_2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6^*)$$

Так как в характеристическую функцию  $R$  величина  $\lambda_1$  входит только в комбинации  $s_2\lambda_1$ , то эти решения приводятся к двум следующим:

$$s_2\lambda_1 = 0, \quad s_2\lambda_1 = \pi. \quad (6^{**})$$

Если эти значения подставить в первое из уравнений (6), то оно примет вид

$$R_1 = \eta + F_0 + [F] + \Sigma G_i = 0 \quad (7)$$

и

$$R_2 = \eta + F_0 + [F] + \Sigma (-1)^i G_i = 0. \quad (7^*)$$

После того как из этих уравнений и соответственно уравнений

$$\frac{\partial R_1}{\partial \Lambda_1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \Lambda_1} = 0 \quad (8^*)$$

исключено  $\Lambda_1$ , получим уравнения для двух особых кривых. Запишем эти уравнения в форме

$$D_1(\alpha, \eta) = 0, \quad (9)$$

$$D_2(\alpha, \eta) = 0. \quad (9^*)$$

Функции  $D_1$  и  $D_2$  можно рассматривать как дискриминанты  $R_1$  и  $R_2$ .

Находить эти дискриминанты не обязательно. Рассмотрение интегралов можно провести проще. Ниже, ради краткости, ограничимся первым членом суммы  $\Sigma G_i \cos ig$ :

$$G_1 \cos g = G_1 \cos s_2\lambda_1,$$

так как нет никакой нужды учитывать много членов. Положим далее

$$\Phi(\alpha, \Lambda_1) = F_0 + [F], \quad (10)$$

так что теперь

$$R = \eta + \Phi(\alpha, \Lambda_1) + G_1 \cos s_2\lambda_1, \quad (11)$$

где  $G_1$  — степенной ряд относительно  $\Lambda_1$ , начинающийся с  $B\Lambda_1^{3/2}$  (через  $B$  обозначена постоянная).

Так как  $G_1$  — весьма малая величина, то интеграл (5) не на много отличается от интеграла уравнений

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1}; \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}. \quad (12)$$

По крайней мере в порядке опыта мы можем исходить из этих уравнений при отыскании интеграла уравнений (5).

Интегралы уравнений (12) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= \Lambda_1^0 = \text{const.}, \\ \lambda_1 &= n_1 t + c_1, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$n_1 = - \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1^0}. \quad (13^*)$$

Уравнения (5) имеют форму

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_1}{dt} &= -s_2 G_1 \sin s_2 \lambda_1, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda_1} \cos s_2 \lambda_1. \end{aligned}$$

Для получения интегралов этих уравнений положим

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \Lambda_1^0 + \delta\Lambda_1, \\ \lambda_1 &= n_1 t + c_1 + \delta\lambda_1, \end{aligned}$$

и разложим функцию  $\Phi$  по степеням  $\delta\Lambda_1$ :

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \Lambda_1} \delta\Lambda_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \Lambda_1^2} (\delta\Lambda_1)^2 + \dots$$

Учитывая сначала только первые степени  $\delta\Lambda_1$ , для  $\delta\Lambda_1$  и  $\delta\lambda_1$  получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\Lambda_1}{dt} &= -s_2 G_1 \sin s_2 (n_1 t + c_1), \\ \frac{d\delta\lambda_1}{dt} &= - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \Lambda_1^2} \delta\Lambda_1 - \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda_1} \cos s_2 \lambda_1, \end{aligned}$$

интегралы которых будут

$$\left. \begin{aligned} \delta\Lambda_1 &= \frac{G_1}{n_1} \cos s_2 (n_1 t + c_1), \\ \delta\lambda_1 &= - \frac{1}{s_2 n_1} \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \Lambda_1^2} \frac{G_1}{n_1} + \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda_1} \right) \sin s_2 (n_1 t + c_1). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти выражения показывают, что  $\Lambda_1$  и  $\lambda_1$  из-за наличия члена  $G_1 \cos s_2 \lambda_1$  испытывают в общем случае только малые периодические отклонения от тех значений, которые даются уравнениями (13).

Но этот вывод несправедлив, если величина  $n_1$  весьма мала или равна нулю; в этом случае выражения (14) становятся неограниченно большими. Для исследования этого случая мы будем исходить из такого значения для  $\Lambda_1$ , при котором  $n_1$ , т. е.  $\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1}$ .

обращается в нуль. Пусть  $\Lambda_1 = \rho$  представляет такое значение, что

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda_1}\right)_{\Lambda_1=\rho} = 0. \quad (15)$$

Тогда имеем

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Lambda_1^2} (\delta\Lambda_1)^2 + \dots,$$

где  $\Phi_0$  и ее производные должны быть вычислены для значения  $\Lambda_1 = \rho$ .

Для  $R$  получим значение

$$R = \eta + \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Lambda_1^2} (\delta\Lambda_1)^2 + G_1 \cos s_2\lambda_1.$$

Пусть  $\eta_1$  — такое значение, что

$$\eta_1 + \Phi_0 = 0. \quad (16)$$

Положим затем

$$\eta = \eta_1 + \Delta\eta;$$

тогда характеристическая функция получит форму

$$R = \Delta\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Lambda_1^2} (\delta\Lambda_1)^2 + G_1 \cos s_2\lambda_1, \quad (17)$$

а дифференциальные уравнения будут допускать интеграл

$$R = 0. \quad (17^*)$$

Теперь наши дифференциальные уравнения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta\Lambda_1}{dt} &= -s_2G \sin s_2\lambda_1, \\ \frac{d\delta\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Lambda_1^2} \delta\Lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

В  $R$  мы пренебрегли тем изменением, которое испытывает величина  $G$  вследствие перехода от значения  $\Lambda_1 = \rho$  к значению  $\Lambda_1 = \rho + \Delta\Lambda_1$ .

Особые значения  $\Delta\eta$  получаются из уравнений

$$R = \frac{\partial R}{\partial\Lambda_1} = \frac{\partial R}{\partial\lambda_1} = 0,$$

которые дают

$$\begin{aligned} \delta\Lambda_1 &= 0, \\ s_2\lambda_1 &= 0 \text{ или } \pi, \end{aligned}$$

так что дискриминанты примут вид

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \Delta\eta + G_1 = 0, \\ D_2 &= \Delta\eta - G_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Существуют только две особые точки  $\Delta\eta = -G_1$  и  $\Delta\eta = G_1$ . Из уравнений (18) и (17\*) теперь получаем

$$\frac{d\delta\Lambda_1}{dt} = -s_2 \sqrt{G_1^2 - \left[\Delta\eta + \frac{1}{2} \Phi''(\delta\Lambda_1)\right]^2}, \quad (20)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\sqrt{-2\Phi''(\Delta\eta + G_1 \cos s_2 \lambda_1)}. \quad (20^*)$$

Достаточно проинтегрировать одно из этих уравнений.

Сначала исследуем значение  $\Phi''$ . Предварительно нужно определить только знак этой величины. Согласно (2) и уравнению (1) предыдущего параграфа имеем

$$F_0 = \frac{1}{2 \left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2} \Lambda_1\right)^2} + N \left(\Lambda_2 - \frac{s_1 + s_2}{s_2} \Lambda_1\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda_1} = \frac{s_1}{s_2} \frac{1}{\left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2} \Lambda_1\right)^3} - \frac{s_1 + s_2}{s_2} N,$$

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_1^2} = \frac{3s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{\left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2} \Lambda_1\right)^4}.$$

Производные от  $\Phi$  необходимо вычислить для значения  $\Lambda_1 = \rho$ , которое выбирается так, чтобы обращалось в нуль  $\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_1}$ . Имеем тогда

$$\frac{s_1}{s_2} \frac{1}{\left(\Lambda_2 - \frac{s_1}{s_2} \rho\right)^3} - \frac{s_1 + s_2}{s_2} N + \frac{\partial |F|}{\partial \Lambda_1} = 0.$$

Последний член в этом выражении умножен на возмущающую массу, и, таким образом, весьма мал. Множитель при  $\frac{s_1}{s_2}$  в первом члене совпадает с оскулирующим средним движением  $n$  для  $\Lambda_1 = \rho$ . Итак, приближенно имеем

$$s_1 n - (s_1 + s_2) N = 0,$$

так что для соответствующих значений  $\Lambda_1$  среднее движение малой планеты близко к соизмеримости со средним движением Юпитера.

Вторая производная от  $\Phi$  почти совпадает со второй производной от  $F_0$ . Формула для  $F_0''$  показывает, что  $\Phi''$  положительно.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\delta\Lambda_1}{dt} = -s_2 \sqrt{G_1^2 - \left[\Delta\eta + \frac{1}{2}\Phi''(\delta\Lambda_1)^2\right]^2} =$$

$$= -\frac{s_2}{2}\Phi'' \sqrt{-(\delta\Lambda_1 - e_1)(\delta\Lambda_1 - e_2)(\delta\Lambda_1 - e_3)(\delta\Lambda_1 - e_4)}, \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}, \\ e_2 &= +\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}, \\ e_3 &= -\sqrt{-\frac{2(G_1 + \Delta\eta)}{\Phi''}}, \\ e_4 &= +\sqrt{-\frac{2(G_1 + \Delta\eta)}{\Phi''}}. \end{aligned} \right\} \quad (21^*)$$

По (19) особые значения для  $\Delta\eta$  будут  $\Delta\eta = -G_1$  и  $\Delta\eta = G_1$ . Если  $\Delta\eta > G_1$  (эту величину мы предполагаем положительной), то все корни комплексные, и тогда  $\frac{d\delta\Lambda_1}{dt}$  также комплексное, так что такие значения  $\Delta\eta$  рассматривать не нужно.

Итак, необходимо исследовать следующие четыре случая:

- a)  $\Delta\eta < -G_1$ ,
- b)  $\Delta\eta = -G_1$ ,
- c)  $-G_1 < \Delta\eta < G_1$ ,
- d)  $\Delta\eta = G_1$ .

**С л у ч а й а).** Как видно из уравнения (21), если не происходит предельное движение, то  $\delta\Lambda_1$  должно осциллировать между двумя наибольшими или двумя наименьшими корнями  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Порядок величин в случае а)  $e_1 < e_3 < e_4 < e_2$ , так что  $\delta\Lambda_1$  периодически колеблется либо между  $e_1$  и  $e_3$ , либо между  $e_4$  и  $e_2$ . Угловая величина  $\lambda_1$  неограниченно растет вместе со временем.

**С л у ч а й б).** При  $\Delta\eta = G_1$  корни  $e_3$  и  $e_4$  совпадают. Это соответствует предельному движению по  $\delta\Lambda_1$ , так что  $\Lambda_1$  асимптотически стремится к значению  $\rho$ , оставаясь всегда либо меньше  $\rho$ , либо всегда больше  $\rho$ .

**С л у ч а й в).** Здесь  $e_1 < e_2$ . Корни  $e_3$  и  $e_4$  комплексные. Здесь  $\delta\Lambda_1$  колеблется между границами

$$-\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}} \quad \text{и} \quad +\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}.$$

Уравнение (20\*) показывает, что величина  $s_2\lambda_1$  не растет неограниченно вместе со временем, а периодически колеблется около значения  $s_2\lambda_1 = 180^\circ$ . Таким образом, здесь имеет место либрация по  $\lambda_1$ . Если бы  $G_1$  было отрицательно, то имела бы место либрация около значения  $\lambda_1 = 0$ .

С л у ч а й d).  $\Delta\eta = G_1$ ; тогда  $\delta\Lambda_1$  должно быть тождественно равно нулю, и, следовательно,  $\Lambda_1$  всегда равно  $\rho$ .

Амплитуда колебаний в случае а) равна

$$e_2 - e_4 = e_3 - e_1 = \sqrt{\frac{2}{\Phi''}} [\sqrt{G_1 - \Delta\eta} - \sqrt{-(G_1 + \Delta\eta)}],$$

и значит, остается одной и той же, независимо от того, будет ли колебаться  $\delta\Lambda_1$  между  $e_1$  и  $e_3$  или между  $e_4$ ,  $e_2$ .

В случае с) эта амплитуда равна

$$e_2' - e_1 = 2\sqrt{\frac{2(G_1 - \Delta\eta)}{\Phi''}}.$$

Если значение  $\Delta\eta$  близко к особой точке  $-G_1$ , так что приближенно  $\Delta\eta = -G_1$ , то амплитуда в случае а) равна  $\sqrt{\frac{4G_1}{\Phi''}}$ ,

а в случае с) —  $2\sqrt{\frac{4G_1}{\Phi''}}$ ; следовательно, при переходе через особую точку от случая а) к случаю с) амплитуда колебаний удваивается. Таким образом, особая точка  $\Delta\eta = -G_1$  является для амплитуды колебаний точкой разрыва непрерывности, которая ведет себя так же, как соответствующая особая линия для соизмеримости типа  $1/3$ .

Как же ведут себя средние движения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ? Претерпевают ли они также разрывы в точке  $\Delta\eta = -G_1$ ?

Уравнение (21) дает в случае а) для полупериода колебаний  $T$  значение

$$T = \frac{2}{s_2\Phi''} \int_{e_1}^{e_3} \frac{d\delta\Lambda_1}{\sqrt{(e_3 - \delta\Lambda_1)(\delta\Lambda_1 - e_1)(e_2 - \delta\Lambda_1)(e_4 - \delta\Lambda_2)}}, \quad (22)$$

если имеет место колебание между  $e_1$  и  $e_3$ . Если бы колебания происходили между  $e_4$  и  $e_2$ , то значение полупериода можно было бы получить, взяв приведенный интеграл в пределах от  $e_4$  до  $e_2$ .

Как изменяется  $T$ , когда  $\Delta\eta$  стремится к значению  $G_1$ ? Полагая

$$\delta\Lambda_1 = \frac{e_1 h^2 + e_3 y^2}{h^2 + y^2}, \quad (23)$$

где

$$h^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_3 - e_1}, \quad (23^*)$$

приведем эллиптический интеграл к нормальной форме, и тогда получим

$$T = \frac{4}{s_2 \Phi'' \sqrt{(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

где модуль  $k$  имеет значение

$$k = \sqrt{\frac{(e_2 - e_4)(e_3 - e_1)}{(e_4 - e_1)(e_2 - e_3)}} = \frac{\sqrt{G_1 - \Delta\eta} - \sqrt{-(G_1 + \Delta\eta)}}{\sqrt{G_1 - \Delta\eta} + \sqrt{-(G_1 + \Delta\eta)}}. \quad (24)$$

Если  $\Delta\eta$  стремится к значению  $\Delta\eta = -G_1$ , то  $k$  стремится к единице и одновременно  $T$  неограниченно возрастает. Если бы движение происходило между  $e_4$  и  $e_2$ , то для  $T$  получилось бы то же самое значение.

Мы видим, что в случае, когда все корни  $e_1, e_2, e_3$  и  $e_4$  действительны, колебания замедляются, если  $\Delta\eta$  стремится к особой точке  $\Delta\eta = -G_1$ . Движение постепенно и без скачка переходит в предельное. Это можно выразить также и так, что среднее движение по  $\lambda_1$  стремится к нулю, если  $\Delta\eta$  при возрастании стремится к  $\Delta\eta = -G_1$ .

Как же обстоит дело с либрационным случаем (случай с)? Среднее движение по  $\lambda_1$  всегда равно нулю, а величина  $\lambda_1$  периодически колеблется около значения  $\lambda_1 = 180^\circ$ . Каков же период этих колебаний?

Величина  $\delta\Lambda_1$  колеблется между  $e_1$  и  $e_2$ ; корни  $e_3$  и  $e_4$  чисто мнимые. Здесь полупериод  $T$  имеет значение

$$T = \frac{2}{s_2 \Phi''} \int_{e_3}^{e_2} \frac{d\delta\Lambda_1}{\sqrt{(e_2 - \delta\Lambda_1)(\delta\Lambda_1 - e_1)(\delta\Lambda_1^2 - e_4^2)}}, \quad (25)$$

который может быть преобразован при помощи подстановки

$$\delta\Lambda_1 = e_2 \sqrt{1 - z^2} \quad (25^*)$$

к нормальной форме. Получаем

$$T = \frac{2}{s_2 \sqrt{\Phi'' G_1}} \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k^2z'^2)}},$$

где

$$k = \sqrt{\frac{G_1 - \Delta\eta}{2G_1}}. \quad (25^{**})$$

Если  $\Delta\eta$  стремится к значению  $-G_1$ , то модуль  $k$  возрастает до единицы и одновременно неограниченно растет полупериод  $T$ . Если приближаться к особой точке  $G_1$ , то в области либрации

колебания становятся медленнее. Здесь также движение непрерывно переходит в предельное.

Если вспомнить, что по (2)

$$\lambda_1 = -\frac{s_1}{s_2}(l + \pi - Nt) - \pi + Nt, \quad \lambda_2 = l + \pi - Nt,$$

то из того обстоятельства, что среднее движение по  $\lambda_1$  при переходе через особую точку  $\Delta\eta = -G_1$  имеет регулярное (непрерывное) изменение, отнюдь не следует, что это справедливо также и для средних движений по  $l$  и  $\pi$ . Необходимо, чтобы среднее движение по  $\lambda_2$  было непрерывной функцией от  $\Delta\eta$ . Но теперь

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \Lambda_2} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \Lambda_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \Lambda_1^2 \partial \Lambda_2} (\delta\Lambda_1)^2 - \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda_2} \cos s_2 \lambda_1.$$

Выясним вопрос, как ведет себя среднее значение  $(\delta\Lambda_1)^2$ , когда  $\Delta\eta$  переходит через точку  $-G_1$ .

Если  $\Delta\eta < -G_1$ , то обращение (21) дает

$$\delta\Lambda_1 = \frac{e_1 h^2 + e_2 y^2}{h^2 + y^2},$$

где

$$y = \operatorname{sn} u$$

и  $u$  имеет значение

$$u = \frac{1}{4} s_2 \Phi'' \sqrt{(e_4 - e_1)(e_2 - e_3)} t + \operatorname{const}.$$

Итак, величина  $\delta\Lambda_1$  является периодической функцией  $u$  с периодом  $2K$ . Это имеет место и для  $(\delta\Lambda_1)^2$ . Если  $(\delta\Lambda_1)^2$  разложить в ряд Фурье, то постоянный член в этом разложении равен среднему значению  $(\delta\Lambda_1)^2$ . Оно равно

$$[(\delta\Lambda_1)^2] = \frac{1}{K} \int_0^K \left[ \frac{e_1 h^2 + e_2 \operatorname{sn}^2 u}{h^2 + \operatorname{sn}^2 u} \right]^2 du.$$

Этот интеграл можно точно вычислить, однако достаточно узнать его значение в окрестности точки  $\Delta\eta = -G_1$ . Мы уже видели, что в этом случае  $k$  принимает значение, равное единице. Затем будем иметь  $h^2 = 1$  и

$$\operatorname{sn}^2 u = \left( \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \right)^2$$

и, следовательно,

$$[(\delta\Lambda_1)^2] = \frac{e_2^2}{K} \int_0^K \frac{4du}{[e^{2u} + e^{-2u}]^2}, \quad (25^{***})$$

где  $K$  неограниченно растет, когда  $k^2$  стремится к единице. Но

$$\int \frac{4du}{[e^{2u} + e^{-2u}]^2} = -\frac{1}{1 + e^{4u}},$$

так что

$$\int_0^{\infty} \frac{4du}{[e^{2u} + e^{-2u}]^2} = \frac{1}{2}$$

и, значит,

$$[(\delta\Lambda_1)^2] = 0.$$

В случае либрации обращение (21) приводит к

$$\delta\Lambda_1 = e_2 \operatorname{cn} u_1,$$

где

$$u_1 = s_2 \sqrt{G_1 \Phi'' t + \text{const}},$$

а модуль имеет значение (25\*\*). Среднее значение  $(\delta\Lambda_1)^2$  здесь будет равно

$$[(\delta\Lambda_1)^2] = \frac{e_2^2}{K} \int_0^K \operatorname{cn}^2 u_1 du_1.$$

Но

$$\frac{1}{K} \int_0^K \operatorname{cn}^2 u_1 du_1 = -\frac{k^2}{k^2} + \frac{E}{k^2 K},$$

где через  $K$  и  $E$  обозначены эллиптические интегралы первого и второго рода. Если  $k^2$  стремится к единице, то  $E$  также стремится к единице, в то время как  $K$  неограниченно растет. Итак, здесь также

$$[(\delta\Lambda_1)^2] = 0.$$

Таким образом, среднее движение по  $\lambda_2$  не претерпевает разрыва, когда  $\Delta\eta$  переходит через точку  $-G_1$ .

Относительно соизмеримостей высших порядков мы приходим к следующим выводам:

#### 1. Член

$$G_1 \cos(s_1 y_1 - s_2 y_2)$$

в возмущающей функции обуславливает только малые перIODические изменения с амплитудой, которая в окрестности соизмеримости имеет порядок  $\sqrt{G_1}$ .

2. Угловая величина  $s_1 y_1 - s_2 y_2$  в общем случае неограниченно растет. Но если постоянная Якоби лежит внутри определенной (впрочем, весьма малой) области, то возникает либрация

этой угловой величины, так что  $s_1y_1 - s_2y_2$  колеблется около значения  $180^\circ$ , если  $G_1$  положительно. Если  $G_1$  отрицательно, то происходит либрация около значения  $s_1y_1 - s_2y_2 = 0$ .

3. При переходе через границы этой области от «обыкновенного» случая к либрационному амплитуда колебаний по  $\Lambda_1$  удваивается. Средние движения по  $l$  (средняя аномалия) и по долготе перигелия испытывают при этом только непрерывные изменения.

### § 7. О представлении интеграла задачи трех тел в чисто тригонометрической форме

Первые попытки (XVIII в.) отыскания интеграла задачи трех тел позволили установить, что в возмущениях первого порядка в эксцентриситете и наклонности появляются члены, возрастающие пропорционально времени. Но из так называемого доказательства устойчивости Лапласа и Лагранжа вытекает, что на эти члены следует смотреть только как на первые члены разложения в степенные ряды долгопериодических тригонометрических выражений, и поэтому имеется возможность представить координаты планет в чисто тригонометрической форме. Такое представление имеет важное значение как в практическом, так и теоретическом отношении. Если произвольную координату можно представить в форме

$$x = \Sigma A \cos (i_1 w_1 + i_2 w_2 + \dots + i_s w_s),$$

где  $w_1, w_2, \dots, w_s$  обозначают линейные функции времени, и если  $\Sigma A$  конечна, то, во-первых, можно найти предельные значения координаты, чтобы окончательно ответить на вопрос об устойчивости, во-вторых, приведенный ряд для  $x$  можно применить для всех моментов времени. Если подобные ряды получаются для произвольных небесных тел, то они будут справедливы для любых моментов времени. Тогда основная работа состояла бы при расчетах возмущений в точном определении постоянных интегрирования. Каждое новое наблюдение светила сделало бы вклад в это определение постоянных и позволило бы еще более точно вычислять коэффициенты и средние движения «аргументов»  $w_r$ .

Вычисление возмущений принимает совсем другой вид, если координаты будут представляться при помощи рядов, которые справедливы только для ограниченных интервалов времени. Тогда все вычисления возмущений должны время от времени выполняться заново. Форма представления может оставаться той же, но коэффициенты различных членов будут постоянно изменять свои значения.

Попытки осуществить идеи Лапласа о получении тригонометрической формы интеграла оказываются связанными с большими

трудностями. В своих исключительно интересных исследованиях орбит больших планет Леверье предпринимал различные попытки преодолеть эти трудности; он вынужден был отказаться от тригонометрической формы интеграла, и как и Ньюкомб, который почти одновременно с Леверье выполнил полные исследования орбит планет, должен был, по крайней мере частично, искать выход в разложениях по степеням времени.

Наиболее серьезно за проблему представления координат в задаче трех тел в чисто тригонометрической форме принялся Гильден. Его усилия после выхода работы [86] были направлены исключительно на решение этой проблемы. При этом он открыл много важных путей рассмотрения проблемы. Но преждевременная смерть оборвала его труд именно тогда, когда он сам верил, что его исследования настолько продвинулись, что могут дать основу для вычисления «абсолютных орбит» больших планет (т. е. главных членов в тригонометрической форме интеграла).

Только одному исследователю удалось в одном специальном случае полностью выполнить это представление координат в чисто тригонометрической форме. Этим исследователем был Делоне, который в ранее цитировавшейся работе «Теория движения Луны» своеобразным методом добился представления координат этого светила в чисто тригонометрической форме\*). Практический успех его метода в значительной мере зависит от того, что возмущающее тело (Солнце) движется на значительном удалении от возмущаемого тела (Луны); остается под вопросом, можно ли реализовать метод Делоне в более общем случае. По-видимому, он окажется вполне пригодным для малых планет, средние движения которых почти соизмеримы со средними движениями больших планет (ср. ранее цитированную работу Хилла по этому вопросу). Помимо практического значения метода Делоне, он очень подходит для понимания того, как в формальном отношении действительно можно добиться чисто тригонометрической формы решения задачи. Это доказательство было дано Тиссераном [87]. Не задаваясь целью приводить полное изложение этих идей, мы дадим некоторые указания о соответствующих вычислительных операциях.

Предположим, что речь идет об интегрировании дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\* ) Позднее Хилл и после него Браун добились той же цели иным путем

где

$$F = \Phi + \Sigma A_{ij} \cos (iy_1 + jy_2), \quad (1^*)$$

а  $\Phi$  и  $A_{ij}$  суть заданные аналитические функции  $x_1$  и  $x_2$ .

Возьмем из возмущающей функции  $F$  произвольный член

$$A_{i,j_1} \cos (i_1y_1 + j_1y_2)$$

и положим

$$F_1 = \Phi + A_{i,j_1} \cos (i_1y_1 + j_1y_2).$$

Рассматривая сначала уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

можно на определенные из них координаты смотреть как на координаты промежуточной орбиты  $J_1$ . Соответствующим изменением постоянной  $j_1$  можно удовлетворить точным уравнениям (1).

На интегрирование уравнений (2) можно смотреть как на частный случай проблемы Делоне, которая рассматривалась в § 4. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= i_1' y_1 + j_1' y_2, \\ \eta_2 &= i_1 y_1 + j_1 y_2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $i_1'$  и  $j_1'$  обозначают произвольные целые числа, которые можно выбрать так, что определитель  $i_1' j_1 - j_1 i_1'$  будет иметь значение  $+1$ . Кроме того,  $i_1$  и  $j_1$  предполагаются взаимно простыми (что здесь может быть сделано). Определим далее две величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  из соотношений

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= i_1 \xi_1 + i_1' \xi_2, \\ x_2 &= j_1 \xi_1 + j_1' \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Как известно из § 1, это преобразование не нарушает канонической формы дифференциальных уравнений.

Но теперь дифференциальные уравнения для  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  имеют форму, которую мы предполагали в проблеме Делоне. В соответствии с (10) § 4 мы можем написать выражения для координат промежуточной орбиты  $J_1$ , а именно:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 &= \eta_1 + 2 \sum \frac{\partial B_i}{\partial \alpha_1} \sin i \eta_1, \\ -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 &= \eta_2 + 2 \sum \frac{\partial B_i}{\partial \alpha_2} \sin i \eta_1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_1 + 2 \sum i B_i \cos i \eta_1, \\ \xi_2 &= \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} \eta_1' &= -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1, \\ \eta_2' &= -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Разрешая уравнения (4) относительно  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1' + \sum D_i \sin i\eta_1', \\ \eta_2 &= \eta_2' + \sum E_i \sin i\eta_1', \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_1 + \sum F_i \cos i\eta_1', \\ \xi_2 &= \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (6^*)$$

причем  $F_0$  не обязательно должно быть равно нулю.

Из (3) и (3\*) получим далее, принимая во внимание предположение о целых числах  $i_1'$  и  $j_1'$ ,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= j_1' \eta_1 - j_1 \eta_2 = \\ &= j_1' \eta_1' - j_1 \eta_2' + \sum (j_1' D_i - j_1 E_i) \sin i \eta_1', \\ y_2 &= -i_1' \eta_1 + i_1 \eta_2 = \\ &= -i_1' \eta_1' + i_1 \eta_2' + \sum (-i_1' D_i + i_1 E_i) \sin i \eta_1', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= i_1 \alpha_1 + i_1' \alpha_2 + \sum i_1 F_i \cos i \eta_1', \\ x_2 &= j_1 \alpha_1 + j_1' \alpha_2 + \sum j_1 F_i \cos i \eta_1'. \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

Наконец, сделаем еще линейную подстановку, полагая

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= j_1' \eta_1' - j_1 \eta_2', \\ y_2' &= -i_1' \eta_1' + i_1 \eta_2' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= j_1 x_1 - i_1 x_2, \\ \alpha_2 &= -j_1 x_1 + i_1 x_2. \end{aligned} \right\}$$

Последние соотношения могут быть записаны также в форме

$$\left. \begin{aligned} \eta_1' &= i_1 y_1' + j_1 y_2', \\ \eta_2' &= i_1' y_1' + j_1' y_2' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= i_1 \alpha_1 + i_1' \alpha_2, \\ x_2' &= j_1 \alpha_1 + j_1' \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

Мы утверждаем, что дифференциальные уравнения (1) можно заменить системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y'_1}, & \frac{dy'_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x'_1}, \\ \frac{dx'_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y'_2}, & \frac{dy'_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x'_2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Действительно, мы видели, что переход от переменных  $x_1, x_2, y_1, y_2$  к переменным  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  не может нарушить канонической формы уравнений. Далее, теорема о преобразованиях Якоби из § 1 показывает, что переход от последних переменных к переменным  $\alpha_1, \alpha_2, \eta'_1, \eta'_2$  также сохраняет каноническую форму. В самом деле, согласно (9) § 4 имеем

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= -\frac{\partial C}{\partial \alpha_1} t + \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, & \xi_1 &= \frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \\ \eta'_2 &= -\frac{\partial C}{\partial \alpha_2} t + \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, & \xi_2 &= \frac{\partial S}{\partial \eta_2}, \end{aligned}$$

где  $S$  является определенной функцией от  $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2$  и по формуле (8\*) § 4 имеет форму

$$S = \alpha_2 \eta_2 + W(\eta_1, \alpha_1, \alpha_2).$$

Итак, согласно теореме о преобразованиях Якоби  $\alpha_1, \alpha_2, \eta'_1, \eta'_2$  также образуют каноническую систему с той же самой характеристической функцией  $F$ . Наконец, линейная подстановка (9) и (9\*) очевидно оставляет неизменной каноническую форму.

По (7) и (7\*) старые переменные  $x_1, x_2, y_1, y_2$  связаны с новыми переменными  $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2$  следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y'_1 + \sum D'_s \sin s (i_1 y'_1 + j_1 y'_2), \\ y_2 &= y'_2 + \sum E'_s \sin s (i_1 y'_1 + j_1 y'_2), \\ x_1 &= x'_1 + \sum F'_s \cos s (i_1 y'_1 + j_1 y'_2), \\ x_2 &= x'_2 + \sum G'_s \cos s (i_1 y'_1 + j_1 y'_2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $s$  изменяется от нуля до  $\infty$ , а  $F'_0$  и  $G'_0$  не обязательно должны быть равны нулю.

Все коэффициенты  $A_{ij}$  в возмущающей функции умножены на возмущающую массу  $\mu$ . Если бы  $A_{i,j}$  были равны нулю, то, очевидно, все коэффициенты периодических членов в (11) обратились бы в нуль и мы имели бы

$$y_1 = y'_1, \quad y_2 = y'_2, \quad x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2.$$

Это замечание важно в том случае, когда рассматривается изменение возмущающей функции при введении вместо  $x_1, x_2, y_1, y_2$  величин  $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2$ .

Рассмотрим новую форму возмущающей функции. Положим

$$F = F_1 + F'_1.$$

Выражая  $x_1, x_2, y_1, y_2$  через новые переменные, в соответствии с (3\*) § 4 приведем  $F_1$  к функции от  $x'_1$  и  $x'_2$ , которая не зависит ни от  $y'_1$ , ни от  $y'_2$ . Итак, положим

$$F_1 = \Phi_1(x'_1, x'_2). \quad (12)$$

Что касается  $F'_1$ , то эта функция содержит все члены из  $F$ , за исключением «вековых» членов, которые содержатся в  $\Phi$ , и периодического члена  $A_{i,j} \cos(i_1 y_1 + j_1 y_2)$ . Если теперь ввести новые переменные  $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2$ , то  $F'_1$  примет вид

$$F'_1 = \Sigma A'_{ij} \cos(i y'_1 + j y'_2), \quad (13)$$

и в соответствии со сделанным ранее замечанием о рядах (11) новые коэффициенты  $A'_{ij}$  будут отличаться от соответствующих коэффициентов в ряде (1\*) только на величину порядка квадрата возмущающей массы. В (13) также может, пожалуй, встретиться член вида

$$A'_{i,j} \cos(i_1 y'_1 + j_1 y'_2).$$

Но в таком случае этот член умножается на квадрат возмущающей массы, в то время как член

$$A_{i,j} \cos(i_1 y_1 + j_1 y_2), \quad (14)$$

который мы брали в промежуточной орбите  $J_1$ , содержит множителем первую степень возмущающей массы.

Итак, при помощи промежуточной орбиты  $J_1$  мы получили возмущающую функцию, в которую член (14) либо вообще не входит, либо приобретает еще более незначительный коэффициент.

Мы сделаем теперь еще одно преобразование Делоне или «операцию», как это преобразование называет сам Делоне. Из возмущающей функции  $F'_1$  выберем член

$$A'_{i_2,j_2} \cos(i_2 y'_1 + j_2 y'_2) \quad (14^*)$$

и определим новую промежуточную орбиту  $J_2$  при помощи

уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'_1}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial y'_1}, & \frac{dy'_1}{dt} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x'_1}, \\ \frac{dx'_2}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial y'_2}, & \frac{dy'_2}{dt} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x'_2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$F_2 = \Phi_1 + A'_{ij} \cos (i_2 y'_1 + j_2 y'_2). \quad (15^*)$$

Аналогично предыдущему можно записать интеграл этих уравнений в форме

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y''_1 + \sum D_s \sin s (i_2 y''_1 + j_2 y''_2), \\ y'_2 &= y''_2 + \sum E_s \sin s (i_2 y''_1 + j_2 y''_2), \\ x'_1 &= x''_1 + \sum F_s \cos s (i_2 y''_1 + j_2 y''_2), \\ x'_2 &= x''_2 + \sum G_s \cos s (i_2 y''_1 + j_2 y''_2), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и теперь дифференциальные уравнения (1) можно заменить уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx''_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y''_1}, & \frac{dy''_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x''_1}, \\ \frac{dx''_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y''_2}, & \frac{dy''_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x''_2}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где характеристическая функция  $F$  теперь имеет следующую форму. Если положить

$$F = F_2 + F'_2,$$

то  $F_2$  приведется к функции от  $x''_1$  и  $x''_2$ :

$$F_2 = \Phi_2 (x''_1, x''_2).$$

Что касается  $F'_2$ , то имеем

$$F'_2 = \sum A'_{ij} \cos (i y''_1 + j y''_2),$$

и в этой сумме члены вида (14) и (14\*) либо не встречаются вообще, либо они имеют намного меньшие коэффициенты, чем в прежней возмущающей функции\*). Так новыми операциями можно последовательно убирать или уменьшать члены один за другим.

\*) Следует отметить, что одновременно с членом  $A \cos (i y_1 + j y_2)$  можно уничтожить также все члены вида  $A_s \cos s (i y_1 + j y_2)$ . Ср. § 4.

Будем предполагать, что после серии из  $r$  таких операций получается возмущающая функция  $F_r$ , в которой периодические члены численно настолько малы, что ими можно пренебречь. Значение  $F_r$  сводится к вековому члену  $\Phi_r$ , который зависит от  $x_1^{(r)}$  и  $x_2^{(r)}$ . Тогда получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1^{(r)}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_1^{(r)}}, & \frac{dy_1^{(r)}}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1^{(r)}}, \\ \frac{dx_2^{(r)}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_2^{(r)}}, & \frac{dy_2^{(r)}}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_2^{(r)}}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

которые дают для  $x_1^{(r)}$  и  $x_2^{(r)}$  постоянные значения, а для  $y_1^{(r)}$  и  $y_2^{(r)}$  значения

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(r)} &= n_1 t + c_1, \\ y_2^{(r)} &= n_2 t + c_2, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= -\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1^{(r)}}; \\ n_2 &= -\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_2^{(r)}}. \end{aligned}$$

Если теперь выполнить все подстановки, которые даются уравнениями (11), (16) и т. д., то получим

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= n_1 t + c_1 + \sum D_{ij} \sin [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)], \\ y_2 &= n_2 t + c_2 + \sum E_{ij} \sin [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)], \\ x_1 &= \sum F_{ij} \cos [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)], \\ x_2 &= \sum G_{ij} \cos [i(n_1 t + c_1) + j(n_2 t + c_2)], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

что и дает выражения для координат в чисто тригонометрической форме.

Мы предполагали здесь, что имеем дело с движением только с двумя степенями свободы. Но приведенный выше метод, очевидно, можно применить к каноническим дифференциальным уравнениям произвольного порядка. Видимо, для канонической системы с  $p$  степенями свободы получим в общем случае также  $p$  различных так называемых аргументов

$$n_1 t + c_1, \quad n_2 t + c_2, \quad \dots, \quad n_p t + c_p.$$

В § 10 гл. V мы нашли, что дифференциальные уравнения задачи трех тел могут быть сведены к четырем степеням свободы. Поэтому элементы  $L, \Gamma, L', \Gamma', l, g, l', g'$  могут быть выражены при помощи тригонометрических рядов с четырьмя аргументами. Если выразить аналогичным образом прямоугольные координаты, то получим еще такой аргумент, который выражается через среднюю долготу общей линии узлов обеих орбит. Этот аргумент можно получить из уравнений (12) § 10.

Итак, в проблеме трех тел прямоугольные координаты могут быть выражены при помощи чисто тригонометрических рядов с пятью аргументами, которые все являются линейными функциями времени. Если движение происходит в плоскости, то координаты выражаются через ряды с четырьмя аргументами.

В плоской астероидной задаче трех тел, в которой возмущающее тело движется вокруг Солнца по круговой орбите, координаты можно выразить через тригонометрические ряды с тремя аргументами. (В пространственной задаче появляется еще один аргумент.)

Гениальный метод Делоне весьма универсален и имеет большие преимущества перед другими методами, которыми пытались воспользоваться для получения решения проблемы трех тел в тригонометрической форме. Но он страдает двумя существенными недостатками, которые ограничивают его применение. Во-первых, в практическом отношении он весьма трудоемок. Делоне выполнил не менее 497 операций, прежде чем получил возмущающую функцию, которая, в пределах принятой им точности, не содержала никаких периодических членов. Такая гигантская работа могла быть уместна для случая орбиты нашего спутника. Для других небесных тел должны быть найдены более компактные методы.

Во-вторых, необходимо учесть еще один существенный теоретический недостаток. Выше мы молчаливо предполагали, что ни одна из введенных промежуточных орбит не должна обладать либрацией по  $y_1$  или  $y_2$  (соответственно по  $y'_1, y'_2$  или  $y''_1, y''_2$  и т. д.). Но если бы имел место этот случай, возможность которого необходимо предусмотреть, то при вариации элементов такой промежуточной орбиты эти вариации проходили бы иногда внутри либрационных границ упомянутой орбиты, а иногда вне ее. Но как в таком случае можно вывести тригонометрическую форму решения? Следует заметить, что такой случай едва ли можно избежать при соизмеримостях высших порядков. Поэтому доказательство существования тригонометрической формы решения проблемы трех тел с помощью метода Делоне оказывается нестрогим. Обусловлен ли этот результат природой задачи или дефектом метода — этот вопрос оставим пока открытым.

### § 8. О представлении интеграла задачи трех тел в тригонометрической форме (продолжение)

Если выражать координаты в проблеме трех тел в тригонометрической форме, то необходимо тем или иным образом использовать промежуточную орбиту, параметры которой изменяются таким образом, чтобы можно было представить истинную орбиту. Обычно с этой целью вводится кеплеровский эллипс, хотя он для этой цели мало пригоден. Наибольшая заслуга Гильдена состоит в том, что он различными способами показал, что основное условие сходимости последовательных приближений состоит в том, чтобы с самого начала исходить из подвижного эллипса, а не из эллипса с неподвижной линией асид, каким является обычный кеплеровский эллипс. Эти весьма простые, но важные исходные идеи в той или иной форме встречаются во всех методах, которые выдвигались в последнее время для вывода тригонометрической формы решения.

В формальном отношении очень гибким при отыскании решения оказывается уравнение Гамильтона — Якоби. Наиболее плодотворно оно используется Пуанкаре в его исследованиях на эту тему во втором томе его «*Méthodes nouvelles*». Большое преимущество уравнений в частных производных лежит в почти исчерпывающей возможности, которую они представляют для введения избыточных постоянных интегрирования. Используя это свойство и исходя из метода Пуанкаре, мы показали [88], как можно различными способами прийти к тригонометрическим выражениям для элементов. Проведем здесь эти исследования более обстоятельно. При этом мы ограничимся астероидной задачей трех тел, ибо в этом случае рассуждения будут более короткими. С другой стороны, это связано с тем обстоятельством, что сейчас не существует каких-либо практических методов, чтобы выразить численно координаты в тригонометрической форме в общей задаче трех тел. Теоретическую возможность такого представления мы показали в предыдущем параграфе.

Используем переменные § 3; тогда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a}, & y_1 &= l + \pi - Nt, \\ x_2 &= \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}), & y_2 &= -\pi + Nt, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и будем иметь

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2), \quad (1^*)$$

где

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

и  $F_0$  имеет значение

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + N(x_1 - x_2). \quad (2)$$

Возмущающая функция  $F_1$  имеет форму

$$F_1 = \Sigma P_s^{(i)} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)]. \quad (2^*)$$

Коэффициенты  $P_s^{(i)}$  разлагаются по степеням  $\sqrt{x_2}$ .

Будем интегрировать дифференциальные уравнения (1\*) при помощи дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби:

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}; y_1, y_2\right) = -C. \quad (3)$$

Если

$$S = S(x_1^0, x_2^0; y_1, y_2)$$

— интеграл этого уравнения с двумя независимыми постоянными интегрирования  $x_1^0$  и  $x_2^0$ , то  $x_1, x_2, y_1, y_2$  получатся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_1^0} &= \frac{\partial C}{\partial x_1^0} t + \beta_1, & \frac{\partial S}{\partial y_1} &= x_1, \\ \frac{\partial S}{\partial x_2^0} &= \frac{\partial C}{\partial x_2^0} t + \beta_2, & \frac{\partial S}{\partial y_2} &= x_2. \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Покажем, что  $S$  можно различным образом выразить как периодическую функцию от  $y_1$  и  $y_2$ . Для этой цели мы воспользуемся следующим искусственным приемом. Положим

$$R = F_0 + \mu\psi, \quad (4)$$

так что

$$F = R + \mu(F_1 - \psi). \quad (4^*)$$

Здесь под  $\psi$  понимается пока совершенно произвольная функция от  $x_1$  и  $x_2$ .

Положим далее

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \dots, \quad (4^{**})$$

и предположим, что дифференциальное уравнение (3\*) можно интегрировать при помощи ряда

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots \quad (5)$$

Принимая во внимание форму (4\*) для  $F$ , для определения  $S_0, S_1, S_2$  и т. д. получим следующие дифференциальные

уравнения:

$$R \left( \frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2} \right) = -C_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = -F_1 + \psi - C_1 \quad (7)$$

и, вообще, при  $p \geq 1$ :

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = -\Phi_p - C_p, \quad (7^*)$$

где  $\Phi_p$  обозначает функцию от  $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$ , которую можно считать известной благодаря предыдущим интегрированим.

Рассмотрим сначала уравнение (6) для  $S_0$ . Его решение можно записать в форме

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2, \quad (8)$$

где  $x_1^0$  и  $x_2^0$  обозначают две произвольные постоянные. Тогда между  $C_0$ ,  $x_1^0$  и  $x_2^0$  должно иметь место соотношение

$$C_0 = -R(x_1^0, x_2^0). \quad (8^*)$$

Если затем положить

$$\left. \begin{aligned} n_1^0 &= -\frac{\partial R}{\partial x_1^0} = \frac{\partial C_0}{\partial x_1^0}, \\ n_2^0 &= -\frac{\partial R}{\partial x_2^0} = \frac{\partial C_0}{\partial x_2^0}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

тогда уравнения для  $S_1$  и  $S_p$  могут быть записаны в форме

$$n_1^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1 - \psi + C_1, \quad (10)$$

$$n_1^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p + C_p. \quad (10^*)$$

Если  $F_1$  рассмотреть в форме (2\*), то интеграл (10), очевидно, можно записать в виде

$$S_1 = \sum \frac{P_s^{(i)}}{(i-s)n_1^0 - sn_2^0} \sin |iy_1 - s(y_1 + y_2)|, \quad (11)$$

где штрих над знаком суммы означает, что надлежит исключить значения  $i = s = 0$ . Ряд (11), очевидно, удовлетворяет уравнению (10), если предположить, что  $C_1$  выбрано так, что не зависящие от  $y_1$  и  $y_2$  члены в правой части (10) обращаются в нуль. Если через  $[F_1]$  обозначить вековую часть возмущающей

функции, то  $C_1$ , следовательно, должно удовлетворять условию

$$[F_1] - \psi(x_1^0, x_2^0) + C_1 = 0. \quad (12)$$

Очевидно, дифференциальные уравнения для  $S_2, S_3$  и т. д. совершенно аналогичны дифференциальному уравнению для  $S_1$ .  $\Phi_p$  получим в виде

$$\Phi_p = \sum A_{is}^{(p)} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)]$$

и обозначим не зависящий от  $y_1$  и  $y_2$  член через  $[\Phi_p]$ ; определим  $C_p$  таким образом, что

$$[\Phi_p] + C_p = 0; \quad (13)$$

тогда  $S_p$  получаем в форме

$$S_p = \sum \frac{A_{is}^{(p)}}{(i-s)n_1^0 - sn_2^0} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)]. \quad (13^*)$$

Итак, интеграл (3) будет иметь следующую форму:

$$S = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \sum' B_{is} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \quad (14)$$

где коэффициенты  $B_{is}$  разлагаются по степеням  $\mu$ .

Уравнения (3\*) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_1^0} t + \beta_1 &= y_1 + \sum' \frac{\partial B_{is}}{\partial x_1^0} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \\ \frac{\partial C}{\partial x_2^0} t + \beta_2 &= y_2 + \sum' \frac{\partial B_{is}}{\partial x_2^0} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \\ x_1 &= x_1^0 + \sum' (i-s) B_{is} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \\ x_2 &= x_2^0 - \sum' s B_{is} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

что и приводит к интегралу в искомой, чисто тригонометрической форме.

Эти формулы справедливы при всяком значении функции  $\psi(x_1, x_2)$ . В этом нет ничего странного, так как согласно (4) и (4\*)  $\mu\psi$  нужно сначала добавить к величине  $F_0$ , а затем вычесть из  $\mu F_1$ . Но мы найдем, что на свойства интеграла  $S$  сильно влияет выбор величины  $\psi$ . После того, как  $\psi$  будет определена, из формулы (15) получаем, что истинное среднее движение  $n_1$  величины  $y_1$  равно  $\frac{\partial C}{\partial x_1^0}$  и истинное среднее движение  $n_2$  величины  $y_2$  равно  $\frac{\partial C}{\partial x_2^0}$ . Говорят, что угловая величина  $y$  обладает истинным средним движением  $n$ , если

$$y = nt + \text{периодическая функция } t.$$

Заметим, далее, что выбор функции  $\psi$  влияет на значения величин  $n_1^0$  и  $n_2^0$ . Делители, которые входят в ряды для  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и т. д., имеют вид

$$(z - s) n_1^0 - s n_2^0.$$

Следовательно, значения делителей зависят от выбора функции  $\psi$ . Мы можем  $\psi$  выбрать так, что эти делители будут иметь такие значения, что все ряды для  $S_1$ ,  $S_2$  и т. д. будут сходящимися. С другой стороны, мы можем встретить такой выбор, что  $n_1$  и  $n_2$  в момент  $t = 0$  либо совпадают с оскулирующими средними движениями, либо будут тождественны с истинными средними движениями, либо будут иметь неизменные значения для ряда значений  $x_1^0$  и  $x_2^0$ . Для достижения этих различных целей можно рекомендовать, в зависимости от обстоятельств, несколько варьировать развитые выше методы.

Если мы хотим добиться, чтобы ряды для всех  $S_1$ ,  $S_2$  и т. д. были сходящимися, тогда по теореме Брунса, которую мы рассматривали в § 5 гл. IX, величину  $\psi$  необходимо выбрать так, чтобы отношение  $n_1^0 : n_2^0$  было корнем алгебраического уравнения с целочисленными коэффициентами по меньшей мере второй степени. Тогда для этих значений  $n_1^0$ ,  $n_2^0$  все ряды  $S_1$ ,  $S_2$  и т. д. будут сходиться. Отсюда, естественно, не следует, что ряд

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \mu^3 S_3 + \dots$$

также будет сходящимся.

Если сделать так, чтобы в делители входили истинные средние движения величин  $y_1$  и  $y_2$ , то целесообразно избрать следующий путь. Положим

$$R = F_0 + \mu \Omega_1 + \mu^2 \Omega_2 + \dots,$$

где  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , ... обозначают пока неопределенные функции от  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда имеем

$$F = R + \mu (F_1 - \Omega_1) + \mu^2 (F_2 - \Omega_2) + \dots$$

Будем искать решение уравнения

$$F \left( \frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, y_1, y_2 \right) = -C$$

в виде ряда

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots;$$

тогда для  $S_0$  получим уравнение

$$R \left( \frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2} \right) = -C,$$

которое дает

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2,$$

где  $x_1^0$  и  $x_2^0$  обозначают две постоянные интегрирования.

Если положить

$$n_1 = -\frac{\partial R}{\partial x_1^0} = \frac{\partial C}{\partial x_1^0}, \quad n_2 = -\frac{\partial R}{\partial x_2^0} = \frac{\partial C}{\partial x_2^0},$$

то, очевидно, в силу (15)  $n_1$  и  $n_2$  совпадут с истинными средними движениями величин  $y_1$  и  $y_2$ . Величины  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  определяются так, чтобы в уравнениях для  $S_1, S_2$  и т. д. уничтожались неперiodические члены.

Так как получаем

$$\Omega_1 = [F_1],$$

то для истинных средних движений в астероидной задаче трех тел находим следующие приближенные значения:

$$n_1 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1^0} = \frac{1}{x_1^{03}} - N - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1^0},$$

$$n_2 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2^0} = N - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2^0}.$$

Если эти выражения сравнить с формулами (1), то найдем следующие значения для среднего движения перигелия и средней аномалии  $l$ :

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{d\pi}{dt} \right] &= \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2^0}, \\ \left[ \frac{dl}{dt} \right] &= \frac{1}{x_1^{03}} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1^0} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2^0}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Эти формулы справедливы с точностью до членов первого порядка включительно. Выражение для  $[F_1]$  берется из § 3. Не менее интересен и другой способ выбора делителей. Величины  $n_1^0$  и  $n_2^0$  можно выбрать так, чтобы они в момент  $t = 0$  совпадали с оскулирующими значениями средних движений по  $y_1$  и  $y_2$ . Этого можно добиться следующим образом.

Положим

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \dots,$$

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots$$

и сначала получим

$$F_0 \left( \frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2} \right) = -C_0,$$

откуда

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Мы хотим так определить функции  $S_1, S_2, \dots$ , чтобы постоянные интегрирования  $x_1^0, x_2^0$  в момент  $t = 0$  совпали с оскулирующими значениями  $x_1$  и  $x_2$ .

Для  $S_1$  справедливо уравнение

$$n_1^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) + C_1 \quad (17)$$

и, вообще,

$$n_1^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S_p}{\partial y_2} = \Phi_p + C_p, \quad (17^*)$$

где  $\Phi_p$  зависит от  $S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$ .

Здесь

$$n_1^0 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0}; \quad n_2^0 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0}. \quad (17^{**})$$

Интеграл (17) можно записать в виде

$$S_1 = \alpha_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 y_2 + \sum B_{is}^{(1)} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \quad (18)$$

где

$$B_{is}^{(1)} = \frac{P_s^{(1)}}{(i-s)n_1^0 - sn_2^0}. \quad (18^*)$$

До сих пор мы полагали лишние постоянные интегрирования  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  равными нулю, но теперь мы распорядимся ими иным образом. Те же самые постоянные можно, очевидно, выбрать произвольно, если только выполняется соотношение

$$n_1^0 \beta_1 + n_2^0 \beta_2 = [F_1] + C_1. \quad (18^{**})$$

Это уравнение выполняется при соответствующем выборе  $C_1$ .

После того как определено  $S_1$ , аналогичным образом получим  $S_2$ . Положим

$$\Phi_p = \sum A_{is}^{(p)} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)]$$

и тогда получим

$$S_p = \alpha_p + \beta_p y_1 + \gamma_p y_2 + \sum B_{is}^{(p)} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \quad (19)$$

где

$$B_{is}^{(p)} = \frac{A_{is}^{(p)}}{(i-s)n_1^0 - sn_2^0}. \quad (19^*)$$

Постоянная  $C_p$  определяется из уравнения

$$n_1^0 \beta_p + n_2^0 \gamma_p = A_{00}^{(p)} + C_p. \quad (19^{**})$$

Теперь  $S$  мы можем записать в форме

$$S = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \alpha + \beta y_1 + \gamma y_2 + \Sigma' B_{is} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots, \\ \beta &= \mu \beta_1 + \mu^2 \beta_2 + \dots, \\ \gamma &= \mu \gamma_1 + \mu^2 \gamma_2 + \dots, \\ B_{is} &= \mu B_{is}^{(1)} + \mu^2 B_{is}^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Из (20) получаем интегралы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial S}{\partial y_1} = x_1^0 + \beta + \Sigma' (i-s) B_{is} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \\ x_2 &= \frac{\partial S}{\partial y_2} = x_2^0 + \gamma - \Sigma' s B_{is} \cos [iy_1 - s(y_1 + y_2)] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_1^0} t + c_1 &= y_1 + \frac{\partial x}{\partial x_1^0} + \frac{\partial \beta}{\partial x_1^0} y_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1^0} y_2 + \\ &+ \Sigma' \frac{\partial B}{\partial x_1^0} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)], \\ \frac{\partial C}{\partial x_2^0} t + c_1 &= y_2 + \frac{\partial x}{\partial x_2^0} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2^0} y_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2^0} y_2 + \\ &+ \Sigma' \frac{\partial B}{\partial x_2^0} \sin [iy_1 - s(y_1 + y_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (21^*)$$

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , являющиеся произвольными, должны быть выбраны так, чтобы при  $t = 0$   $x_1 = x_1^0$  и  $x_2 = x_2^0$ , и чтобы, кроме того, постоянные  $c_1$  и  $c_2$  совпадали со значениями  $y_1$  и  $y_2$  при  $t = 0$ . Обозначим эти значения через  $y_1^0$  и  $y_2^0$  и тогда получим условия

$$\left. \begin{aligned} \beta + \Sigma' (i-s) B_{is} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)] &= 0, \\ \gamma - \Sigma' s B_{is} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)] &= 0, \\ \alpha + \beta y_1^0 + \gamma y_2^0 + \Sigma' B_{is} \sin [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

из которых должны быть определены  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Так как  $x_1^0$  и  $x_2^0$  являются оскулирующими значениями для  $x_1$  и  $x_2$ , то  $\frac{1}{x_1^{03}}$  будет оскулирующим значением среднего движения  $l$ .

Следовательно, в силу (1) при  $t = 0$  оскулирующее среднее движение по  $y_1$  равно

$$\frac{1}{x_1^{03}} - N = -\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0} = n_1^0,$$

а оскулирующее среднее движение по  $y_2$  равно

$$N = -\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0} = n_2^0,$$

так что  $n_1^0$  и  $n_2^0$  в этом случае обозначают оскулирующие средние движения величин  $y_1$  и  $y_2$ .

Из (22) получаем

$$n_1^0 \beta + n_2^0 \gamma = -\Sigma' [(i - s)n_1^0 - sn_2^0] B_{is} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)].$$

Если в правой и левой частях приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , то в силу уравнений (19\*) и (19\*\*) получаем

$$C_p = -A_{i0}^{(p)} - \Sigma A_{is}^{(p)} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)] = -\Phi_p(y_1^0, y_2^0).$$

Следовательно, постоянные  $C_p$  необходимо определить так, чтобы при  $t = 0$  правая часть уравнения (17\*) обращалась в нуль.

Так как, кроме того,

$$C_0 = -F_0,$$

то

$$F_0 + \Sigma \mu^p \Phi^{(p)}(y_1^0, y_2^0) = -C,$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_1^0} &= n_1^0 - \Sigma \mu^p \frac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial x_1^0}(y_1^0, y_2^0), \\ \frac{\partial C}{\partial x_2^0} &= n_2^0 - \Sigma \mu^p \frac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial x_2^0}(y_1^0, y_2^0). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Значения истинных средних движений  $n_1$  и  $n_2$  легко выводятся из (21\*) и (23). Для этой цели нам необходимо только отбросить периодические члены в (21\*) и разрешить уравнения относительно  $y_1$  и  $y_2$ . Коэффициенты при времени  $t$  в этих выражениях дают нам тогда значения  $n_1$  и  $n_2$ . А именно, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_1^0} &= \left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_1^0}\right) n_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1^0} n_2, \\ \frac{\partial C}{\partial x_2^0} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_2^0} n_1 + \left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2^0}\right) n_2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Если отсюда с помощью (23) исключить частные производные от  $C$ , то истинные средние движения можно выразить как функции оскулирующих элементов.

Ограничиваясь первыми степенями относительно масс, в силу (23) будем иметь

$$\frac{\partial C}{\partial x_1^0} = n_1^0 - \mu \sum \frac{\partial P_s^{(i)}}{\partial x_1^0} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)],$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_2^0} = n_2^0 - \mu \sum \frac{\partial P_s^{(i)}}{\partial x_2^0} \cos [iy_1^{(0)} - s(y_1^0 + y_2^0)].$$

Заметим, что в этих рядах имеется также член с  $s = 0$ ,  $i = 0$ . Затем согласно (24) с той же степенью точности получаем

$$n_1 = \frac{\partial C}{\partial x_1^0} - n_1^0 \frac{\partial \beta}{\partial x_1^0} - n_2^0 \frac{\partial \gamma}{\partial x_1^0},$$

$$n_2 = \frac{\partial C}{\partial x_2^0} - n_1^0 \frac{\partial \beta}{\partial x_2^0} - n_2^0 \frac{\partial \gamma}{\partial x_2^0}$$

и

$$n_1^0 \beta + n_2^0 \gamma = -\mu \sum P_s^{(i)} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)].$$

Если это уравнение продифференцировать по  $x_1^0$  и  $x_2^0$  и учесть, что

$$\frac{\partial n_1^0}{\partial x_1^0} = -\frac{3}{x_1^{04}}, \quad \frac{\partial n_1^0}{\partial x_2^0} = 0,$$

$$\frac{\partial n_2^0}{\partial x_1^0} = 0, \quad \frac{\partial n_2^0}{\partial x_2^0} = 0,$$

то получим

$$n_1^0 \frac{\partial \beta}{\partial x_1^0} + n_2^0 \frac{\partial \gamma}{\partial x_1^0} = \frac{3}{x_1^{04}} \beta - \mu \sum' \frac{\partial P}{\partial x_1^0} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)],$$

$$n_1^0 \frac{\partial \beta}{\partial x_2^0} + n_2^0 \frac{\partial \gamma}{\partial x_2^0} = -\mu \sum' \frac{\partial P}{\partial x_2^0} \cos [iy_1^0 - s(y_1^0 + y_2^0)].$$

Отсюда, наконец, получаем

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_1^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1^0} + \frac{3\mu}{x_1^{04}} \sum' \frac{(i-s)P}{(i-s)n_1^0 - sn_2^0} \cos [iy_1^0 - s'(y_1^0 + y_2^0)], \\ n_2 &= n_2^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2^0}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

что и представляет собой искомое соотношение между истинными средними движениями ( $n_1$  и  $n_2$ ) и оскулирующими ( $n_1^0$  и  $n_2^0$ ).

Различие между истинными средними и оскулирующими движениями при известных обстоятельствах может стать, очевидно, значительным также и при малом  $\mu$ , в частности, если имеются малые делители в соизмеримостях низшего порядка.

Использование оскулирующих средних движений в делителях полезно не только потому, что можно непосредственно проводить вычисление коэффициентов в разложении возмущающей функции, в то время как при использовании других средних движений приходится искать окольные пути, но и потому, что оно имеет важное достоинство, состоящее в том, что для возмущений различных порядков получаются сходящиеся выражения.

Учитывая соотношения (22), получим, например, для  $x_1$  выражение

$$x_1 = x_1^0 + \mu \Sigma' i B_{ij}^{(1)} [\cos(iy_1 + jy_2) - \cos(iy_1^0 + jy_2^0)],$$

где взяты только возмущения первого порядка и несколько изменены индексы.

Из ряда правой части мы рассмотрим члены трех типов. Положим

$$\Sigma' i B_{ij} [\cos(iy_1 + jy_2) - \cos(iy_1^0 + jy_2^0)] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

В  $\Sigma_1$  мы включаем такие члены, которые фактически будут входить в (упомянутые) числовые расчеты. Сумма  $\Sigma_2$  охватывает все такие члены, в которых малые делители не становятся меньше определенной нижней границы. Так как сумма  $\Sigma P_s^{(4)}$  предполагается сходящейся, то, значит, при произвольных  $y_1$  и  $y_2$  значение  $\Sigma_2$  не может превзойти определенную конечную величину. Сумма  $\Sigma_3$  содержит так называемые критические члены, которые имеют малые делители различных порядков. Мы покажем, что  $\Sigma_3$  для конечных значений времени не может превзойти некоторую конечную величину.

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = -\mu \Sigma \frac{2iP}{in_1^0 + jn_2^0} \sin \left( i \frac{y_1 + y_1^0}{2} + j \frac{y_2 + y_2^0}{2} \right) \times \\ \times \sin \left( i \frac{y_1 - y_1^0}{2} + j \frac{y_2 - y_2^0}{2} \right). \end{aligned}$$

Но при малых значениях времени приближенно имеем

$$y_1 = y_1^0 + n_1^0 t,$$

$$y_2 = y_2^0 + n_2^0 t,$$

где  $n_1^0$  и  $n_2^0$  обозначают оскулирующие средние движения, и, следовательно, для  $\Sigma_3$  получаем приближенное значение

$$\Sigma_3 = -\mu t \Sigma_i P \sin \left( i \frac{y_1 + y_1^0}{2} + j \frac{y_2 + y_2^0}{2} \right),$$

которое оказывается конечным. Таким образом, малые делители не вызывают расходимости ряда для  $x_1$  по крайней мере для малых значений  $t$ . Наоборот, мы видим, что действие этих членов такое же, какое имело бы место, если бы в  $x_1$  и  $x_2$  входили вековые члены неизвестной величины. Если числовые расчеты недостаточно полны, так что в  $\Sigma_3$  входят критические члены низших порядков, то различие между вычислениями и наблюдениями быстро обнаруживает пропорциональную зависимость от времени. Если же числовые расчеты охватывают достаточно большое количество членов, то малые делители станут заметны только после сотен или тысяч лет.

Подставляя в  $y_1$  и  $y_2$  значения  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$  и объединяя члены в группы, как и выше, найдем, что здесь благодаря малым делителям различие между вычислениями и наблюдениями в  $y_1$  и  $y_2$  возрастает пропорционально второй степени времени, или по крайней мере может возрастать. Если ряды

$$\Sigma B_{ij} \text{ соответственно } \sum_i \frac{\partial B_{ij}}{\partial x}$$

сходятся, то  $\Sigma_3$  всегда должно оставаться внутри конечной границы.

Эти рассуждения относятся только к возмущениям первого порядка. Для возмущений высших порядков справедливы аналогичные выводы; только в этом случае появляются высшие степени  $t$  (или, правильнее,  $\mu t$ ). Эти выводы можно сравнить с сообщениями § 6 гл. X о рядах обычной теории возмущений.

Дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби дает, как мы видели, большую свободу выбора постоянных интегрирования.

Наконец, упомянем еще о таком выборе, который имеет большое значение при систематических определениях возмущения малых планет. В методе Болина, который мы рассмотрим подробно в следующем параграфе, возмущения группы планет связываются, как известно, с определенными значениями постоянных интегрирования, для которых средние движения планет соизмеримы. Между тем такие групповые возмущения отнюдь не обязательно связывать с точками соизмеримости, и можно, конечно, исходить из совершенно произвольных значений элементов и к ним относить возмущения группы планет. Вообще даже выгоднее выбрать точку несоизмеримости, так

как тогда функцию  $S$  можно разлагать по степеням  $\mu$ , а не  $\sqrt{\mu}$ . С другой стороны, предпочтительнее групповые возмущения связывать с точками соизмеримости только в особенных случаях.

Еще раз положим

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots,$$

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \dots$$

и сначала получим

$$K_0 \left( \frac{\partial S_0}{\partial y_1}, \frac{\partial S_0}{\partial y_2} \right) = -C_0,$$

откуда следует

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Затем имеем уравнение

$$n_1^0 \frac{\partial S}{\partial y_1} + n_2^0 \frac{\partial S}{\partial y_2} = F(x_1^0, x_2^0; y_1, y_2) + C_1,$$

интеграл которого запишем в форме

$$S = \beta_1 y_1 + \gamma_1 y_2 + \text{периодическая функция } y_1 \text{ и } y_2.$$

Теперь мы можем обеим постоянным  $x_1^0$  и  $x_2^0$  дать произвольные числовые значения, а  $\beta$  и  $\gamma$  рассматривать как постоянные интегрирования. Предполагаем, что величины  $\beta$  и  $\gamma$  не слишком большие.

Для  $C_1$  выберем такое значение, что

$$n_1^0 \beta_1 + n_2^0 \gamma_1 = [F_1] + C_1.$$

Определение  $S_2$ ,  $S_3$  и т. д. происходит тогда обычным образом при помощи формулы (10\*), и  $S_p$  ( $p \geq 2$ ) можно всякий раз записать в чисто тригонометрической форме.

Так как иногда оказывается необходимым учитывать члены второго порядка, то рассмотрим дифференциальное уравнение для  $S_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial y_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial y_2} \right)^2 \right\} + \\ + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_2} + F_2. \end{aligned}$$

В астероидной задаче трех тел в силу (2)

$$F_2 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} = \frac{3}{x_1^4},$$

так что

$$\Phi_2 = \frac{3}{2x_1^{04}} \left( \frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial S_1}{\partial y_2}.$$

Если записать

$$F_1 = \Sigma A_{ij} \cos (iy_1 + jy_2),$$

то

$$S_1 = \beta y_1 + \gamma y_2 + \sum' \frac{A_{ij}}{in_1^0 + jn_2^0} \sin (iy_1 + jy_2),$$

где  $A_{ij}$ ,  $n_1^0$  и  $n_2^0$  нужно вычислять для значений  $x_1 = x_1^0$ ,  $x_2 = x_2^0$ .

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial S_1}{\partial y_1} = \beta + \sum' \frac{iA_{ij}}{in_1^0 + jn_2^0} \cos (iy_1 + jy_2),$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial y_2} = \gamma + \sum' \frac{jA_{ij}}{in_1^0 + jn_2^0} \cos (iy_1 + jy_2),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1} \cos (iy_1 + jy_2),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2} \cos (iy_1 + jy_2).$$

Заметим, что  $\Phi_2$  является функцией второй степени относительно  $\beta$  и  $\gamma$ . Так как постоянную  $C_2$  мы хотим определить так, чтобы в  $\Phi_2 + C_2$  обращались в нуль постоянные члены, то  $\Phi_2 + C_2$  будет линейной функцией  $\beta$  и  $\gamma$  вида

$$\Phi_2 + C_2 = T^{(1)} + \beta T^{(2)} + \gamma T^{(3)},$$

и здесь

$$T^{(2)} = \sum' \left[ \frac{3}{x_1^{04}} \frac{iA_{ij}}{in_1^0 + jn_2^0} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1} \right] \cos (iy_1 + jy_2),$$

$$T^{(3)} = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2} \cos (iy_1 + jy_2).$$

В тех случаях, когда при непосредственном вычислении возмущений нет необходимости в учете возмущений второго порядка, функцией  $T^{(1)}$ , вычисление которой несколько затруднительно,

можно пренебречь и положить

$$\Phi_2 + C_2 = \beta T^{(2)} + \gamma T^{(3)}.$$

При применении этого метода для систематического вычисления возмущений малых планет величине  $x_1^0$  дают ряд равноотстоящих значений и вычисляют соответствующие значения  $A_{ij}$  и их производные. Эти величины представляются в виде рядов по степеням величины  $x_2^0$ , которую можно оставить неопределенной.

### § 9. О представлении интеграла задачи трех тел в тригонометрической форме (второе продолжение)

Если дана алгебраическая зависимость между  $x$  и  $y$

$$F(x, y) = F_0(x) + \mu F_1(x, y) - C = 0, \quad (1)$$

то в общем случае имеется корень этого уравнения, который может быть разложен по степеням  $\mu$  в окрестности  $\mu = 0$ . Если  $x_0$  — одно из значений  $x$ , которое удовлетворяет уравнению

$$F_0(x_0) - C = 0,$$

и если положить

$$x = x_0 + \delta x,$$

то (1) получим в форме

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_0} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^2} (\delta x)^2 + \dots + \mu F_1(x_0, y) + \mu \frac{\partial F_1}{\partial x_0} \delta x + \dots = 0,$$

и, следовательно,  $\delta x$  можно при малых значениях  $\mu$  разложить по положительным степеням  $\mu$  в предположении, что равенство

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_0} = 0 \quad (2)$$

не имеет места.

Но если  $C$  имеет такое значение, которое удовлетворяет уравнению (2), то  $\delta x$  нельзя разложить по степеням  $\mu$ ; тогда существует разложение  $\delta x$  по степеням  $\sqrt{\mu}$ .

Рассмотрим вместо алгебраического уравнения (1) дифференциальное уравнение вида

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) = F_0\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) + \mu F_1\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) - C = 0; \quad (3)$$

тогда в общем случае существует решение

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots,$$

где  $S_0, S_1, S_2, \dots$  суть функции от  $y$ . Таким образом решение

разлагается в ряд по степеням  $\mu$ . Но если выполняется уравнение (2), то соответствующее решение (3) имеет вид

$$S = S_0 + \sqrt{\mu}S_1 + \mu S_2 + \mu \sqrt{\mu}S_3 + \dots \quad (4)$$

Если вместо обыкновенного дифференциального уравнения (3) было бы дифференциальное уравнение с частными производными для  $S$  с двумя или большим количеством независимых переменных  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , и  $F_0$  зависело бы только от

$$\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, \frac{\partial S}{\partial y_3}, \dots,$$

но не от  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , то результат был бы аналогичен (4). Только условие (2) получает другую формулировку.

Возвратимся к астероидной задаче трех тел, в которой  $F_1$  является периодической функцией от  $y_1$  и  $y_2$  с периодом  $2\pi$  по обоим переменным. В предыдущем параграфе мы видели, что подходящим выбором произвольной функции  $\psi(x_1^0, x_2^0)$  можно добиться, чтобы величины  $n_1^0$  и  $n_2^0$ , которые входят в делитель  $in_1^0 + jn_2^0$ , принимали произвольные значения. Это справедливо также для значений постоянных интегрирования  $x_1^0$  и  $x_2^0$ . Мы нашли также, что интеграл  $S$  дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби

$$F_0\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}\right) + \mu F_1\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, y_1, y_2\right) = -C \quad (5)$$

может быть представлен в общем случае рядом, который разлагается по возрастающим степеням  $\mu$

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots \quad (6)$$

Но в предыдущем параграфе мы видели, что это не имеет места, если производные  $\frac{\partial F_0}{\partial x_1^0}$  и  $\frac{\partial F_0}{\partial x_2^0}$  связаны линейным соотношением с целочисленными коэффициентами. Тогда интеграл можно разложить по степеням  $\sqrt{\mu}$ . Впервые это показал Болин [89]. Его метод стал предметом обстоятельного изучения во втором томе «Méthodes nouvelles» Пуанкаре.

Вводя функцию  $\psi$  предыдущего параграфа так, что

$$F = R_0 + \mu(F_1 - \psi) \quad (7)$$

и

$$R_0 = F_0 + \mu\psi, \quad (7^*)$$

предположим, что произвольная функция  $\psi$  получает такое значение, что

$$in_1^0 + jn_2^0 = 0, \quad (8)$$

где положено

$$n_1^0 = -\frac{\partial R}{\partial x_1^0}, \quad n_2^0 = -\frac{\partial R}{\partial x_2^0}. \quad (8^*)$$

В уравнении (8)  $i_0$  и  $j_0$  обозначают два целых числа. Какие бы значения ни имели истинные средние движения величин  $i_0$  и  $j_0$ , всегда можно так выбрать  $\psi(x_1, x_2)$ , чтобы выполнялось условие (8).

Произведем теперь линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= i_0 y_1 + j_0 y_2, & x_1 &= i_0 \xi_1 + i_0' \xi_2, \\ \eta_2 &= i_0 y_1 + j_0 y_2, & x_2 &= j_0 \xi_1 + j_0' \xi_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

которое не изменяет канонической формы. Числа  $i_0'$  и  $j_0'$  выбираются так, чтобы  $i_0 j_0' - j_0 i_0' = 1$ . Этим самым мы добиваемся того, что возмущающая функция будет периодической функцией относительно  $\eta_1$  и  $\eta_2$  с периодом  $2\pi$ . Если положить

$$F = R_0 + \mu R_1, \quad (10^*)$$

то

$$R_1 = \Sigma A_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2), \quad (10)$$

где  $A_{ij}$  зависят от  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Теперь имеем

$$\frac{\partial R_0}{\partial \xi_1} = i_0 \frac{\partial R_0}{\partial x_1} + j_0 \frac{\partial R_0}{\partial x_2},$$

и, следовательно, по (8) будет

$$\frac{\partial R_0}{\partial \xi_1^0} = 0, \quad (11)$$

если  $\xi_1^0, \xi_2^0$  являются значениями  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , которые соответствуют  $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ .

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$R\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}\right) + \mu R_1\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}, \eta_1, \eta_2\right) = -C \quad (12)$$

и попытаемся искать его решение в виде

$$S = S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \mu S_2 + \mu \sqrt{\mu} S_3 + \dots, \quad (12^*)$$

одновременно полагая

$$C = C_0 + \mu C_2 + \mu^2 C_4 + \dots \quad (12^{**})$$

Для сокращения записи обозначим

$$v_2^0 = - \frac{\partial R_0}{\partial \xi_2^0}. \quad (13)$$

Дифференциальное уравнение для  $S_0$  примет вид

$$R_0 \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S_0}{\partial \eta_2} \right) = -C_0.$$

Предположим, что его решение запишется в виде

$$S_0 = \xi_1^0 \eta_1 + \xi_2^0 \eta_2. \quad (14)$$

Имеем, следовательно,

$$R_0(\xi_1^0, \xi_2^0) = -C_0. \quad (14^*)$$

Введение вспомогательной функции  $\psi$  полезно, так как  $\xi_1^0$  и  $\xi_2^0$  выбираются произвольно, и поэтому их можно считать постоянными интегрирования. После того как выбраны  $\xi_1^0$  и  $\xi_2^0$ , соответствующее значение для  $\psi$  получим из уравнения (11).

Если в (12) подставить ряд (12\*), то для определения  $S_1, S_2$  и т. д. получим следующие уравнения:

$$v_2^0 \frac{\partial S_1}{\partial \eta_2} = 0, \quad (I)$$

$$v_2^0 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 + R_1 + C_2, \quad (II)$$

$$v_2^0 \frac{\partial S_3}{\partial \eta_2} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^3, \quad (III)$$

$$\begin{aligned} v_2^0 \frac{\partial S_4}{\partial \eta_2} = & \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_3}{\partial \eta_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \left( \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_3}{\partial \eta_2} + \\ & + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_2^2} \left( \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} + C_4. \end{aligned} \quad (IV)$$

Уравнению (I) удовлетворяет произвольная функция от  $\eta_1$ . Пусть

$$S_1 = S_1(\eta_1) \quad (15)$$

является этим решением. Функцию  $S_1$  выберем так, чтобы уничтожились члены в правой части (II), которые содержат в аргу-

ментах тригонометрических функций только  $\eta_1$ , но не  $\eta_2$ . Если  $\Phi$  — произвольная функция вида

$$\Phi = a\eta_1 + b\eta_2 + \sum \gamma_{ij} \sin(i\eta_1 + j\eta_2)$$

или вида

$$\Phi = \sum \delta_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2),$$

то через  $(\Phi)$  обозначим сумму тех членов из  $\Phi$ , которые содержат только  $\eta_1$ , так что в первом случае

$$(\Phi) = a\eta_1 + \sum \gamma_{i0} \sin i\eta_1,$$

а в последнем случае

$$(\Phi) = \sum \delta_{i0} \cos i\eta_1.$$

Итак, мы определили  $S_1$  так, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 + (R_1) + C_2 = 0. \quad (16)$$

Тогда функция  $S_2$  определится из уравнения

$$v_2^0 \frac{\partial S_2}{\partial \eta_2} = R_1 - (R_1) = \sum A_{ij} \cos(i\eta_1 + j\eta_2).$$

Штрих над знаком суммы означает, что следует исключить все те члены, в которых  $j = 0$ .

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$S_2 = \frac{1}{v_2^0} \sum' \frac{1}{j} A_{ij} \sin(i\eta_1 + j\eta_2) + (S_2), \quad (17)$$

где функция  $(S_2)$  зависит только от  $\eta_1$  и пока не определена. Она выбирается таким образом, чтобы члены в (III), не зависящие от  $\eta_2$ , обратились в нуль.

Для этой цели должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial (S_2)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^3 = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial (S_2)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 = 0. \quad (18)$$

В силу (16) это уравнение примет вид

$$\left( \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi_1^2} \right)^2 \frac{\partial (S_2)}{\partial \eta_1} - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 R_0}{\partial \xi_1^3} (R_1) + C_2 = 0, \quad (18^*)$$

которое дает

$$(S_2) = \alpha_2 \eta_1 + \frac{R_0'''}{3R_0''} \sum \frac{1}{i} A_{i0} \sin i\eta_1,$$

где  $\alpha_2$  обозначает постоянную, значение которой зависит от  $C_2$ .

При интегрировании (III) в  $S_1$  войдет произвольная функция от  $\eta_1$ , которую определим так, чтобы зависящие только от  $\eta_1$  члены в правой части (IV) обратились в нуль. Продолжая таким же образом, мы, как и в предыдущем параграфе, получим  $S$  в форме

$$S = \alpha \eta_1 + \beta \eta_2 + \Sigma B_{ij} \sin (i\eta_1 + j\eta_2) \quad (19)$$

или, если снова ввести величины  $y_1$  и  $y_2$ ,

$$S = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \Sigma B'_{ij} \sin (iy_1 + jy_2).$$

Итак, мы получили решение в чисто тригонометрической форме, причем здесь малые делители не возникают.

Рассмотрим более обстоятельно полученное решение.

Операции, которые мы выполнили, имеют, вообще говоря, ту же природу, что и в предыдущем параграфе. Единственное исключение представляет уравнение (16) для  $S_1$ . Оно имеет форму

$$\frac{1}{2} R_0'' \left( \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1} \right)^2 = -C_2 - \Sigma A_{i0} \cos i\eta_1.$$

Если  $C_2 + A_{00}$  достаточно велико, то отсюда получим

$$S_1 = \alpha_1 \eta_1 + \Sigma B_i \sin i\eta_1.$$

Но если  $\Sigma' |A_{i0}| > |C_2 + A_{00}|$ , то колебания  $\eta_1$  ограничены частью окружности, и имеет место либрация по  $\eta_1$ . Рассмотрим более обстоятельно предыдущий случай. Рассматривая  $\xi_1^0$  и  $\xi_2^0$  как постоянные интегрирования, представим теперь уравнения для определения  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_1} = \xi_1 = \alpha + \Sigma i B_{ij} \cos (i\eta_1 + j\eta_2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_2} = \xi_2 = \beta + \Sigma j B_{ij} \cos (i\eta_1 + j\eta_2),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_1^0} t + c_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1^0} \eta_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_1^0} \eta_2 + \Sigma \frac{\partial B}{\partial \xi_1^0} \sin (i\eta_1 + j\eta_2),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_2^0} t + c_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2^0} \eta_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2^0} \eta_2 + \Sigma \frac{\partial B}{\partial \xi_2^0} \sin (i\eta_1 + j\eta_2).$$

Истинные средние движения  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  для  $\eta_1$  и  $\eta_2$  получаются из

уравнений

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_1^0} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1^0} v_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_1^0} v_2,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_2^0} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2^0} v_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_2^0} v_2.$$

Они представляются в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням  $\sqrt{\mu}$ . Коэффициенты  $B_{ij}$  имеют такую же форму.

Так как малые знаменатели, которые образуют главное препятствие для сходимости в обычных методах, здесь совершенно не встречаются, то можно было бы думать, что здесь со сходимостью дело обстоит лучше, чем с рядами предыдущего параграфа. Действительно, находим, что здесь ряды для  $S_1, S_2, S_3, \dots$  сходятся, если сходится разложение для возмущающей функции. Но мы видели, что этого же можно добиться также и для рядов предыдущего параграфа. Отсюда, однако, не следует сходимости ряда

$$S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \mu S_2 + \mu \sqrt{\mu} S_3 + \dots; \quad (20)$$

действительно, Пуанкаре доказал, что эти ряды являются расходящимися.

Легко понять, как образуется эта расходимость. Для этой цели исключим из возмущающей функции произвольный член

$$A \cos (i\eta_1 + j\eta_2),$$

а из  $S$  — член

$$B \sin (i\eta_1 + j\eta_2).$$

Исследуем теперь форму  $B$ . В  $S_2$  мы получаем член

$$\frac{A}{v_2^0 j} \sin (i\eta_1 + j\eta_2),$$

и отсюда

$$\frac{\partial S_2}{\partial \eta_1} = \frac{Ai}{v_2^0 j} \cos (i\eta_1 + j\eta_2).$$

Если через  $\beta$  обозначить постоянный член в  $\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}$ , то в силу (III) в  $S_3$  появится член вида

$$\beta \frac{R_0''}{v_2^0} \frac{A}{v_2^0} \frac{i^2}{j^2} \sin (i\eta_1 + j\eta_2)$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial S_3}{\partial \eta_1} = \beta \frac{R_0''}{v_2^0} \frac{A}{v_2^0} \frac{i^2}{j^2} \cos(i\eta_1 + j\eta_2).$$

В  $\frac{\partial S_4}{\partial \eta_1}$  тем же самым путем получим член

$$\frac{\partial S_4}{\partial \eta_1} = A\beta^2 \frac{R_0''^2}{v_2^{0^2}} \frac{i^3}{j^3} \cos(i\eta_1 + j\eta_2).$$

Следовательно, в  $S$  имеется член  $B \cos(i\eta_1 + j\eta_2)$ , коэффициент  $B$  которого разлагается в ряд по степеням величины

$$\kappa = \sqrt{\mu} \frac{\beta R_0''}{v_2^0} \frac{i}{j}.$$

Каковы бы ни были  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $R_0''$ ,  $v_2^0$ , всегда можно найти такие значения  $i$  и  $j$  при произвольно большом  $\kappa$ , что  $B$  представится расходящимся рядом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ОНТИ, 1936.
2. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1—3, Paris, 1892—1899.
3. Lindstedt, Mém. de l'Acad. de St.-Pétersbourg 21, N 4, 1883.
4. Euler L., Mém. de l'Acad. de Berlin, 1760.
5. Legendre A. M., Traité de fonctions elliptiques et intégrales du Eulériennes, Paris, 1802.
6. Сякорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
7. Jacobi C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiomontani, 1829.
8. Staude O., Math. Ann. 32, 1887.
9. Stäckel P., Math. Ann. 42, 1893, 54, 1899.
10. Кронекер Л., Sitzungsber. der Berlin. Acad., 54, 1884.
11. Демин В. Г., Астрон. ж. 37, вып. 6, 1960.
12. Арнольд В. И., УМН, 18, N 6 (114), 1963.
13. Tallqvist H., Acta soc. sci. Fennicae, nov. ser. 1, N 1, 1927.
14. Badaljan G. K., Comment. phys.-math. soc. sci. Fennicae 8, N 2, 1935.
15. Бадалян Г. К., Астрон. ж. 11, вып. 4, 1934.
16. Демин В. Г., Труды Университета дружбы народов, сер. мех., 9, вып. 4, 1965.
17. Белецкий В. В., Космич. исслед. 2, 3, 1964.
18. Кунцын А. Л., Космич. исслед. 4, 2, 1966.
19. Вуггау С., Astronom. Nachr. 136, N 3251, 1894.
20. Орлов С. В., Голова кометы и новая классификация кометных форм, Изд-во «Сов. наука», 1945.
21. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
22. Dziobek O., Die Mathematische Theorie der Planetenbewegungen, Leipzig, 1888.
23. Poincaré H., Bull. astronom. 14, 1897.
24. Jacobi C. G. J., Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps.
25. Allegret, Journ. de math pures et appl., 1875.
26. Delaunay C., Théorie du mouvement de la lune, 1, Paris, 1860.
27. Арнольд В. И., Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», изд. АН СССР, 1963.
28. Levi-Civita T., Atti del R. Ist. Veneto, 74 1915.
29. Lie S., Math. Ann. 8, 1876.
30. Воронец, Изв. Киев. ун-та, 1907.

31. Radau R., Ann. de l'École Norm. Sup. 5, 1868.
32. Charlier C. L., Medd. från Lunds. Obs., ser. I, 6, 1899.
33. Bruns K., Über die Integrale des Vielkörperproblem, 1887.
34. Norén G., Wallenberg J. A., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 10, 1900.
35. Bohlin K., Kgl. Svensk. Vet. Ak., 1891.
36. Cavallin C. B. S., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 19, 1902.
37. Jacobi C. G. J., Journ. für reine und angewand. Math. 30, 1846.
38. Seeliger H., Astron. Nachr. 93, N 2231, 1878.
39. Charlier C. L., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 15, 1901.
40. Idman A., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 14, 1900.
41. Norén G., Raab S., Medd. från Lunds Obs., ser. II, 2, 1901.
42. Charlier C. L., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 12, 1900.
43. Newcomb S., Mem. of the Americ. Acad., New Ser. 5.
44. Leverrier U., Ann. de l'Obs. de Paris, 2.
45. Psilander A. A., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 16, 1901.
46. Lagrange J. L., Oeuvres, t. VI, Paris, 1772.
47. Hill G. W., Amer. Journ. of Math., 1, 1878.
48. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, 1963.
49. Darwin G. H., Acta Math. 21, 1897.
50. Plummer H. C., Royal Astronom. Soc. 62, 6, 1901.
51. Burrau C., Astronom. Nachr., N 3230, 3251, 1896.
52. Airy G. B., Du Gravitation, Leipzig, 1891.
53. Tisserand F., Bull. astronom. 3, 1886.
54. Backlund O. A., Bull. de l'Acad. Imp. de St.-Petersbourg, 1898.
55. Brendel M., Theorie der kleinen Planeten, Berlin, 1898.
56. Schwarzschild. Astronom. Nachr. 147, N 3506, 1898.
57. Laplace P. S., Mécanique célesté, t. V, Paris, 1825.
58. Charlier C. L., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 22, 1904.
59. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, изд-во «Наука», 1965.
60. Еленевская Н. Б., Бюлл. ИТА АН СССР, 8, N 6 (99), 1962.
61. Moulton F. R., Astronom. Journ. 23, 1903.
62. Hamilton W. A., Astronom. Journ. 23, 1903.
63. Bohlin K., Acta Math. 10, 1887.
64. Султанов Г. Ф., Ибрагимов И. Б., Каталог значений постоянных Якоби. Баку, 1962.
65. Kobb G., Bull. astronom. 18, 1901.
66. Зигель К., Лекции по небесной механике, ИЛ, 1959.
67. Колмогоров А. Н., ДАН СССР 98, N 4, 1954.
68. Bruns K., Astronom. Nachr. 109, N 2606, 1884.
69. Gylden H., Öfversigt af Kongl. Vetenskaps — Akademiens Förhandlingar, 2, 1888.
70. Broden T., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 11, 1900.
71. Wiman, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps — Akademiens Förhandlingar 7, 1900.
72. Broden T., Bemerkungen über Mengenlehre und Wahrscheinlichkeitstheorie, Malmö, 1901.
73. Wiman, Bemerkungen über eine von Gylden aufgeworfene Wahrscheinlichkeitsfrage, Lund, 1901.
74. Broden T., Noch einmal die Gylden'sche Wahrscheinlichkeitsfrage, Malmö, 1901.
75. Charlier C. L., Astronom. Nachr. 122, N 2913, 1889.
76. Якоби К., Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.
77. Sumter H., Astronom. Nachr., 217, N 5193—94, 1923.

78. Д ё м и н В. Г., Астрон. ж. 38, вып. 1, 1961.
79. R u n k l e, Smithsonian. Contr. Knowledge 9, 1856.
80. H a r z e r, Mem. de l'acad. de St-Pétersbourg, 1886.
81. S c h w a r z s c h i e l d K., Astronom. Nachr. 160, N 3839, 1902.
82. P o i n c a r e H., Bull. astronom. 19, 1902.
83. A n d o y e r H., Bull. astronom. 20, 1903.
84. B r e n d e l M., Astronom. Nachr. 140, № 3346, 1896.
85. H i l l G. W., The collected mathematical works, vol. 1—4, Washington, 1905—7.
86. G y l d e n H., Undersökningar af theorien för himlakropparnes rörelser, 1881.
87. T i s s e r a n d F., Ann. de l'observ. de Paris 18, 1885.
88. C h a r l i e r C. L., Medd. från Lunds Obs., ser. I, 24, 1904.
89. B o h l i n K., Über eine neue Annäherungsmethode in der Störungstheorie, 1888.

**К. Шарль**

**Небесная механика**

**М., 1966 г., 623 стр. с илл.**

**Редактор И. Е. Рахлин**

**Техн. редактор И. Ш. Аксельрод**

**Корректор Е. А. Белицкая**

---

**Сдано в набор 16/II 1966 г. Подписано к печати  
21/VI 1966 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup>. Физ. печ. л. 39,25.**

**Условн. печ. л. 39,25. Уч.-изд. л. 36,36.**

**Тираж 4000 экз. Цена книги 2 р. 82 к. Заказ № 318**

---

**Издательство «Наука»**

**Главная редакция**

**физико-математической литературы**

**Москва, В-71, Ленинский проспект, 15**

---

**2-я тип. издательства «Наука», Москва,**

**Шубинский пер., 10**